etrônico

Estratégia
CONCURSOS

Aul

Matemática III p/ Escola de Formação de Fuzileiros Navais 2019 - Com videoaulas

Professor: Italo Marinho Sá Barreto

Aula 00: Elementos fundamentais, ângulos, triângulos, congruência, semelhança

Antes de iniciarmos o nosso curso, vamos a alguns AVISOS IMPORTANTES:

1) Com o objetivo de ***otimizar os seus estudos***, você encontrará, em ***nossa plataforma (Área do aluno)***, alguns recursos que irão auxiliar bastante a sua aprendizagem, tais como ***"Resumos", "Slides"*** e ***"Mapas Mentais"*** dos conteúdos mais importantes desse curso. Essas ferramentas de aprendizagem irão te auxiliar a perceber aqueles tópicos da matéria que você precisa dominar, que você não pode ir para a prova sem ler.

2) Em nossa Plataforma, procure pela ***Trilha Estratégica e Monitoria*** da sua respectiva área/concurso alvo. A Trilha Estratégica é elaborada pela nossa equipe do *Coaching*. Ela irá te indicar qual é exatamente o ***melhor caminho*** a ser seguido em seus estudos e vai te ajudar a ***responder as seguintes perguntas***:

   - Qual a melhor ordem para estudar as aulas? Quais são os assuntos mais importantes?
   - Qual a melhor ordem de estudo das diferentes matérias? Por onde eu começo?
   - *"Estou sem tempo e o concurso está próximo!"* Posso estudar apenas algumas partes do curso? O que priorizar?
   - O que fazer a cada sessão de estudo? Quais assuntos revisar e quando devo revisá-los?
   - A quais questões deve ser dada prioridade? Quais simulados devo resolver?
   - Quais são os trechos mais importantes da legislação?

3) Procure, nas instruções iniciais da "Monitoria", pelo Link da nossa ***"Comunidade de Alunos"*** no Telegram da sua área / concurso alvo. Essa comunidade é ***exclusiva*** para os nossos assinantes e será utilizada para orientá-los melhor sobre a utilização da nossa Trilha Estratégica. As melhores dúvidas apresentadas nas transmissões da ***"Monitoria"*** também serão respondidas na nossa ***Comunidade de Alunos*** do Telegram.

   (*) O Telegram foi escolhido por ser a única plataforma que preserva a intimidade dos assinantes e que, além disso, tem recursos tecnológicos compatíveis com os objetivos da nossa Comunidade de Alunos.

Sumário

Olá estimado aluno. É um prazer tê-lo conosco neste novo trajeto para o aprendizado da matemática! Sou o professor **Italo Marinho**, formado em matemática pela UERJ; atuo no ensino de matemática e física no estado do Rio de Janeiro há 12 anos com enfoque em concursos militares. Me especializei na produção de materiais didáticos dentro do mesmo enfoque.

A matemática é uma ciência constante. Galera, ela não muda. É sempre a mesma. Sabem o que, de fato, muda? Nossa perspectiva. Nosso objetivo aqui é fazer **você** mudar a forma de ver a matemática. Pode ter a certeza de que a abordagem a ser tomada aqui é diferente de qualquer experiência negativa que você, estudante, possa ter vindo a ter no decorrer de sua vida de estudos. A aeronáutica cobra elementos padronizados em suas provas. Pretendo fazer você visualizar esse padrão e, a partir de muita prática, alcançar seus objetivos. Sem mais delongas, vamos ao que interessa!

Fizemos uma divisão bastante precisa de edital para você, aluno. Separamos a matemática em três grandes partes. A matemática I, a matemática II e a matemática III (a toda linda e bela geometria). Esse livro eletrônico tratará, claro, de geometria. Mas de geometria para concursos militares, que tem um enfoque bastante específico. Antes de você começar a ler esse material, gostaria de fazer algumas ressalvas. Nesse material você encontrará 31 questões, sendo 13 delas da CFN. Essas 13 questões constituem TODAS as questões que já caíram naquele referido concurso. As outras são questões diversas que julgo importantes você aprender. E sabe o porquê ter menos da CFN mais das outras? É porque não há tantas questões assim divulgadas. Então, cabe a você, estudante, confiar nas reuniões feitas aqui e acreditar na experiência que tenho em sala de aula para identificar os pontos mais baixos de um aluno que almeja a carreira militar. Faça todos os exercícios independente de ser ou não da CFN. Geometria se aprende assim. Então, vamos lá!

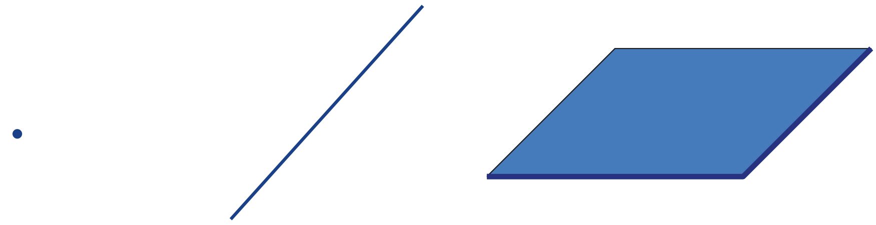
CRONOGRAMA DE AULAS

DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*ÂNGULOS – ideais de ângulos, medidas de ângulos, subdivisão do grau, operações com medidas de ângulos, ângulos complementares, ângulos suplementares, ângulos adjacentes e ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal (alternos internos, alternos externos, colaterais internos, colaterais externos e correspondentes).*
Aula 01	*POLÍGONOS – ângulos, diagonal, soma das medidas dos ângulos internos e soma das medidas dos ângulos externos.*
Aula 02	*Cálculo do perímetro e da área das principais figuras planas (retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, trapézio, losango, círculo e suas partes).*
Aula 03	*Cálculo da área e do volume dos seguintes sólidos: paralelepípedo e cilindros.*
Aula 04	*Razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente), cálculo do seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60° e Teorema de Pitágoras.*
Aula 05	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

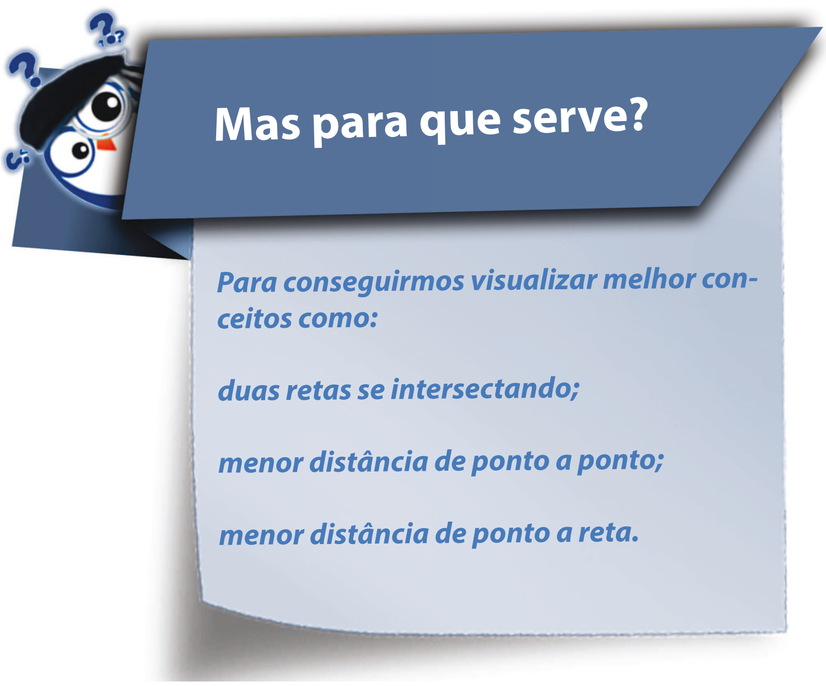
1.0– Fundamentos da Geometria Plana: elementos primitivos, axiomas e postulados

1.1– Entes fundamentais

Começaremos agora o nosso estudo sobre geometria. Para tanto, precisaremos conhecer os seus entes fundamentais, que não são mais do que as formas básicas que constroem toda e qualquer figura. Existem três entes fundamentais para a geometria euclidiana[1] plana:



Acima vemos, na ordem, o **ponto**, a **reta** e o **plano**. Um dos maiores erros aqui é negligenciar o estudos desses elementos. O estudo e o bom entendimento da mecânica dessas formas é incrivelmente relevante para não errarmos coisas bobas depois.



Você pode ver essas formas no seu dia-a-dia, nos seus arredores. Estão por toda a parte! As paredes que delimitam a sua casa são exemplos da representação de um plano, assim como as quinas e cantos são exemplos de retas e pontos.

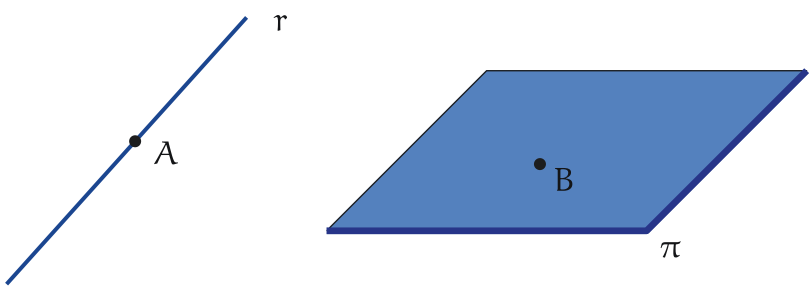
É muito importante que entendamos que apesar de intuitivas, não há uma *definição* específica para os entes fundamentais. Não há como *explicar* o que seria um ponto, uma reta ou um plano. Podemos, porém, *verificar suas propriedades*, padrões que surgem quando são estudados mais a fundo. A prova da CFN foca diretamente nessas propriedades.

[1] Esse nome deriva do criador do modelo clássico da geometria, Euclides.

Retas e planos como conjuntos

É exatamente isso. Retas e planos são conjuntos, galera. Aqueles mesmos conjuntos que aprendemos lá em álgebra! Daí você poderia me perguntar assim: *"mas prof., quais seriam os elementos desses conjuntos?"*, e eu magicamente te respondo: *"pontos"*!

É isso mesmo. Retas e planos são conjuntos de pontos! Pontos, são, em geral, identificados por uma letra maiúscula do nosso alfabeto (como M ou P), enquanto retas são identificadas por uma letra minúscula (como r ou s). Planos, porém, são identificados por *letras gregas* (como o π). Daí, na figura ao lado podemos dizer que A é um elemento de r assim como B é um elemento de π (isto é, $\mathrm{A} \in \mathrm{r}$ e $\mathrm{B} \in \pi$).



Representações de reta e plano

Infinitude

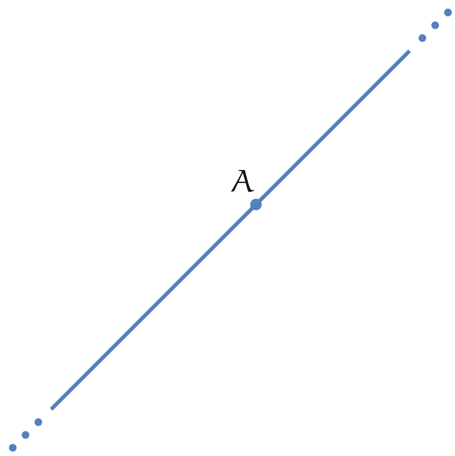
Retas e planos são *infinitos*. Isso quer dizer que você nunca conseguirá desenhar uma reta ou um plano perfeitos. Você conseguirá apenas *representar* uma parte deles. Na figura anterior, por exemplo, o que chamamos de reta r é, na verdade, apenas *um pedaço da reta* (pois a reta mesmo, em si, é infinita). O mesmo podemos dizer sobre o plano (é infinito para todas as direções).

Calma que já vamos chegar lá. Esse é um estudo preliminar importantíssimo para podermos prosseguir. De nada vai adiantar irmos direto para os "finalmentes" se não entendermos como funciona a base de nossos estudos. Por enquanto, foque em aprender e entender o que está sendo passado. Comece a olhar as figuras geométricas e a visualizar os pontos, as retas, isso é realmente muito importante. Estou confiando em você!

Subconjuntos notáveis da reta: semirreta e segmento de reta

A reta é, talvez, o ente fundamental mais importantes dentre os três em termos de provas militares. Retas determinam lados de triângulos, polígonos, ângulos, arestas de sólidos espaciais, etc. Retas estão realmente em todas as partes. Mas às vezes (na maioria das vezes), não estamos interessados na reta toda, mas sim em um "pedaço" dela. Há dois subconjuntos fundamentais que precisamos conhecer.

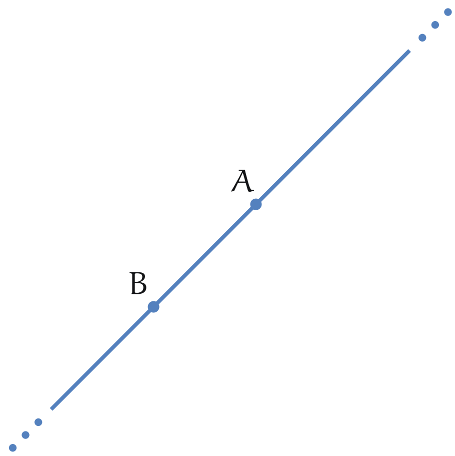
Temos na figura uma reta com um ponto A que a pertence. Fica bem claro de se ver que tal reta ficou dividida em dois pedaços bastante distintos. A cada um desses pedaços damos o nome de *semirretas*. Perceba que A é o ponto comum dessas duas semirretas; ele é chamado de a *origem* dessas semirretas.



Perceba também que semirretas não são infinitas para ambos os sentidos, mas apenas para um deles (pois o outro é limitado pelo ponto A).

Consideremos agora um outro ponto sobre a reta (um ponto distinto de A).

Agora que temos dois pontos sobre a reta, um outro subconjunto dela aparece automaticamente. Seria o conjunto dos pontos *entre*[2] *os dois pontos tomados*, isto é, o conjunto dos pontos entre A e B. A esse conjunto de pontos (subconjunto da reta) damos o nome de *segmento de reta*. Poderíamos representá-lo sem reticências, percebe? Porque ele não é infinito para qualquer sentido que seja. É limitado em ambos. Por isso dizemos que é possível *medi-lo*!



Veja que não dá para medir o comprimento de uma reta ou de uma semirreta (porque têm extensão infinita). Mas um segmento de reta dá! Podemos medi-lo nos utilizando das unidades básicas de comprimento (o metro, o centímetro, ou qualquer outra unidade de comprimento).

Sim, trata-se de um excelente exemplo! Apesar de parecer óbvio, fará uma enorme diferença termos essa noção de cabeça. Ah, aqui vai uma dica: quando quisermos nos referir à reta que contém um segmento de reta, chamamos essa reta de *a reta suporte do segmento*.

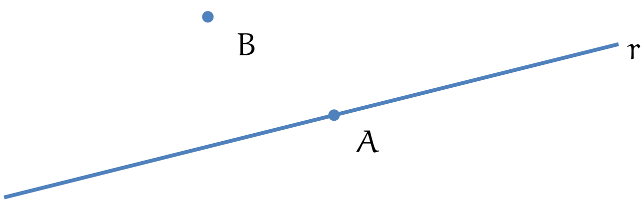
[2] Aqui levarei em consideração que seja intuitivo o que quero dizer com "entre os pontos".

1.2– Posições relativas

Aqui começaremos a estudar sobre as **posições** entre dois entes fundamentais. Focaremos no ponto e na reta. O **plano** será discutido mais tarde, quando começarmos a nos preocupar com a terceira dimensão.

Há duas posições relativas a discutirmos: entre **ponto e reta** e entre **ponto e ponto**. Analisemos cada uma delas.

Ponto e reta

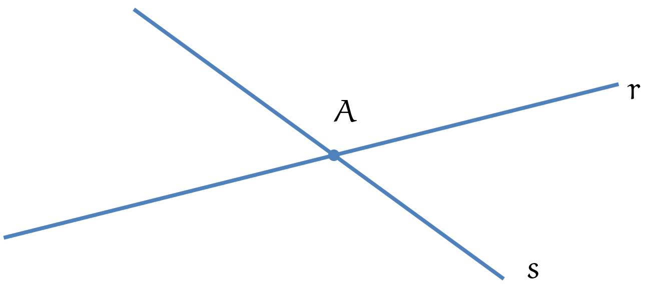


Nada mais do que já sabemos. Na figura ao lado observamos uma reta r e dois pontos, A e B. Cada um ocupa uma *posição relativa diferente* em relação à reta r. Isto porque $A \in r$ e $B \notin r$. Essas são as duas únicas posições relativas possíveis entre ponto e reta: ou o ponto *pertence à reta* ou *não pertence*. Muitas vezes leremos que A *está sobre a reta*[3], enquanto B não.

Reta e reta

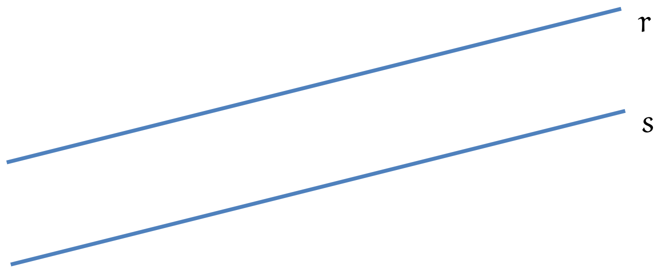
Aqui precisamos ficar ligados. Há três importantes posições relativas aqui, *cobradas com extrema frequência* em questões. Precisamos tomar bastante cuidado ao tentarmos entender esses conceitos. Vamos lá!

Há três classificações importantes que devemos dar a duas retas em posições relativas: transversais, paralelas e coincidentes[4].



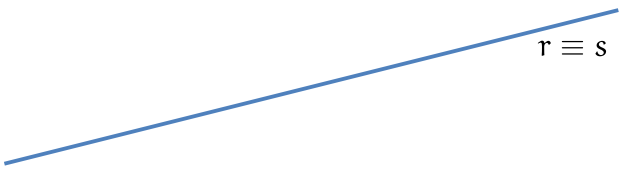
• *Retas transversais*[5]: São retas que têm *exatamente um ponto em comum*, ou seja, intersectam-se apenas umas vez (como ilustra a figura ao lado). Veja que o ponto A é *comum* (está ao mesmo tempo) tanto na reta r quanto na reta s. Lembrando-nos de que r e s são conjuntos de pontos, podemos dizer que $r \cap s = A$ (a interseção entre os conjuntos r e s é o ponto A).

[3] Expressão muito utilizada em questões.
[4] Algumas bibliografias famosas negam a existência de retas coincidentes; as bancas militares aqui estudadas, porém, consideram essa definição existente.
[5] Também utilizaremos muitas vezes o termo *retas concorrentes*



• *Retas paralelas*: Vamos deixar clara uma coisa: a definição que vou passar para vocês aqui *somente é válida para a geometria plana*. No espaço a definição a seguir não é suficiente para que duas retas sejam paralelas. Sabendo disso, vamos à definição: duas retas (num mesmo plano) serão ditas paralelas quando não tiverem pontos em comum, isto é, quando não se intersectarem. Dizemos então que as retas r e s são disjuntas[6], isto é, que $r \cap s = \varnothing$ (interseção vazia, não há elementos comuns). Para a representação de retas paralelas utiliza-se a notação: $r /\!/ s$.

• *Retas coincidentes*: São retas que possuem mais de um ponto em comum. Na prática, quando duas retas têm mais de um ponto em comum, significa que são na verdade representações da mesma reta. Veja na figura abaixo:

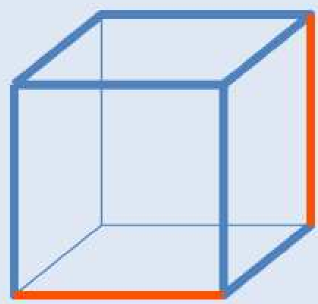


As "duas" retas representadas na figura "estão uma sobre a outra", fazendo com que sejam na verdade a representação da mesma reta. São representadas por: $r \equiv s$.

• *Retas perpendiculares*: São tipos especiais de retas transversais. Dizemos que duas retas são perpendiculares quando intersectam-se formando um *ângulo reto*[7]. A noção de perpendicularismo figura dentre as **mais importantes** de toda a geometria.

Veja a seguir um par de retas perpendiculares:

INDO MAIS FUNDO!



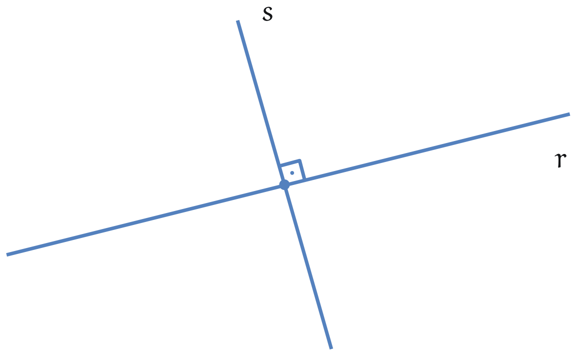
Observe o cubo acima e as retas representadas pelas arestas vermelhas. Responda as perguntas seguintes:

1. Essas retas se intersectam em algum ponto?

2. Essas retas são paralelas?

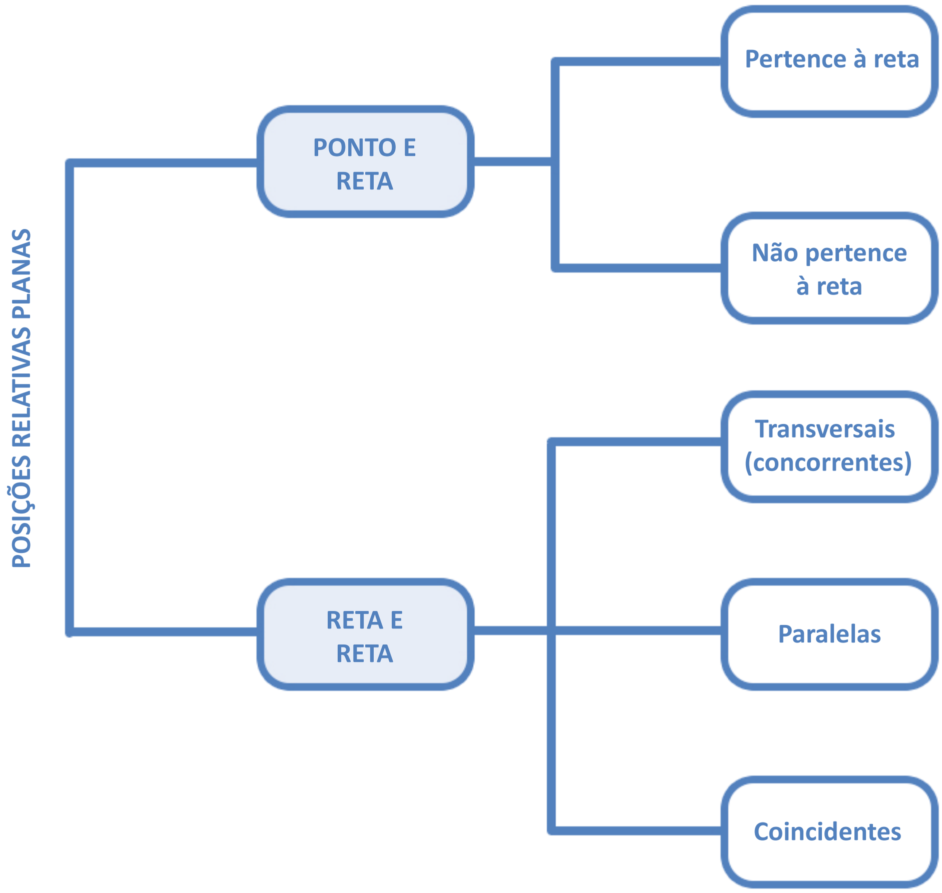
[6]Termo utilizado no estudos de conjuntos quando nos referimos a conjuntos que não tenham interseção entre si.
[7]a noção de ângulo será explicada na próxima seção

Trata-se de retas concorrentes porém com a especificidade de formarem um ângulo reto entre si, como foi dito. Alguns textos utilizarão o termo *ortogonal* para se referir a tais retas; cabe ressaltar aqui, porém, que o termo *ortogonal* tem significado um pouco mais amplo, e será discutido quando passarmos a considerar a terceira dimensão. Utilizaremos o símbolo $\perp$ para indicar perpendicularidade entre duas retas, ou seja: $r \perp s$ lê-se "r é perpendicular a s".



Terminamos assim o estudo das posições relativas no plano. Veja e reveja esse conteúdo até você ter a certeza de que entendeu as definições que passei para você (não se esquecendo nunca de que parte dessa certeza só será acometida quando formos fazer as questões).

ESQUEMATIZANDO



2.0– Ângulos

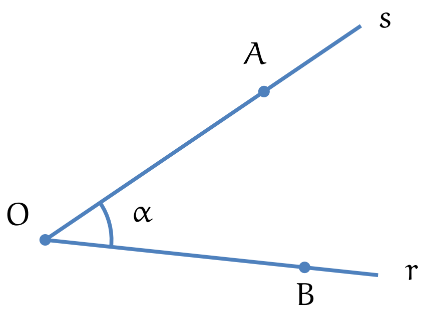
2.1– Características básicas

Começaremos então o nosso estudo sobre *ângulos*. Ângulos são nossos segundos elementos a serem medidos, visto que já aprendemos que segmentos de reta também têm medida (de comprimento). Muita atenção deve ser dada a esse tópico, ângulos são a nossa entrada para a parte métrica de nossos problemas.

Definição e notações

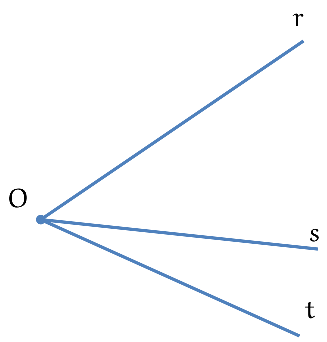
Um ângulo nada mais é que a figura formada pela união de duas semirretas (chamadas de lados) de mesmas origens.

Veja abaixo o exemplo de um ângulo:



Na figura, vemos duas semirretas, representadas por r e s. Não apenas a abertura entre as retas mas sim a figura toda é considerada o *ângulo* de fato. Veja que ambas têm a mesma origem (o ponto O). Num ângulo, a origem comum às semirretas é chamada de *vértice* do ângulo. De modo mais simples: vértice é o "bico" do ângulo. No nosso exemplo o ângulo tem vértice O. Há diversas notações angulares, e as provas costumam ser bastante diversas nesse ponto. Cito aqui as principais maneiras de notarmos um ângulo (utilizarei a figura anterior para os exemplos):

- $\hat{O}$: Notação que foca no *vértice* do ângulo. Caso haja ângulos adjacentes[1] no mesmo vértice, essa notação não é a melhor, pois traz ambiguidade. Veja um exemplo dessa ambiguidade:



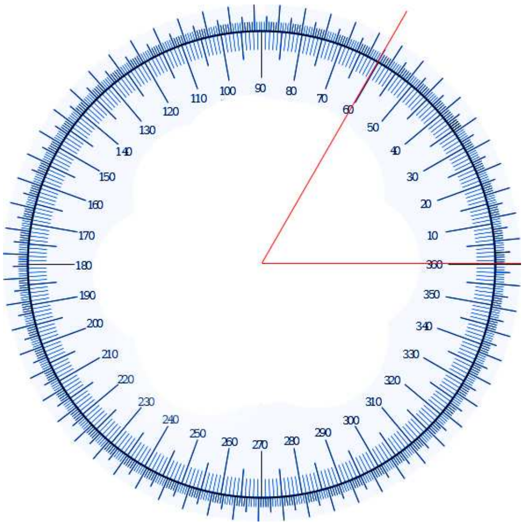
[1]Definido mais à frente.

Suponha que eu peça que você olhe para o ângulo $\hat{O}$ na figura anterior. Para qual ângulo que você olharia? Há possibilidades múltiplas, correto? Portanto, essa não é a melhor notação para o caso.

- $\angle AOB$: Notação que enfatiza as semirretas do ângulo. Não gera nenhum tipo de ambiguidade.
- $A\hat{O}B$: Notação quase idêntica à anterior, muda apenas pela forma de escrita.
- Muitas vezes o ângulo terá um nome já escrito na figura. Em nosso caso, por exemplo, trata-se do ângulo α.

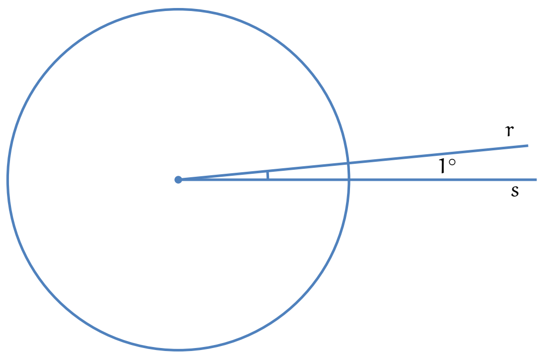
Medidas angulares

E aí, como será que medimos um ângulo? Há duas maneiras de medirmos, essencialmente. Uma é utilizando o *radiano*, que não veremos até falarmos de *arcos*. A outra, que utilizaremos agora, é o *grau*. Mas então, o que vem a ser um grau? Vamos ao entendimento.



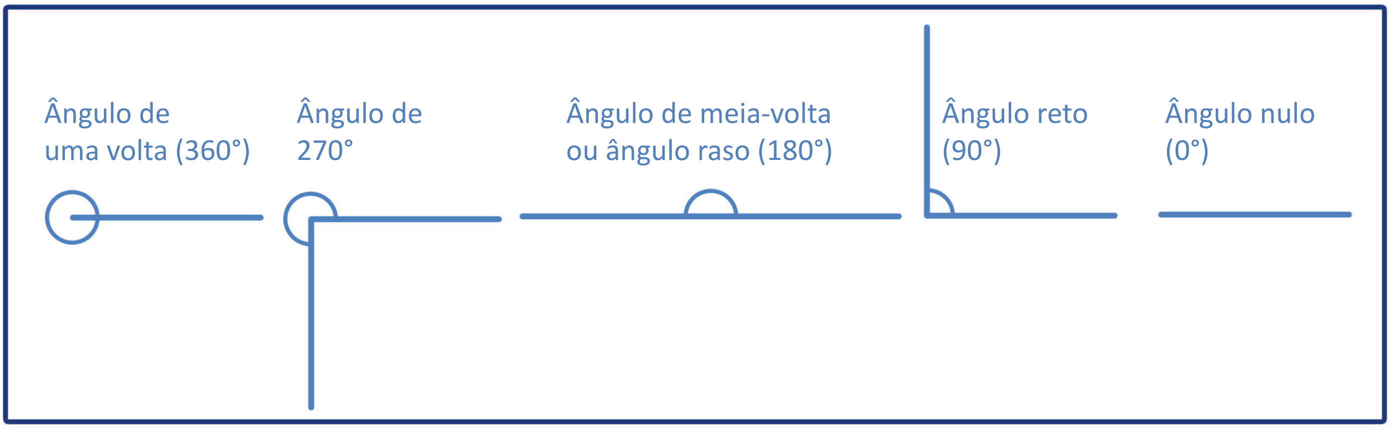
Divida a borda de um círculo[2] em 360 partes, como ilustra a figura ao lado. Agora considere duas semirretas partindo do seu centro. A medida do ângulo formado será a *quantidade de divisões entre as duas semirretas*. No nosso exemplo ao lado há 60 divisões entre uma semirreta e a outra. Dizemos então que trata-se de um ângulo de 60 graus (escreve-se $60°$). Um grau, então, é a menor divisão feita dentre as 360 divisões. Um ângulo de $45°$ é então, por exemplo, um ângulo em que couberam 45 divisões de um grau. Essa é a forma mais recorrente para a medida de um ângulo.

Vemos ao lado a representação de um ângulo de $1°$. Se construíssemos sucessivamente, a partir de cada lado dos ângulos, um ângulo de $1°$, precisaríamos de 360 construções para cobrir todo o círculo. Dessa forma, todo e qualquer ângulo pode ser medido a parte de uma comparação de "quantos ângulos de $1°$ cabem em seu interior, partindo do mesmo vértice". Veremos a seguir alguns ângulos especiais que merecem destaque.

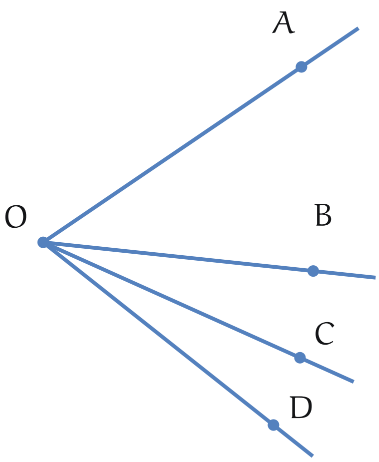


[2] Círculos são figuras importantíssimas que serão estudadas nas aulas seguintes.

TOME NOTA!



Ângulos consecutivos

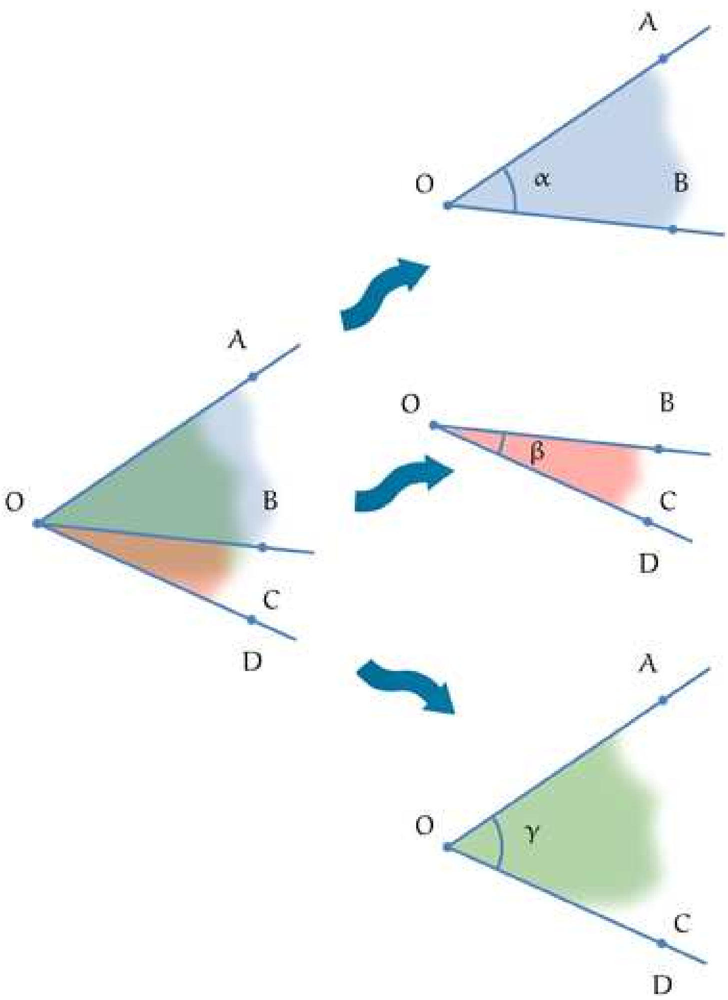


São ângulos que possuem o mesmo vértice e uma semirreta em comum. No exemplo ao lado, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são exemplos de ângulos consecutivos (pois têm o mesmo vértice O e têm uma semirreta em comum, que seria a semirreta BO). Os ângulos $\angle AOC$ e $\angle BOC$ também são consecutivos pelos mesmos motivos. Já os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ não são consecutivos, pois apesar de partirem do mesmo vértice, não têm um lado em comum. Seguem mais alguns pares de ângulos consecutivos: $\angle BOC$ e $\angle COD$; $\angle AOC$ e $\angle COD$; $\angle AOD$ e $\angle BOD$; $\angle AOB$ e $\angle BOA$; etc. Veremos a seguir outro tipo de ângulo parecido com os ângulos consecutivos, mas com uma diferença essencial. Vamos a ele.

Ângulos adjacentes

São ângulos consecutivos sem *pontos interiores*[3] em comum, ou seja, ângulos que não se autointersectem. Para podermos adquirir uma boa intuição de que isso significa, precisaremos de uma demonstração visual do que quero dizer. Muita atenção então no exemplo a seguir. Separarei alguns ângulos de uma figura, e vamos tentar identificar aqueles que são adjacentes e aqueles que não. Lembre-se de observar bem a definição e de ter na cabeça a noção de ângulo de uma forma bem clara. Vamos lá!

[3] Esse conceito (o de *ponto interior*) não será definido formalmente, por ser altamente intuitivo.



Na figura, há três ângulos: um azul (que seria o ângulo α ou $\angle AOB$), um vermelho (que seria o ângulo β ou $\angle BOD$) e um verde (que seria o ângulo γ ou $\angle AOD$). Antes de destacá-los e separá-los, estavam todos em uma mesma figura. Dizemos então que o ângulo azul é interior ao ângulo verde, assim como o ângulo vermelho também o é. Eles são interiores ao verde porque têm *pontos interiores em comum*. Perceba que o mesmo não acontece entre os ângulos vermelho e azul. Estes ângulos não têm pontos interiores entre si e portanto são os únicos **adjacentes** da figura.

Pergunta, vamos lá: os ângulos $\angle AOB$ e $\angle AOD$ são consecutivos? E adjacentes?

Eles são consecutivos, porque têm mesmos vértices e têm um lado em comum, porém, não são adjacentes, porque apesar de consecutivos, têm pontos interiores em comum; isso fere a definição. Então apesar de consecutivos, acabam não sendo adjacentes.

QUESTÕES COMENTADAS

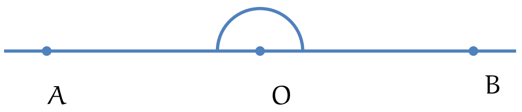
(EEAR-2002) QUESTÃO 1

É falso afirmar:

(a) Se $A\hat{O}B$ é um ângulo raso, então $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas.
(b) Se $A\hat{O}B$ é um ângulo nulo, então $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas.
(c) Dois ângulos adjacentes, cujos lados não comuns são semirretas opostas, somam $180°$.
(d) Dois ângulos adjacentes são sempre consecutivos.

Trata-se de uma questão em que inevitavelmente teremos de analisar alternativa por alternativa. Demos uma olhada então:

Alternativa (a): *Se* $A\hat{O}B$ *é um ângulo raso, então* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *são semirretas opostas.*

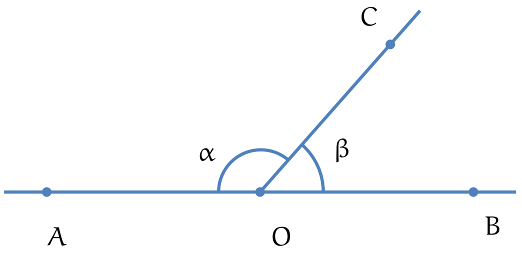


Alternativa verdadeira. Veja que na figura ao lado $A\hat{O}B$ é um ângulo raso, semirretas em oposição. Caso as semirretas não sejam opostas, necessariamente o ângulo não medirá $180°$.

Alternativa (b): *Se* $A\hat{O}B$ *é um ângulo nulo, então* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *são semirretas opostas.*

Alternativa falsa. Acabamos de discutir isso. Se as semirretas que partem do vértice de um ângulo são opostas, então o ângulo é raso, não nulo. Para o ângulo ser nulo, é necessário que as semirretas tenham sentidos iguais, não opostos.

Alternativa (c): *Dois ângulos adjacentes, cujos lados não comuns são semirretas opostas, somam* $180°$.



Alternativa verdadeira. Observe os ângulos da figura ao lado. Veja que os ângulos $\angle AOC$ e $\angle BOC$ são adjacentes (pois são consecutivos e não têm pontos interiores em comum). Veja também que ambos têm as semirretas não comuns opostas, que seriam as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Isso nos diz que $\angle AOB$ é um ângulo raso e portanto $\alpha + \beta = 180°$.

Alternativa (d): *Dois ângulos adjacentes são sempre consecutivos.*

Sim, faz parte da definição de ângulos adjacentes. Para que dois ângulos sejam adjacentes eles têm de ser consecutivos (e não terem pontos interiores em comum). Alternativa verdadeira.

Gabarito: B

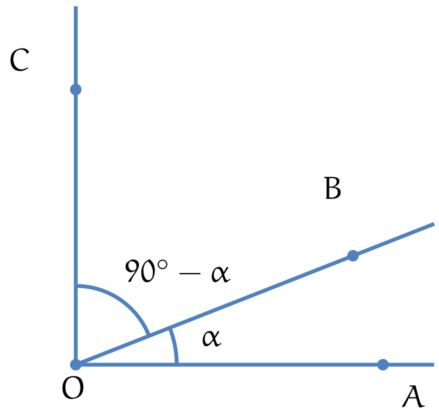
Ângulos complementares

Galera, aqui vai uma convenção que faremos de agora em diante: todas as vezes que forem utilizada expressões como *somar ou subtrair ângulos*, estarei me referindo à *medida* do ângulo. Faço isso pra não ter de falar *medida* todas as vezes em que for me referir a uma operação.

Pois bem, à definição: dois ângulos serão ditos complementares quando somarem $90°$, isto é, quando completarem um ângulo reto. Os ângulos de $20°$ e $70°$ são exemplos de ângulos complementares (pois $20° + 70° = 90°$).

Sejam agora α e β dois ângulos complementares. Então $\alpha + \beta = 90°$, e daí $\beta = 90° - \alpha$.

Isso nos diz que, para calcularmos o complemento de um ângulo α, basta calcularmos $90° - \alpha$.



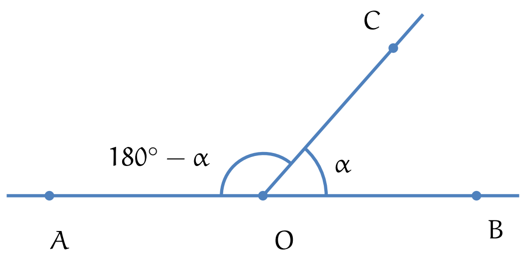
Vemos ao lado a representação de dois ângulos adjacentes complementares: α e $90^\circ - \alpha$. Importante você notar que trata-se de uma relação *simétrica*: podemos dizer que $\angle AOB$ é o complemento de $\angle BOC$ assim como podemos dizer que $\angle BOC$ é o complemento de $\angle AOB$. Em ambos os casos o que importa de fato é que $\angle AOB + \angle BOC = 90^\circ$.

Vale também dizer que 45° é o único ângulo que é complemento de si mesmo. Consegue ver o porquê?

Ângulos suplementares

A definição é quase que a mesma de ângulos complementares. A única diferença é que para os ângulos suplementares a soma deve ser de 180°. Então dois ângulos serão considerados suplementares quando a soma dos dois resultar em um ângulo raso (180°). Como exemplo, vale que 120° e 60° são ângulos suplementares, visto que $120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

Quando dois ângulos α e β são suplementares, vale que $\alpha + \beta = 180^\circ$, como já sabemos. Logo $\beta = 180^\circ - \alpha$. Isso nos diz que quando quisermos calcular o suplemento de α bastará calcularmos $180^\circ - \alpha$. Ao lado vemos a situação padrão de dois ângulos adjacentes suplementares. Como vimos em exercício anterior, as semirretas não comuns são necessariamente opostas ($\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$).



(EEAR-2018) QUESTÃO 2

O complemento do suplemento do ângulo de 112° mede

(a) 18°
(b) 28°
(c) 12°
(d) 22°

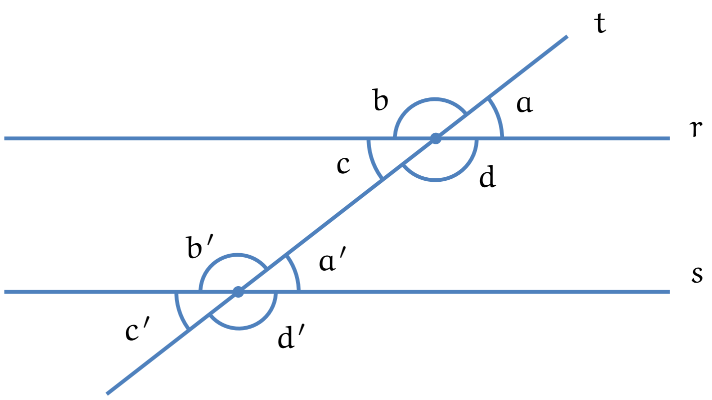
Como queremos calcular o complemento do suplemento, o ideal é primeiro calcularmos o suplemento. O suplemento de $112°$ é $180° - 112° = 68°$. Queremos calcular o complemento desse ângulo. Logo, basta calcularmos $90° - 68° = 22°$.

Gabarito: D

Ângulos replementares

São ângulos que somados resultam em $360°$, como o par $270°$ e $90°$. O replemento de um ângulo α é $360° - \alpha$, inteiramente análogo ao que concluímos anteriormente para ângulos complementares e suplementares. Ângulos replementares então, quando somados, resultam em um ângulo de uma volta.

Ângulos em retas paralelas cortadas por transversal



Alguns ângulos importantíssimos aparecem quando cortamos duas retas paralelas com uma reta transversal. Ao lado, vemos oito ângulos elementares: a, b, c, d, a', b', c' e d'. Começarei agora a atribuir alguns nomes que serão utilizados no decorrer de todas as nossas próximas aulas. Vamos então a esses nomes:

- *Ângulos colaterais internos*: Seriam os ângulos c e d, assim como os ângulos a' e b'. Ambos os pares citados são ângulos colaterais internos. Dizemos que são colaterais porque têm um lado em comum (aquele sobre a reta t). E são internos porque estão dentro da região delimitada pelas retas r e s. Sua característica principal é que são sempre *suplementares*, isto é: $c + d = 180°$ e $a' + b' = 180°$ (podendo ser percebido por análise imediata da figura).

- *Ângulos colaterais externos*: Seriam os ângulos a e b, assim como os ângulos c' e d', análogo ao anterior. Nesse caso são externos porque estão fora da região delimitada pelas retas r e s. Sua característica principal é que são sempre *suplementares*, isto é: $a + b = 180°$ e $c' + d' = 180°$.

- *Ângulos correspondentes*: Há quatro pares de ângulos correspondentes na figura: a e a', b e b', c e c', d e d'. Sua característica principal[4] é que tais pares têm mesmas medidas angulares, isto é: $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ e $d = d'$.

[4]Trata-se de um fato *axiomático*, isto é, não se demonstra. É um fato que é simplesmente aceito, sem a necessidade de justificativas.

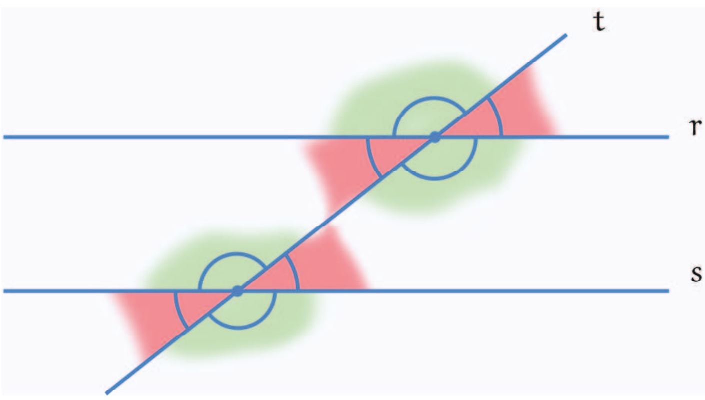
- *Ângulos opostos pelo vértice (OPV)*: Esses são bastante famosos! Há também quatro pares: a e c, b e d, a' e c', b' e d'. Perceba que todos eles são de fato formados pelo mesmo vértice, mas são opostos em relação a ele. A característica mais importante dos ângulos opostos pelo vértice é que têm medidas iguais, assim como os correspondentes. Entendamos o porquê disso. Vejamos por exemplo os ângulos a e c. Como conseguiríamos provar que são, de fato, iguais? Bom, veja que os ângulos a e b são suplementares, e portanto $a + b = 180°$. Daí, $a = 180° - b$. Agora observe os ângulos b e c. São suplementares também, correto? Então, $b + c = 180°$, e portanto, $c = 180° - b$. Logo $a = c$, visto que ambos os ângulos são iguais a $180° - b$. A prova para os outros pares de ângulos OPV se dá de modo análogo.

Isso mesmo! Viu ângulos correspondentes ou opostos pelo vértice, pode dizer que são iguais sem medo de ser feliz! Tome cuidado porém para não sair achando que tudo é OPV ou correspondente, você pode acabar errando. Tem que seguir direitinho a definição que eu te dei, e ter a figura na cabeça. Assim não tem erro. Tranquilo? Vamos dar prosseguimento então!

- *Ângulos alternos internos*: Também super famosos! São os pares c e a', d e b'. Assim como os OPV e os correspondentes, eles também são iguais entre si. Vejamos o porquê. Considere os ângulos c e a'. Por que eles seriam iguais? Então, observe que c e c' são correspondentes. Então, $c = c'$. Mas c' é OPV com a', logo $c' = a'$ e portanto, $c = a'$, provando o que queríamos.

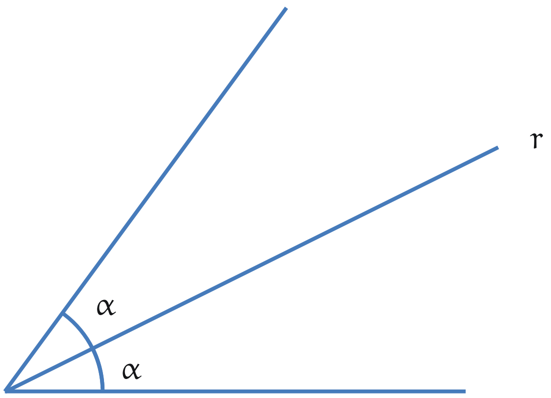
- *Ângulos alternos externos*: Super análogos aos alternos internos. São os pares: a e c', b e d'. São iguais, sempre. As razões são as mesmas para ângulos alternos internos.

Vemos então que, como ilustra a figura ao lado, temos um monte de ângulos iguais. Perceba que os verdes são iguais entre si assim como os vermelhos também são. Tente justifica o porquê desses ângulos serem iguais baseado no que vimos nessa seção; você estudante, se ajudará muito se já souber esses ângulos com a nomenclatura correta, de cabeça. Estarei contando com isso, não se esqueça disso!



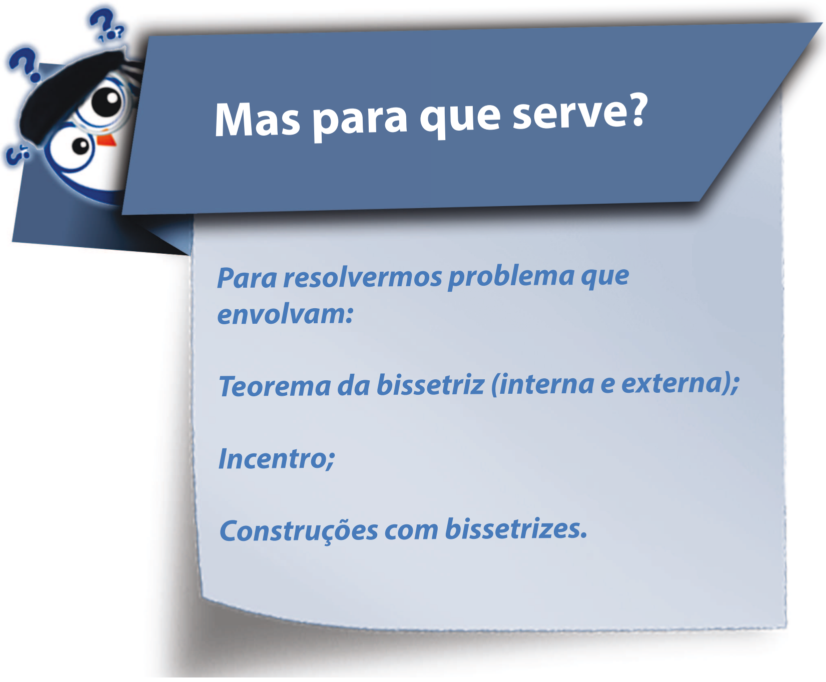
Bissetriz

Rapaz, que definição importante faremos agora. Você, estudante, provavelmente conhece esse nome de algum lugar. Vamos dar uma clareada na definição de bissetriz.



Chamamos de bissetriz a *reta* que divide um ângulo em duas partes de mesmas medidas[5]. Veja, então, a figura ao lado, onde temos a reta r exercendo papel de bissetriz. Veja que ela, de fato, divide o ângulo de seu vértice em duas partes iguais (medindo α).

Por ora, não falaremos muito mais sobre bissetrizes. Porém, posteriormente, essa será uma construção geométrica muito importante. Tenha essa definição na cabeça. Precisaremos muito mesmo dela. Tudo bem, então? Tudo tranquilo?



Declaro então essa parte angular quase finalizada, já já poderemos falar sobre triângulos. Vimos bastante coisa nesse capítulo. Vimos as definições principais de ângulos, algumas classificações, alguns nomes especiais, todos nomes que caem em sua prova. Por fim, veremos a seguir mais duas classificações importantes. Muitas vezes estaremos interessados em se um ângulo tem medida superior ou inferior a um ângulo reto ($90°$). Daí as novas classificações, que daremos agora.

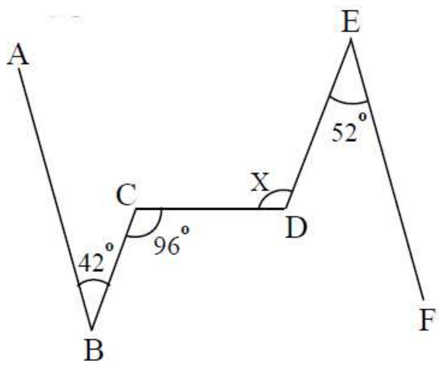
Ângulos agudos e obtusos

Definição super simples: ângulos agudos são ângulos menores que um ângulo de $90°$, enquanto ângulos obtusos são ângulos maiores que um ângulo de $90°$. São termos utilizados com bastante constância, que devemos reconhecer prontamente quando surgirem.

[5] A definição mais precisa de bissetriz é a de que bissetriz é um lugar geométrico. Não entraremos nesse ponto aqui, mas posteriormente será mencionado.

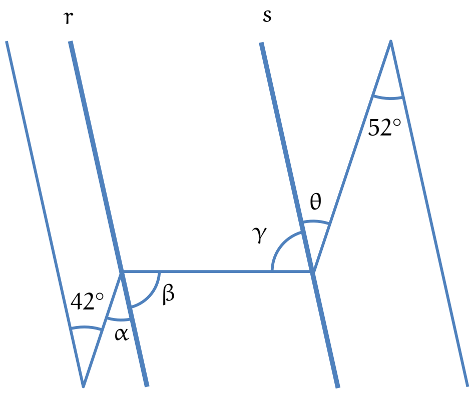
(EEAR-2000) QUESTÃO 3

Na figura $\overline{BA} \parallel \overline{EF}$. A medida de X é:



(a) $105°$
(b) $106°$
(c) $107°$
(d) $108°$

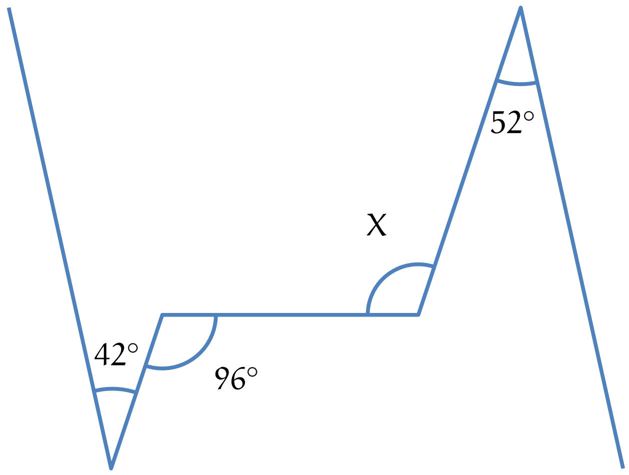
R: Observe a ilustração abaixo.



Da figura que nos foi apresentada, traçamos duas retas paralelas a AB e EF, que seriam as que representei como r e s. Essas duas retas "quebraram" o ângulo de $96°$ em dois pedaços (α e β), e o ângulo X em dois pedaços também (γ e θ). Perceba que α e $42°$ são alternos internos, e portanto $\alpha = 42°$. Mas como $\alpha + \beta = 96°$, temos $42° + \beta = 96°$ e portanto $\beta = 96° - 42° = 54°$. Até aí, tudo beleza?

Veja também que β é alterno interno com γ, e portanto, $\beta = \gamma$. Logo $\gamma = 54°$. Mas veja também que θ e $52°$ também são alternos internos! Portanto $\theta = 52°$ e daí o ângulo pedido, X, vale: $X = \gamma + \theta = 54° + 52° = 106°$.

Aqui vai, porém, uma forma mais **simples** de resolvermos. Resolveremos por meio de um teorema conhecido como **teorema do bico**. Vamos entendê-lo. Observe a figura inicial do problema:



Esse teorema só funciona quando as retas laterais que delimitam a sua figura são paralelas. Nesse caso, o problema de fato afirmou serem paralelas. Então podemos usar o teorema do bico. O teorema do bico diz que se uma *poligonal*[6] for desenhada com extremidades sobre duas retas paralelas, **a soma dos ângulos que olham para um lado será igual à soma dos ângulos que olham para o outro**. Em nossa questão, então, podemos ver que os ângulos $42°$ e X olham para cima enquanto $96°$ e $52°$ olham para baixo. Logo: $42° + X = 96° + 52°$, e portanto $X = 148° - 42° = 106°$.

Gabarito: B

(EAM-2015) QUESTÃO 4

Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 15 horas e 20 minutos?

(a) $12°$

[6] Sequência de segmentos de reta com uma extremidade comum.

(b) 15°
(c) 20°
(d) 30°
(e) 35°

R: Olha. Serei bastante sincero com você, estudante. Esse tipo de questão costuma cair com uma boa frequência em sua prova. Então, inicialmente, vou te dizer um bizu muito forte: existe uma fórmula (tente demonstrar essa fórmula, como exercício) simples que te ajudará a resolver esses problemas super rapidamente! Deixa eu te ensinar a usar.
Suponha que queiramos calcular o menor ângulo θ formado entre os ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, quando este marca H horas e M minutos. Afirmo que a expressão abaixo calcula esse θ em função de H e M:

$$\theta = |30H - 5,5M|.$$

Lindo demais!

Sim, coruja! Só substituir! Sempre que ele te informar as horas e os minutos, substitui na expressão que te passei e pronto. Não precisa ficar fazendo regra de três para verificar quanto o ponteiro das horas andou após tantos minutos. Aqui vai um pequeno porém. Se a questão te pede para calcular, por exemplo, o menor ângulo formado entre os ponteiros das horas e dos minutos às $17:45$, não podemos substituir H por 17. Devemos substituir o H por 5, visto que $17:45$ corresponde às $5:45$ da tarde.

Substituindo, ficamos com $\theta = |30 \cdot 3 - 5,5 \cdot 20| = |90 - 110| = |-20| = 20^\circ$. Veja que $H = 3$ porque $15:20$ corresponde às 3 da tarde.

Gabarito: C

(FUZILEIRO NAVAL-2003) QUESTÃO 5

Qual é o menor ângulo formado pelo ponteiro menor e o ponteiro maior de um relógio analógico quando são exatamente 2 horas e 30 minutos?

(a) $120°$
(b) $110°$
(c) $105°$
(d) $90°$

R: Usando a fórmula que aprendemos na questão anterior, podemos calcular facilmente:

$$\begin{aligned}\theta &= |30H - 5,5M| \\ &= |30 \cdot 2 - 5,5 \cdot 30| \\ &= |60 - 165| \\ &= |-105| \\ &= 105°.\end{aligned}$$

Gabarito: C

(FUZILEIRO NAVAL-2005) QUESTÃO 6

Qual é o menor ângulo formado entre os ponteiros de um relógios quando são exatamente 7 horas?

(a) $210°$
(b) $180°$
(c) $165°$
(d) $150°$
(e) $120°$

R: Novamente, nossa fórmula de cálculo de ângulos entre ponteiros de relógio (apesar de que essa é razoavelmente fácil de se visualizar, mesmo no relógio):

$$\begin{aligned}\theta &= |30H - 5,5M| \\ &= |30 \cdot 7 - 5,5 \cdot 0| \\ &= |210 - 0| \\ &= |210|\end{aligned}$$

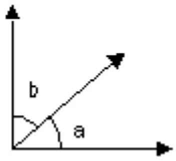
$$= 210^\circ.$$

Como queremos o menor ângulo, basta calcular o replemento de 210°, que é $360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$.

Gabarito: D

■■■(FUZILEIRO NAVAL ADAPTADA-2008) QUESTÃO 7

Determine os ângulos a e b na figura abaixo, sabendo-se que $2b = 3a$ (suponha que os ângulos adjacentes sejam complementares).



(a) $\hat{a} = 36^\circ$ e $\hat{b} = 54^\circ$
(b) $\hat{a} = 36^\circ$ e $\hat{b} = 36^\circ$
(c) $\hat{a} = 28^\circ$ e $\hat{b} = 54^\circ$
(d) $\hat{a} = 62^\circ$ e $\hat{b} = 28^\circ$
(e) $\hat{a} = 28^\circ$ e $\hat{b} = 62^\circ$

R: Como os ângulos são complementares, temos $a + b = 90^\circ$, ou seja, $b = 90^\circ - a$. Mas veja que $2b = 3a$, logo:

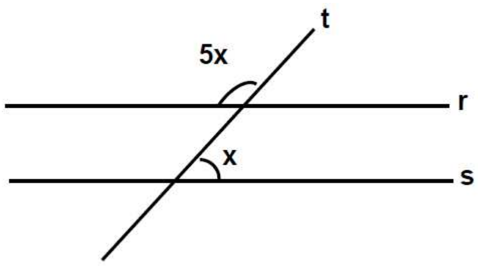
$$\begin{aligned} 2b &= 3a \\ 2 \cdot (90^\circ - a) &= 3a \\ 180^\circ - 2a &= 3a \\ 180^\circ &= 5a \\ a &= 36^\circ. \end{aligned}$$

Então $b = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.

Gabarito: A

(FUZILEIRO NAVAL-2008) QUESTÃO 8

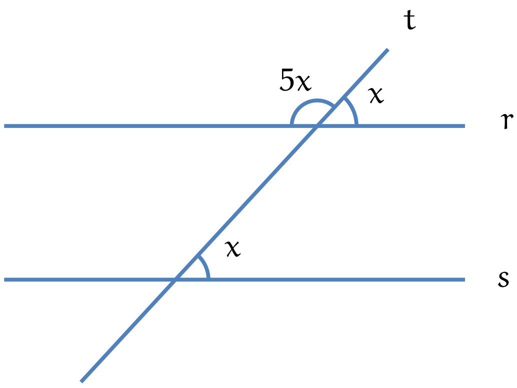
Duas retas paralelas r e s cortadas por uma reta transversal t formam os ângulos indicados na figura abaixo:



Os ângulos $5x$ e x medem, respectivamente

(a) $50°$ e $10°$
(b) $75°$ e $15°$
(c) $145°$ e $35°$
(d) $100°$ e $20°$
(e) $150°$ e $30°$

R: Vejamos a seguir como podemos transferir um ângulo para nos ajudar:



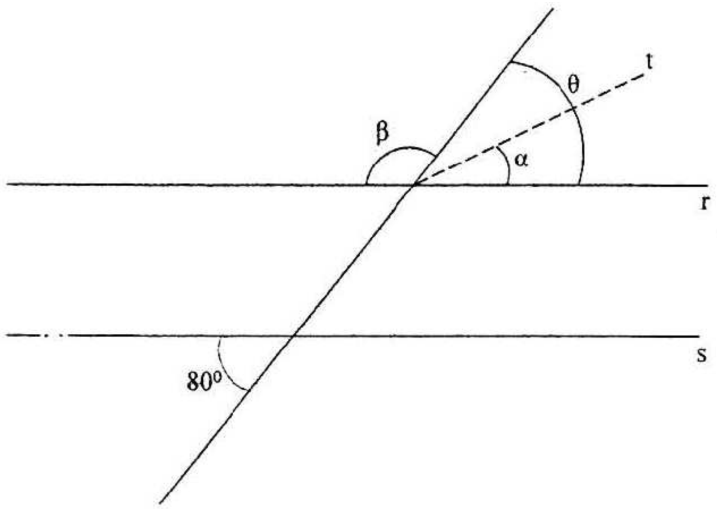
Vemos então que:

$$x + 5x = 180°$$
$$6x = 180°$$
$$x = 30°.$$

Então os ângulos $5x$ e x medem, respectivamente, $150°$ e $30°$.

Gabarito: E

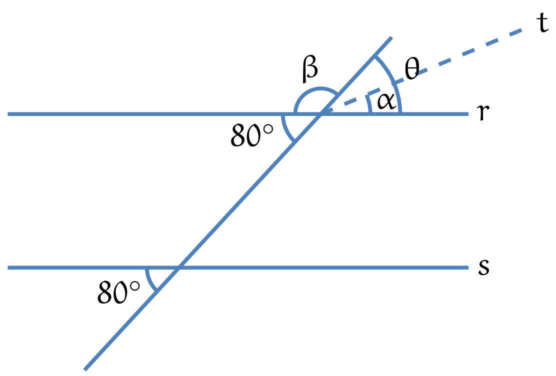
(FUZILEIRO NAVAL-2008) QUESTÃO 9



Sabendo-se que as retas r e s da figura acima são paralelas e que a reta t é a bissetriz do ângulo θ, quais são os valores de α e β, respectivamente?

(a) $100°$ e $40°$
(b) $80°$ e $40°$
(c) $50°$ e $100°$
(d) $40°$ e $80°$
(e) $40°$ e $100°$

R: Veja que, após a transferência dos ângulos, temos $\beta = 180° - 80° = 100°$:

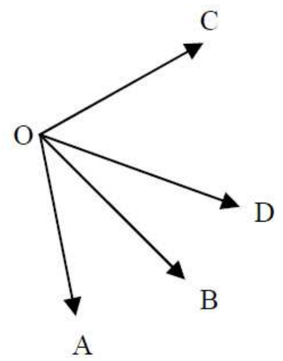


Como t é bissetriz, temos $\theta = 2\alpha$, que é oposto pelo vértice com $80°$; logo $2\alpha = 80°$ e portanto $\alpha = 40°$. Logo $\alpha = 40°$ e $\beta = 100°$.

Gabarito: E

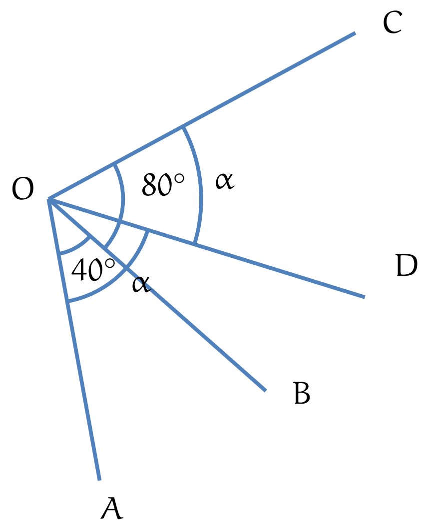
(FUZILEIRO NAVAL-2011) QUESTÃO 10

Na figura abaixo, traçamos as semi-retas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$. Sabe-se que $A\hat{O}B = 40°$ e $B\hat{O}C = 80°$. Calcule a medida do ângulo $A\hat{O}D$, em graus, sendo $\overrightarrow{OD}$ bissetriz de $A\hat{O}C$ e marque a opção correta.



(a) 98
(b) 74
(c) 65
(d) 60
(e) 45

R: Questão que pode ficar bastante complicada sem um desenho. Vamos marcar os ângulos:



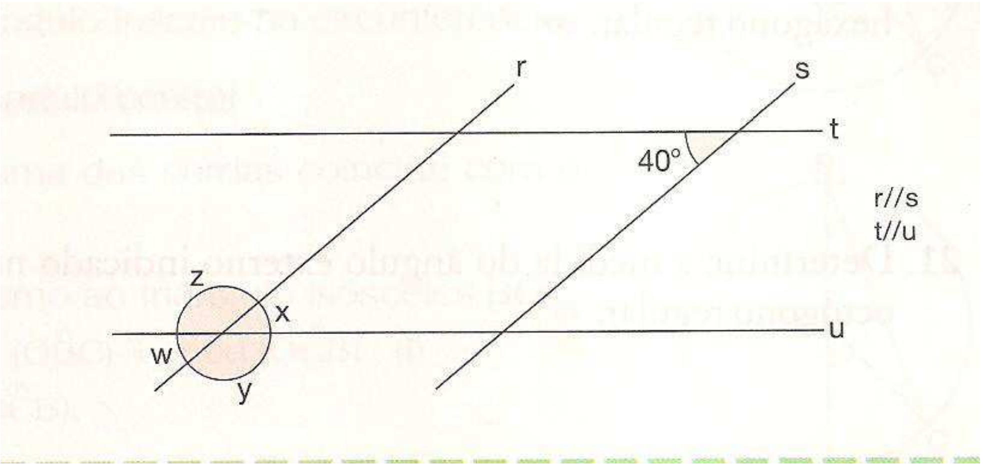
Veja que OD sendo bissetriz de $\angle AOC$, e chamando $\angle AOB$ de α, temos $\angle COD$ igual a α também. Então temos que:

$$\alpha + \alpha = 40^\circ + 80^\circ$$
$$2\alpha = 120^\circ$$
$$\alpha = 60^\circ.$$

Gabarito: D

(FUZILEIRO NAVAL-2015) QUESTÃO 11

Determine as medidas dos ângulos z, w, x e y.



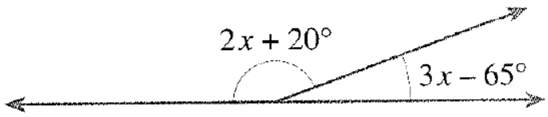
(a) $40^\circ, 180^\circ, 40^\circ$ e 10°.
(b) $40^\circ, 140^\circ, 40^\circ$ e 140°.
(c) $140^\circ, 60^\circ, 140^\circ$ e 60°.
(d) $140^\circ, 40^\circ, 40^\circ$ e 140°.
(e) $180^\circ, 90^\circ, 30^\circ$ e 60°.

R: Questão muito importante porém bastante simples. Já seu pra você ver como essa figura é importante, correto, jovem? Estude bastante essa imagem de duas retas paralelas cortadas por transversais, reitero! Vamos lá. Veja que w é correspondente com 40°, e portanto, $w = 40^\circ$. Já o ângulo x é oposto pelo vértice com w; portanto $x = w = 40^\circ$. Já z é colateral com x, e portanto $z = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Finalmente, y é oposto pelo vértice com z e portanto $y = z = 140^\circ$. Logo $z = 140^\circ$, $w = 40^\circ$, $x = 40^\circ$ e $y = 140^\circ$.

Gabarito: D

(FUZILEIRO NAVAL-2018) QUESTÃO 12

Na figura abaixo, a medida do complemento do menor ângulo é:



(a) 110°
(b) 70°
(c) 45°
(d) 20°
(e) 10°

R: Visto que os dois ângulos são suplementares, temos:

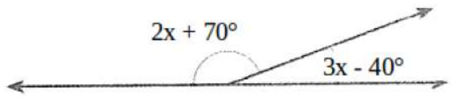
$$3x - 65° + 2x + 20° = 180°$$
$$5x - 45° = 180°$$
$$5x = 225°$$
$$x = 45°$$

O menor ângulo é $3x - 65° = 3 \cdot 45° - 65° = 70°$, e seu complemento é $90° - 70° = 20°$.

Gabarito: D

(FUZILEIRO NAVAL-2019) QUESTÃO 13

Na figura abaixo, a medida do suplemento do menor ângulo é:



(a) 120°
(b) 130°
(c) 132°
(d) 135°
(e) 140°

R: Questão quase que idêntica à do ano anterior. Visto que os dois ângulos são suplementares, temos:

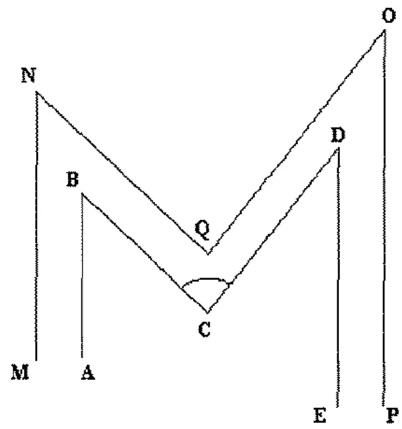
$$\begin{aligned} 3x - 40^\circ + 2x + 70^\circ &= 180^\circ \\ 5x + 30^\circ &= 180^\circ \\ 5x &= 150^\circ \\ x &= 30^\circ \end{aligned}$$

O menor ângulo é $3x - 40^\circ = 3 \cdot 30^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, e seu suplemento é $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Gabarito: B

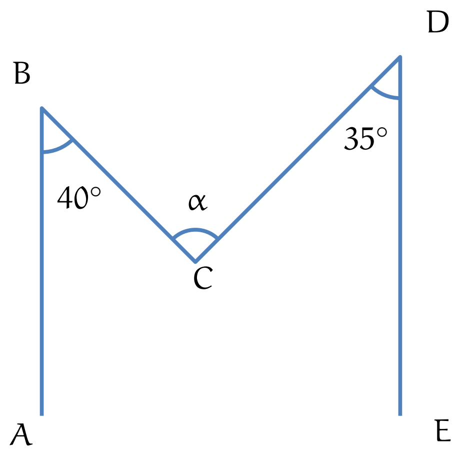
(EAM-2004) QUESTÃO 14

Na figura, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ são respectivamente paralelos aos segmentos $\overline{MN}$, $\overline{NQ}$, $\overline{QO}$, $\overline{OP}$, o ângulo $P\hat{O}Q = 35^\circ$ e $A\hat{B}C = 40^\circ$. O valor do ângulo $B\hat{C}D$ é:



(a) 35°
(b) 40°
(c) 50°
(d) 55°
(e) 75°

R: Usaremos novamente o teorema do bico! Vejamos a sua utilidade aqui:



Veja que os dois ângulos "olhando para baixo" somam $40° + 35° = 75°$. Visto que só tem um ângulo "olhando para cima", só pode medir sozinho $75°$.

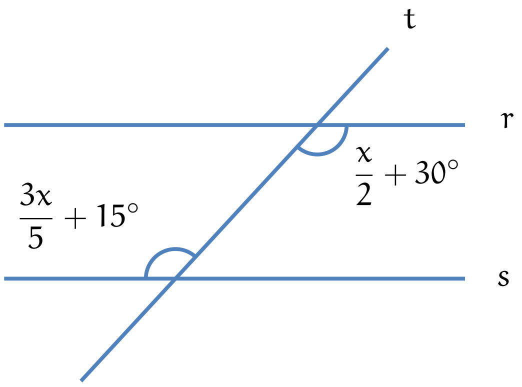
Gabarito: E

(EAM-2012) QUESTÃO 15

Duas retas paralelas r e s são cortadas por uma reta transversal t, formando, no mesmo plano, dois ângulos obtusos alternos internos que medem $\frac{x}{2} + 30°$ e $\frac{3x}{5} + 15°$. Então o suplemento de um desses ângulos mede

(a) $75°$
(b) $80°$
(c) $82°$
(d) $85°$
(e) $88°$

R: Está aí uma questão que nem precisávamos desenhar. Digo isso porque se são alternos internos, necessariamente são iguais, já podemos simplesmente igualar. Mas por quês de completude, vejamos a figura formada:



Resolvendo a equação entre os dois ângulos:

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{5} + 15° &= \frac{x}{2} + 30° \\
\frac{3x}{5} - \frac{x}{2} &= 30° - 15° \\
\frac{6x - 5x}{10} &= 15° \\
\frac{x}{10} &= 15° \\
x &= 15° \times 10 = 150°.
\end{aligned}$$

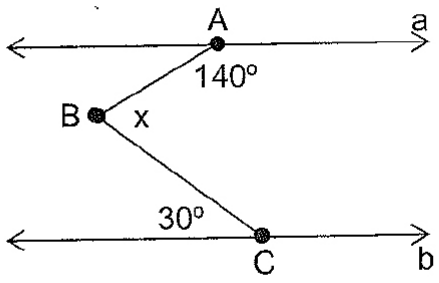
Como desejamos saber o suplemento de um dos ângulos obtudos, devemos primeiro encontrá-lo. Como já sabemos o valor de x, basta substituir o valor em um dos ângulos (tanto faz qual, são iguais). Escolherei $\frac{x}{2} + 30°$:

$$\frac{x}{2} + 30^\circ = \frac{150}{2} + 30^\circ$$
$$= 75^\circ + 30^\circ$$
$$= 105^\circ\text{, cujo suplemento é } 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

Gabarito: A

(EAM-2013) QUESTÃO 16

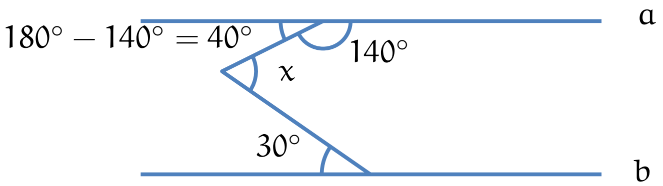
Observe a figura abaixo.



Sabendo que a reta a é paralela à reta b, pode-se afirmar que, a partir dos dados da figura acima, o valor do ângulo x é igual a

(a) 10°
(b) 30°
(c) 50°
(d) 70°
(e) 100°

R: Temos outra aplicação direta do Teorema do Bico. Veja como é recorrente o seu uso na resolução de questões! Vejamos a figura para análise:



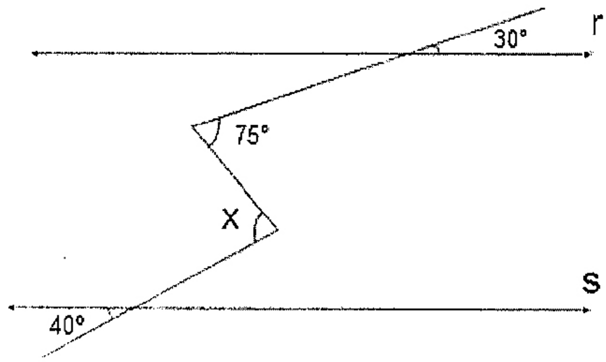
Usando o Teorema do Bico:

$$
\begin{aligned}
x &= 40^\circ + 30^\circ \\
&= 70^\circ.
\end{aligned}
$$

Gabarito: D

(EAM-2017) QUESTÃO 17

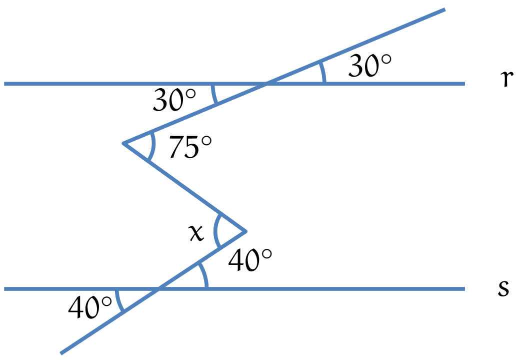
Observe a figura a seguir.



Sabendo que, na figura acima, as retas r e s são paralelas, é correto afirmar que o valor de x é igual a:

(a) 90°
(b) 85°
(c) 80°
(d) 75°
(e) 70°

R: E adivinha? Outra questão sobre o Teorema do Bico! Veja então, jovem, que é muito bizu pra você entender e deixar que esse teorema seja cada vez mais natural para você. Não deixe de entendê-lo e de refazer essas questões. Estarão no seu exame! Vamos à questão, redesenhando a figura:



A soma dos ângulos "olhando para a direita" deve ser igual à soma dos ângulos "olhando para a esquerda" (entre as retas paralelas), logo:

$$x + 30° = 75° + 40°$$
$$x = 75° + 40° - 30°$$
$$x = 85°.$$

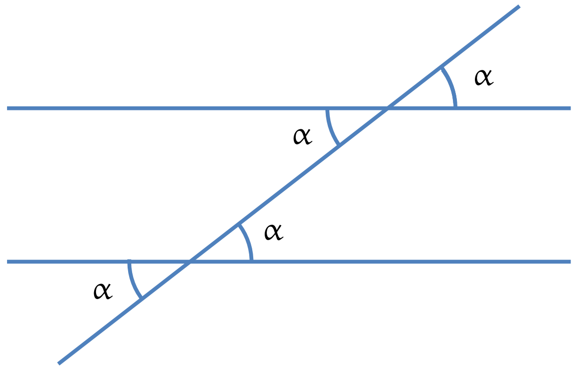
Gabarito: B

(EEAR-2002) QUESTÃO 18

Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, de modo que a soma dos ângulos agudos formados vale $144°$. Então a diferença entre as medidas de um ângulo obtuso e de um agudo é

(a) $85°$
(b) $92°$
(c) $108°$
(d) $116°$

R: Desenhar uma boa figura nessa questão é essencial. Não fique tentando fazer de cabeça, não. Mesmo que consiga, não é esse o propósito aqui. Vamos então dar uma olhada na figura que resolve esse exercício.



Como são quatro ângulos agudos que somam $144°$, temos:

$$\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 144°$$
$$4\alpha = 144°$$
$$\alpha = 36°.$$

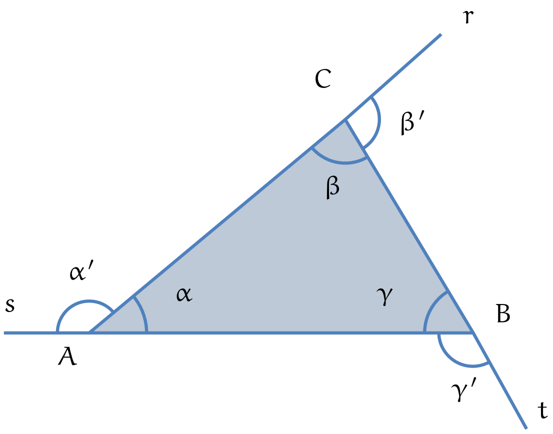
O suplemento de $36°$ é o ângulo $180° - 36° = 144°$. Daí a diferença entre o ângulo obtuso e o agudo é: $144° - 36° = 108°$.

Gabarito: C

3.0– TRIÂNGULOS

3.1– ELEMENTOS FUNDAMENTAIS

Eis então que começamos a falar das figuras mais importantes de toda a geometria plana: os triângulos.



Triângulos são a forma mais simples de *polígonos*, figuras que posteriormente discutiremos de modo mais geral. Essencialmente o que devemos entender agora é que triângulo é a figura formada e determinada por três segmentos de reta com vértices mutuamente compartilhados. Ao lado vemos um triângulo com todos os seus elementos mais importantes. Falaremos a seguir de cada um deles, explicando os seus funcionamentos, suas definições, e suas propriedades mais importantes. Devemos tomar muito cuidado com essas definições, apesar desse assunto ser relativamente fácil. Vamos lá!

- *Vértices*: são os pontos não-colineares A, B e C. Um triângulo, como pode ser percebido, sempre têm três vértices.
- *Lados*: são os segmentos de reta com extremidades nos vértices. Essa definição somente é válida para triângulos. Polígonos com mais de três lados serão vistos nas próximas aulas. Em nossa figura, são lados os segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. As retas r, s e t são as *retas suportes* desses lados.
- *Ângulos internos*: São os ângulos internos ao triângulo formados pelos seus lados. Em nossa figura, seriam: α, β e γ.
- *Ângulos externos*: São os ângulos suplementares adjacentes aos ângulos internos do triângulo. Em nossa figura, seriam: α', β' e γ'.
- *Região triangular*: É o subconjunto do plano delimitado pelos lados. Na figura, seria a região azulada interior ao triângulo.

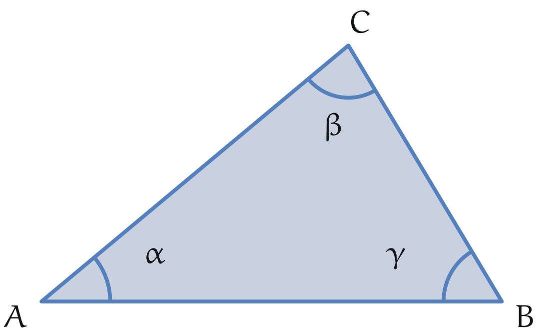
Perceba então que existem dois tipos de ângulos em triângulos: os ângulos externos e os ângulos internos. Eles são suplementares adjacentes, vê isso nas figuras?

Isso mesmo! Se você sabe o valor de um deles, o outro será com certeza o suplementar desse valor. Isso vale não só para triângulos, mas para polígonos quaisquer, como veremos nas aulas seguintes. Veremos que existem diversos atalhos para acharmos ângulos que dependem justamente dessa noção. Excelente!

Falado disso, vamos dar uma olhada agora no teorema angular mais importante de toda a geometria plana, sem sombra de dúvidas.

3.2– Relações angulares em triângulos

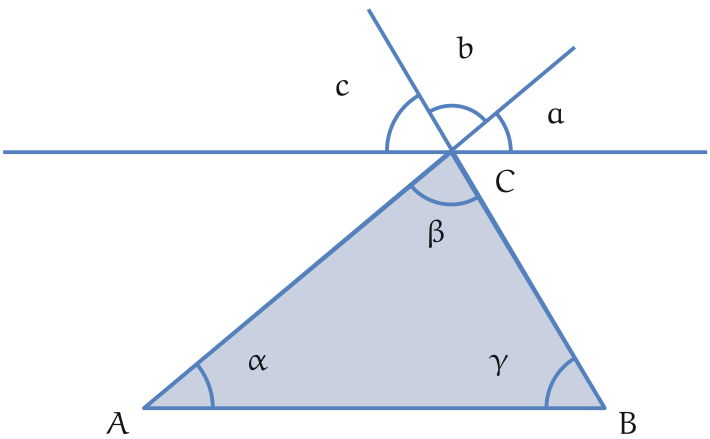
Soma dos ângulos internos



Observe o triângulo ao lado. Suponha que desejemos calcular $\alpha+\beta+\gamma$. Como podemos prosseguir para encontrarmos um resultado de fato?

Pois bem, esse é, como já dito, um dos teoremas mais importantes de toda a geometria e sem sombra de dúvidas é pelo menos o angular mais importante. Vamos mostrar a seguir que essa soma *sempre é igual a* $180°$.

Trace, passando por C, uma paralela a $\overline{AB}$, como ilustra a figura ao lado. Prolongue também os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Veja que formaram-se os ângulos a, b e c naturalmente, e veja que $a+b+c=180°$.

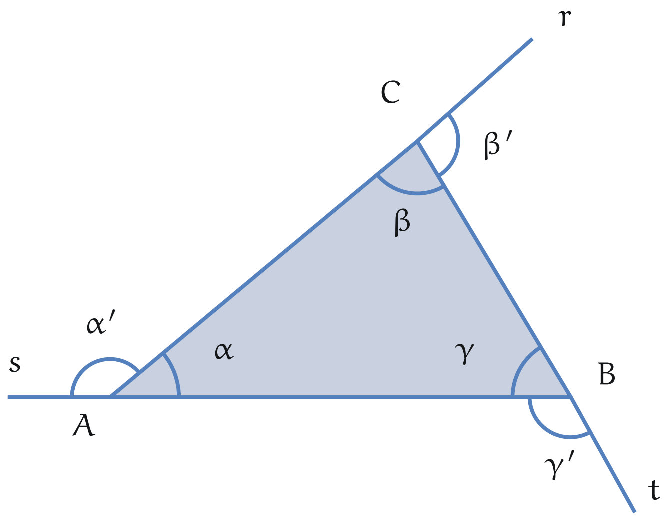


Mas veja também que a e α são *ângulos correspondentes*, assim como c e γ. Logo $a=\alpha$ e $c=\gamma$. Visto que b e β são OPV, temos finalmente que $b=\beta$ e portanto $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

Portanto:

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a $180°$.

Soma dos ângulos internos não-adjacentes



Olhemos novamente a nossa figura inicial. Veja que $\alpha' + \alpha = 180°$, e portanto $\alpha' = 180° - \alpha$. Certo, mas também sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, e portanto $\beta + \gamma = 180° - \alpha$. Ora se tanto α' quanto $\beta + \gamma$ são iguais a $180° - \alpha$, então $\alpha' = \beta + \gamma$. Veja que β e γ são justamente os ângulos internos de $\triangle ABC$ (triângulo ABC) que *não são adjacentes* a α'. Então, é sempre verdade que um ângulo externo qualquer de um triângulo será sempre a soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes àquele ângulo externo. Para esse triângulo, por exemplo, podemos dizer que: $\alpha' = \beta + \gamma$, $\beta' = \alpha + \gamma$ e $\gamma' = \alpha + \beta$. Essa propriedade é um grande atalho para a resolução de questões diversas. Veremos nos exercícios.

3.3– Condição de existência e classificações

Imagine três medidas para os lados de um triângulo. Sério mesmo, imagine. Imagine três números positivos e assuma que esses números sejam as medidas dos lados de um triângulo.

Muito bem, a pergunta é: será que esse triângulo que você imaginou existe? Será que existe um triângulo com lados $7, 9$ e 11? Ou $11, 20, 35$? Para analisarmos essas condições, devemos utilizar o que chamamos de *condição de existência triangular*. Vamos então ao conceito.

Para que um triângulo exista, basta que a soma de dois lados quaisquer *sempre supere o terceiro*. isso nos diz, por exemplo, que existe o primeiro triângulo sugerido, de lados $7, 9$ e 11; isso porque a soma de quaisquer dois lados superará o restante. Veja que $7 + 9 = 16$, que supera 11; $7 + 11 = 18$, que supera 9; e $9 + 11 = 20$, que supera 7.

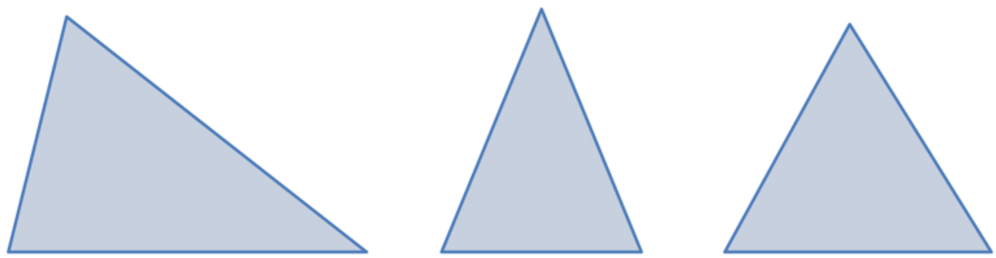
Porém, o mesmo não acontece com o hipotético triângulo de lados $11, 20$ e 35. Veja que $11 + 20 = 31$, que *não supera* 35. Logo, tal triângulo não existe.

Muito bem resumido! Sim, esse é o teste que sempre fazemos para verificar se um triângulo existe ou não. Algebricamente falando, podemos dizer que dado um triângulo de lados a, b e c, sempre deve acontecer $a + b > c$ para que o triângulo exista. Excelente, vamos que vamos!

Existem algumas classificações de triângulos que merecem a nossa atenção. Vamos a elas.

TOME NOTA!

QUANTO AOS LADOS



TRIÂNGULO ESCALENO

Todos os lados com medidas diferentes.

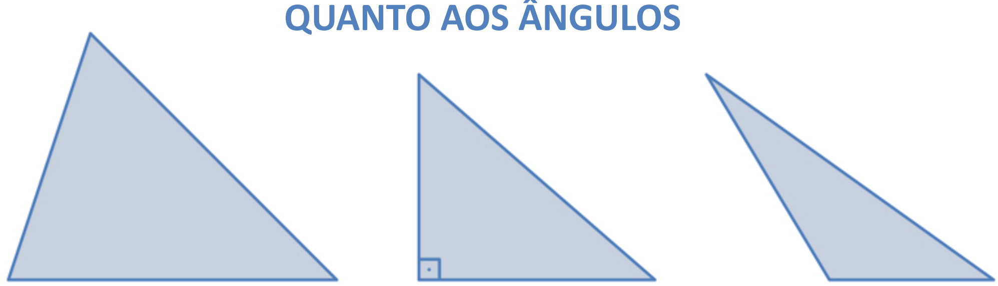
TRIÂNGULO ISÓSCELES

Dois lados com mesmas medidas.

TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Todos os lados com mesmas medidas.

QUANTO AOS ÂNGULOS



TRIÂNGULO ACUTÂNGULO

Todos os ângulos agudos.

TRIÂNGULO RETÂNGULO

Um ângulo reto.

TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO

Um ângulo obtuso.

Essas classificações, acho que não preciso nem falar, são extremamente recorrentes em exercícios diversos.

QUESTÕES COMENTADAS

(EEAR-2002) QUESTÃO 19

Coloque V ou F conforme as afirmações sejam verdadeiras ou falsas:

( ) Dois ângulos adjacentes são suplementares.

( ) Dois ângulos que têm o mesmo complemento são congruentes.

( ) Dois ângulos suplementares são adjacentes.

( ) Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles.

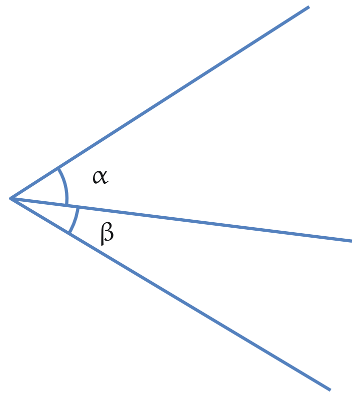
( ) Um triângulo retângulo é escaleno.

Assinale a seqüência correta.

(a) F - V - F - V - V
(b) F - V - V - V - F
(c) F - V - F - V - F
(d) F - F - V - V - F

R: Comentemos afirmativa por afirmativa.

- *Dois ângulos adjacentes são suplementares:* Não necessariamente. Temos de tomar muito cuidado com essas afirmações categóricas assim, porque elas são generalizantes. Temos de tomar cuidado com essas generalizações, podem esconder uma baita de uma pegadinha. Bom, se lembra do conceito de ângulo adjacente? E de ângulos suplementares? Pois bem, construa um e outro na sua cabeça. Agora pense: necessariamente ser adjacente implica em ser suplementar? Vamos dar uma olhada. Observe a figura a seguir:



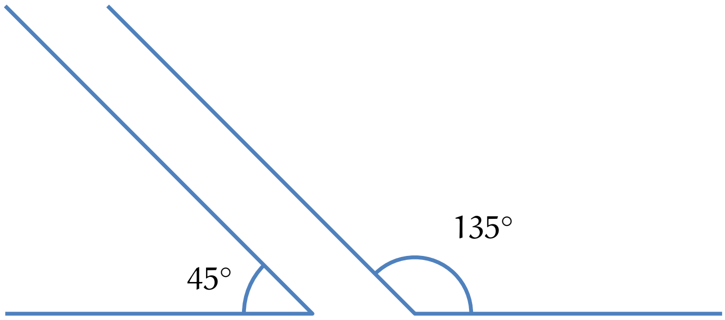
Veja que os ângulos α e β são adjacentes, de fato, mas *não são suplementares*. Como conseguimos encontrar um contra-exemplo que quebra a afirmação feita, ela é falsa. Não podemos generalizar da forma que ele fez.

- *Dois ângulos que têm o mesmo complemento são congruentes:* Vamos dar um nome para esses dois ângulos: α e β. É dito que eles têm o mesmo complement. O complemento de α é $90^\circ - \alpha$, enquanto o complemento de β é $90^\circ - \beta$. Vamos então dar a condição de igualdade e ver no que dá:

$$
\begin{aligned}
90^\circ - \alpha &= 90^\circ - \beta \\
\cancel{90^\circ} - \alpha &= \cancel{90^\circ} - \beta \\
-\alpha &= -\beta \\
-\alpha &= -\beta \\
\alpha &= \beta.
\end{aligned}
$$

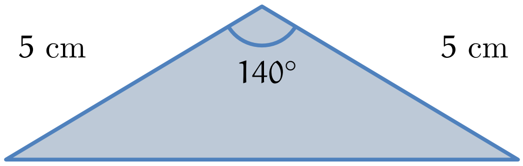
Concluímos disso que, de fato, caso os complementos de α e β sejam iguais, seus complementos também serão.

- *Dois ângulos suplementares são adjacentes:* Não necessariamente. Novamente aqui ele faz uma generalização. E novamente aqui eu peço que você, estudante, procure imaginar a comdicional que ele criou. Será que é verdade? Será que dois ângulos suplementares são sempre, necessariamente, adjacentes? Você consegue criar na sua cabeça a imagem de dois ângulos adjacentes que não o sejam? Se você conseguir, achou um contra-exemplo e pode concluir que a afirmativa é falsa. Mas caso não tenha conseguido, não se preocupe. Estou aqui para ajudar você. Vem comigo e observa a figura a seguir.

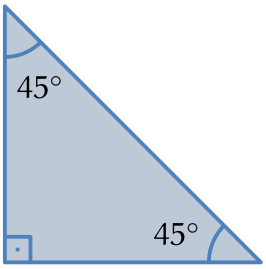


Esses ângulos são, de fato, suplementares, pois $45° + 135° = 180°$. Mas não são adjacentes, pois não compartilham uma mesma semirreta como lado.

- *Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles:* Sim, verdadeiro! Observe a figura abaixo e constate por si mesmo um exemplo de triângulo obtusângulo isósceles.



- *Um triângulo retângulo é escaleno:* Não necessariamente. Observe abaixo um triângulo retângulo isósceles, por exemplo (todos os outros, porém, são necessariamente escalenos sim; esse é o único contra-exemplo).



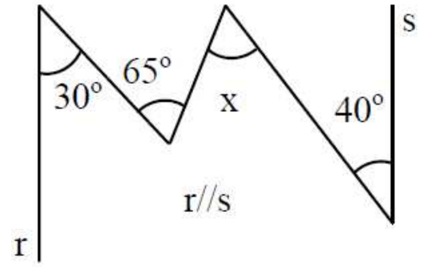
Trata-se de um triângulo retângulo que não é escaleno, falsificando portanto a afirmativa.

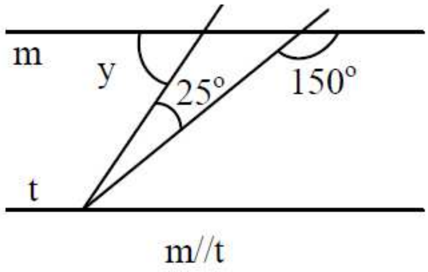
Baseando-nos nas conclusões que fizemos, temos **F V F V F**.

Gabarito: C

(EEAR-2003) QUESTÃO 20

Observando as figuras abaixo, o valor, em graus, de $x - y$ é



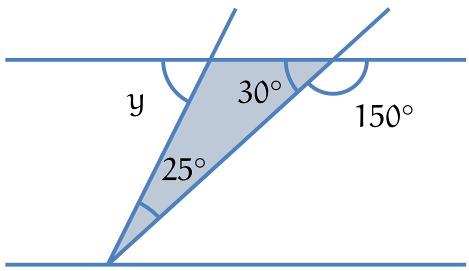


(a) 25
(b) 20
(c) 15
(d) 10

R: Na primeira figura, basta usarmos o Teorema do Bico, visto que as retas r e s são paralelas. Os ângulos "olhando para cima" são: $65°$ e $40°$; os ângulos "olhando para baixo" são $30°$ e x. Logo:

$$30° + x = 65° + 40°$$
$$x = 65° + 40° - 30°$$
$$x = 75°.$$

Na segunda figura, observe que temos um triângulo.

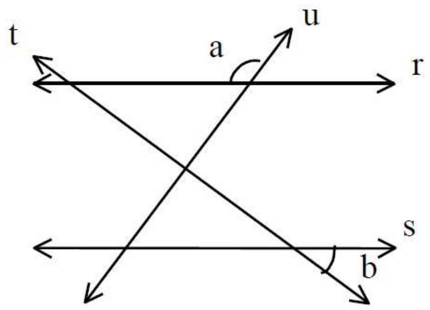


Já coloquei aquele angulo de $30°$ adjacente suplementar ao de $150°$, calculado a partir de $180° - 150° = 30°$. Agora, é útil reconhecermos que y é um *ângulo externo* ao triângulo azul. Lembre-se então que o ângulo externo é a *soma dos externos não-adjacentes*. Portanto, $y = 30° + 25° = 55°$. Como o problema pede o valor de $x - y$, temos finalmente o resultado $75° - 55° = 20°$.

Gabarito: B

(EEAR-2003) QUESTÃO 21

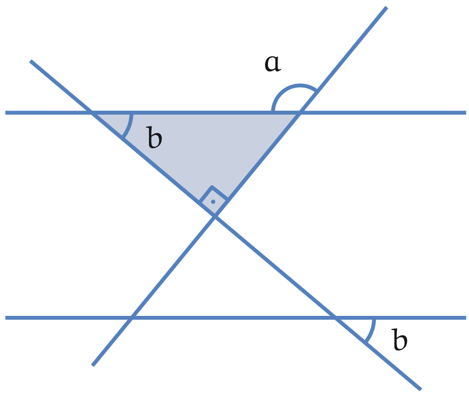
Na figura, $r \parallel s$ e $t \perp u$.



O valor de $a - b$ é

(a) $100°$
(b) $90°$
(c) $80°$
(d) $70°$

R: Essa é uma excelente questão para integrarmos nossas teorias angulares e triangulares. Mas antes, um recado para o estudante. Você talvez esteja perguntando e questionando-se quanto a: *mas cadê as questões da CFN?* Jovem, não fique se fazendo essa pergunta. O concurso da CFN apenas não cobra o assunto diretamente, mas ele é necessário. Daí utilizo questões com similaridade e que envolvam o conteúdo técnico para o seu aprendizado. Pare imediatamente com esses questionamentos e não os deixem perpetuar. Essa perpetuidade é nociva. Confie no trabalho que estamos fazendo. No final você só terá a se surpreender com a rapidez e consigo. Agora, à resolução.
Observe a figura com um dos triângulos destacados:



Veja que já trouxe o ângulo b para o seu *correspondente* interno ao triângulo. Novamente, vê como a é um ângulo externo ao triângulo? Lembra que um ângulo externo de um triângulo é sempre a soma dos internos não-adjacente àquele ângulo? Pois bem, isso vale para qualquer triângulo certo? Então lógico que também serve para o da figura, e portanto:

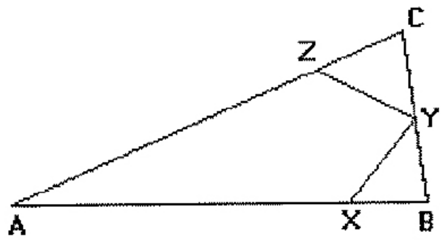
$$a = b + 90^\circ$$
$$a - b = 90^\circ.$$

Gabarito: B

Isso se chama *cartear*, coruja! E não, não basta apenas acertar, porque se seus estudos forem guiados dessa forma, pode ser que em algum momento você dê um tiro no pé. Faça sempre pela técnica. Sempre! A técnica é o caminho para o acerto direto. Cartear é a técnica para o acerto na sorte. E se formos depender de sorte, melhor começar carreira de apostador de loteria, correto? Aqui não tem carteado não, é técnica seguida de boa ordenação. Agora vá estudar!

Façamos agora algumas questões do concurso da CFN. Veja como são parecidas com as que costumo iniciar a bateria de exercícios. Vamos dar uma olhada.

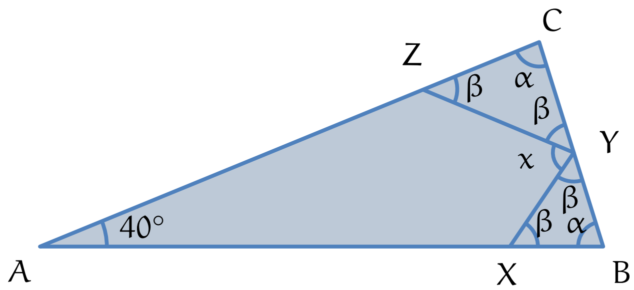
(EAM-2005) QUESTÃO 22



Na figura acima, $AB = AC$, $BX = BY$ e $CZ = CY$. Se o ângulo A mede $40°$, quanto mede o ângulo XYZ?

(a) $40°$
(b) $50°$
(c) $60°$
(d) $70°$
(e) $90°$

R: Na figura, podemos concluir um monte de coisas. Vamos na ordem. A primeira é que, como $AB = AC$, os ângulos $\angle ACB$ e $\angle ABC$ são iguais (vou chamá-los de α). Também, $BX = BY$, e portanto $\angle BYX = \angle BXY$. Analogamente $\angle CYZ = \angle CZY$. Como os triângulos CZY e BXY são semelhantes, podemos chamar esses ângulos iguais de β, obtendo a seguinte figura:



Daí, como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo resulta em $180°$, temos, no triângulo ABC:

$$40° + \alpha + \alpha = 180°$$
$$2\alpha = 180° - 40°$$
$$2\alpha = 140°$$
$$\alpha = 70°.$$

Temos de tomar muito cuidado, coruja, quando estamos resolvendo uma questão e achamos um valor ou um resultado que coincide com uma das alternativas. O cuidado que devemos ter é: será que, de fato, isso é o que ele está pedindo? Vejamos. De acordo com a nomenclatura que usei na figura anterior, e vendo que no enunciado ele pede o valor do ângulo $\angle XYZ$, queremos calcular o ângulo x. Concorda? Então, não acabamos a questão ainda, visto que calculamos apenas α e não x. então, nada de precipitações, coruja! Continuemos as contas.

Visto que já calculamos α, podemos calcular β. Podemos fazer isso somando os ângulos internos de $\triangle CZY$ (ou $\triangle BXY$, tanto faz). Temos:

$$\begin{aligned}
\beta + \alpha + \beta &= 180^\circ \\
\beta + \overset{70^\circ}{\cancel{\alpha}} + \beta &= 180^\circ \\
2\beta + 70^\circ &= 180^\circ \\
2\beta &= 180^\circ - 70^\circ \\
2\beta &= 110^\circ \\
\beta &= 55^\circ
\end{aligned}$$

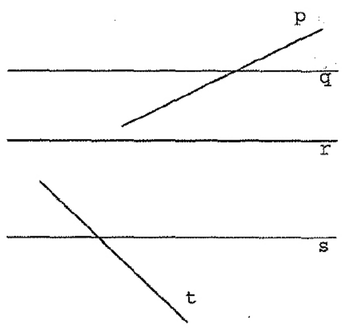
Por fim, observemos que, em Y, temos três ângulos formando um ângulo raso. Somando-os:

$$\begin{aligned}
\beta + x + \beta &= 180^\circ \\
x &= 180^\circ - 2\beta \\
x &= 180^\circ - 2\overset{55^\circ}{\cancel{\beta}} \\
x &= 180^\circ - 2 \cdot 55^\circ \\
x &= 180^\circ - 110^\circ \\
x &= 70^\circ.
\end{aligned}$$

Gabarito: D

(EAM ADAPTADA-2006) QUESTÃO 23

Observe a figura abaixo:



Dados: q paralelo a r paralelo a s; p perpendicular a t; e $25°$ é o menor ângulo que a reta p forma com a reta q.

Com os dados apresentados, é correto afirmar que um dos ângulos que a reta t forma com a reta s é igual a

(a) $55°$

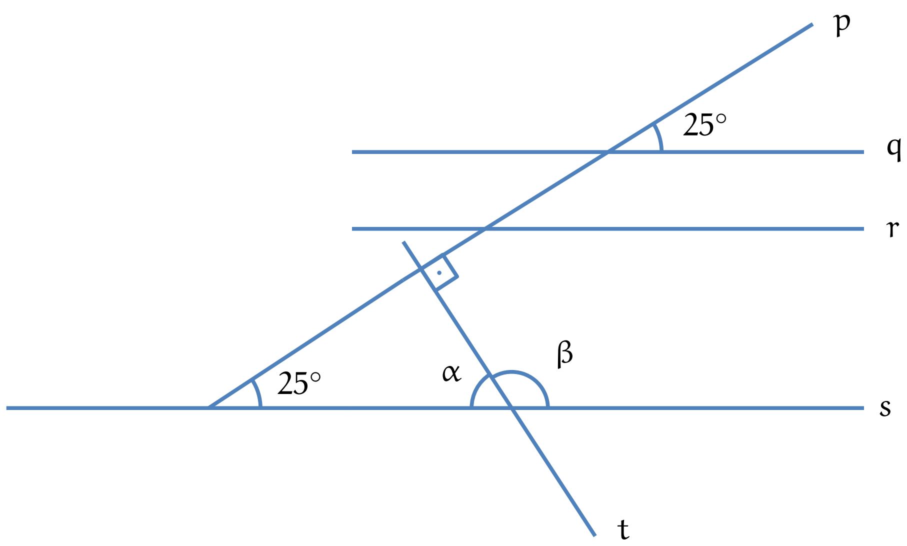
(b) $75°$

(c) $85°$

(d) $110°$

(e) $115°$

R:

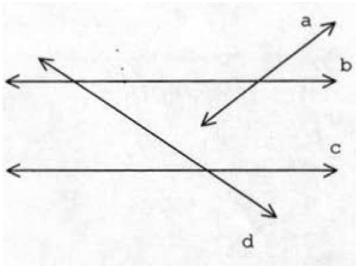


Acima, prolonguei as retas p e s até que se encontrassem. Veja que os ângulos de $25°$ são correspondentes, e por isso iguais. Daí, no triângulo formado, podemos afirmar que $\alpha + 25° = 90°$ e portanto $\alpha = 90° - 25° = 65°$. Como não se encontra dentre as alternativas, o ângulo desejado é seu suplementar $\beta = 180° - 65° = 115°$.

Gabarito: E

(EAM ADAPTADA-2007) QUESTÃO 24

Observe a figura abaixo:

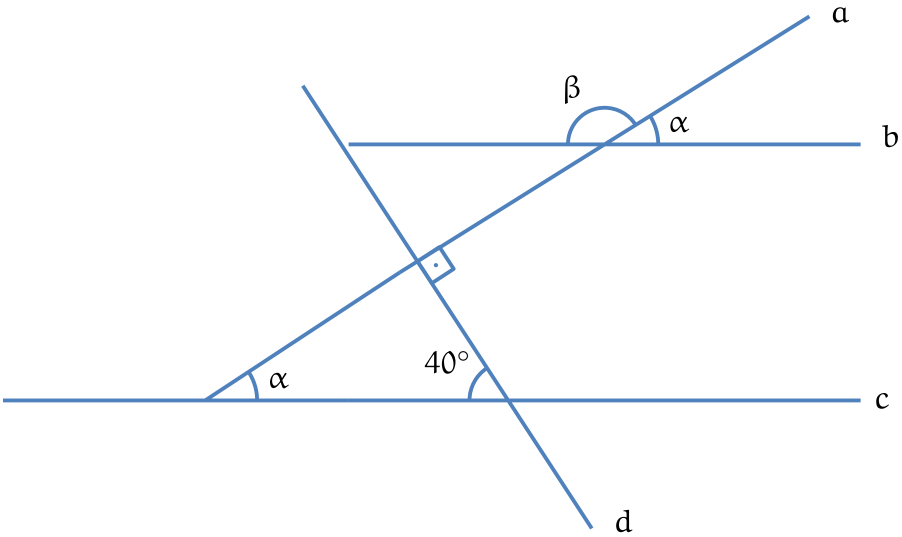


Dados: b paralelo a c; a perpendicular a d; e $40°$ é o menor ângulo que a reta d forma com a reta c.

Com os dados apresentados, é correto afirmar que um dos ângulos que a reta a forma com a reta b é igual a

(a) $45°$
(b) $55°$
(c) $60°$
(d) $80°$
(e) $130°$

R: Praticamente da mesma forma que fizemos na questão anterior, observe a figura com os prolongamentos das retas dadas:

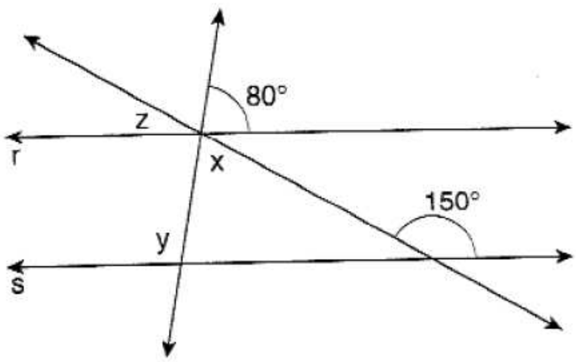


Vale então que $\alpha + 40° = 90°$ e daí $\alpha = 50°$. Visto que $50°$ não se encontra dentre as opções, a resposta deverá ser o valor de β, que é suplementar com α e portanto:
$\beta = 180° - \alpha = 180° - 50° = 130°$.

Gabarito: E

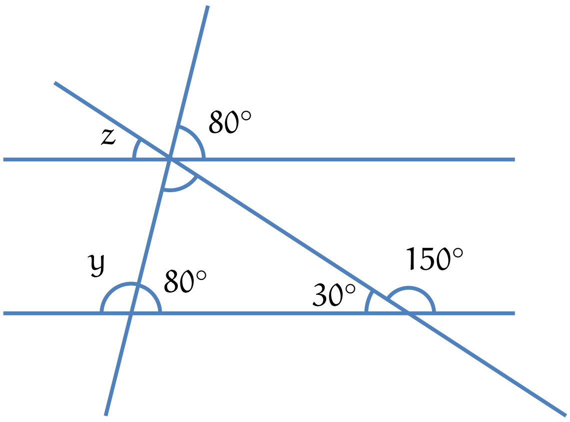
(FUZILEIRO NAVAL-2019) QUESTÃO 25

Na figura abaixo, sendo $r // s$, quais os valores de X, Y e Z, respectivamente?



(a) $50°$, $80°$ e $20°$
(b) $60°$, $120°$ e $40°$
(c) $70°$, $100°$ e $30°$
(d) $80°$, $150°$ e $100°$
(e) $100°$, $80°$ e $30°$

R: Observe a figura:



Observe que o suplemento de $150°$, $30°$, é um ângulo correspondente com z; logo, $z = 30°$. Da mesma forma, após a transferência do $80°$ com seu correspondente, temos que $80°$ e y são colaterais, e portanto $y + 80° = 180°$, concluindo que $y = 100°$.
E finalmente, no triângulo formado, temos que a soma dos ângulos internos resulta em $180°$. Portanto:

$$x + 80^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$
$$x = 180^\circ - 110^\circ$$
$$x = 70^\circ.$$

Temos então $x = 70^\circ$, $y = 100^\circ$ e $z = 30^\circ$.

Gabarito: C

(FUZILEIRO NAVAL-2003) QUESTÃO 26

Quais das medidas de lados abaixo podem formar um triângulo?

(a) 12cm, 10cm e 8cm.
(b) 12cm, 10cm e 2cm.
(c) 16cm, 10cm e 26cm.
(d) 16cm, 10cm e 5cm.

R: Veja que a opção A é a única em que a soma de quaisquer dois lados sempre supera o terceiro. Na prática, para fazer a verificação, basta somar os dois menores lados. Se ainda assim superarem o lado que sobra (que seria, em tese, o maior, caso o triângulo seja escaleno), o triângulo existirá. Veja que de fato 8cm $+$ 10cm supera 12cm. Porém, na alternativa B, 2cm $+$ 10cm não supera 12cm; na alternativa C, 16cm $+$ 10cm não supera 26cm e na alternativa D temos 5cm $+$ 10cm que não supera 16cm.

Gabarito: A

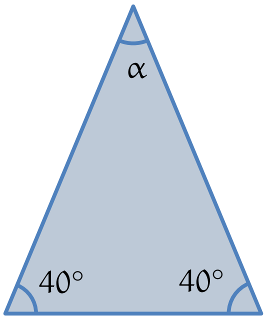
(FUZILEIRO NAVAL-2005) QUESTÃO 27

Um dos ângulos da base de um triângulo isósceles mede 40°. Quanto mede o ângulo do vértice ?

(a) 108°
(b) 100°

(c) 99°
(d) 95°
(e) 90°

R: Vejamos uma ilustração do problema:

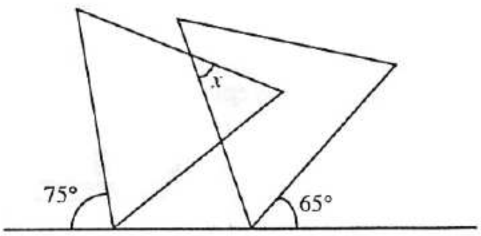


Veja que por ângulo da base ele quer dizer um dos ângulos congruentes. E quando ele menciona ângulo do vértice, ele menciona o único ângulo não-congruente da figura. Portanto, fazendo as contas:

$$\begin{aligned} \alpha + 40^\circ + 40^\circ &= 180^\circ \\ \alpha + 80^\circ &= 180^\circ \\ \alpha &= 180^\circ - 80^\circ \\ \alpha &= 100^\circ. \end{aligned}$$

Gabarito: B

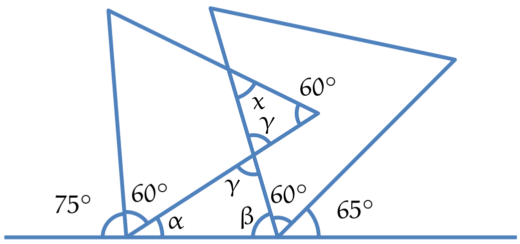
(FUZILEIRO NAVAL-2006) QUESTÃO 28



Na figura acima, os dois triângulos são eqüiláteros. Qual é o valor do ângulo x?

(a) 70°
(b) 60°
(c) 50°
(d) 40°
(e) 30°

R: Como os triângulos são equiláteros, todos os seus ângulos internos medem 60°. Podemos então redesenhar a figura como abaixo:

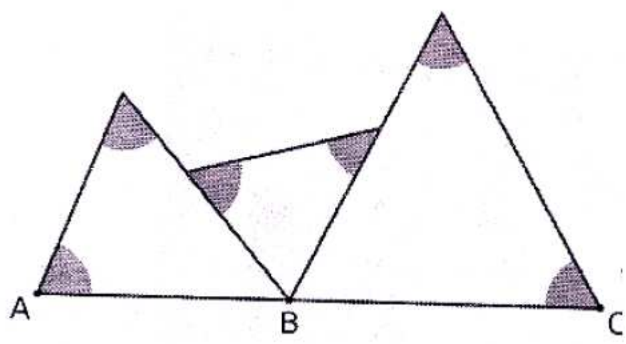


Veja que, pela figura, $75^\circ + 60^\circ + \alpha = 180^\circ$ e portanto $\alpha = 45^\circ$. Analogamente, $\beta + 60^\circ + 65^\circ = 180^\circ$, e portanto, $\beta = 55^\circ$. Dentro do triângulo de ângulos α, β e γ, somando os seus ângulos, obtemos: $45^\circ + 55^\circ + \gamma = 180^\circ$ e daí $\gamma = 80^\circ$.
Finalmente, no triângulo de ângulos 60°, γ e x temos: $60^\circ + 80^\circ + x = 180^\circ$, permitindo-nos concluir que $x = 40^\circ$.

Gabarito: D

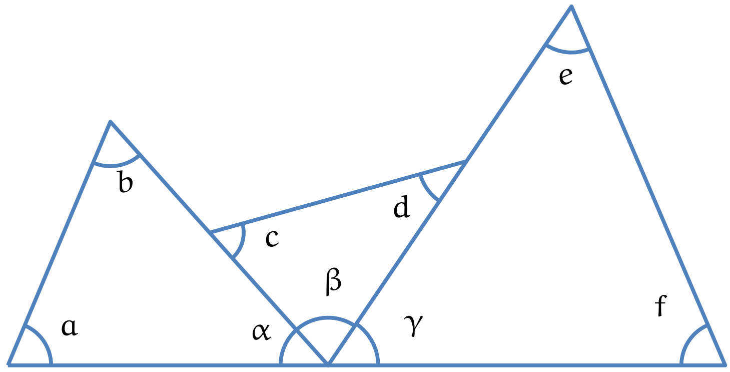
(FUZILEIRO NAVAL-2019) QUESTÃO 29

Na figura abaixo, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



(a) $120°$
(b) $180°$
(c) $270°$
(d) $360°$
(e) $540°$

R: Observe a figura com nomes dados aos ângulos:



Estamos interessados em somar dos os ângulos que estão na figura, exceto α, β e γ. O que podemos fazer é o seguinte. Inicialmente, vamos somar tudo. Veja que $a + b + \alpha = 180°$, $c + d + \beta = 180°$ e $e + f + \gamma = 180°$. Somando tudo, obtemos:

$$a + b + \alpha + c + d + \beta + e + f + \gamma = 180° + 180° + 180°$$
$$a + b + c + d + e + f + \alpha + \beta + \gamma = 540°.$$

Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, temos:

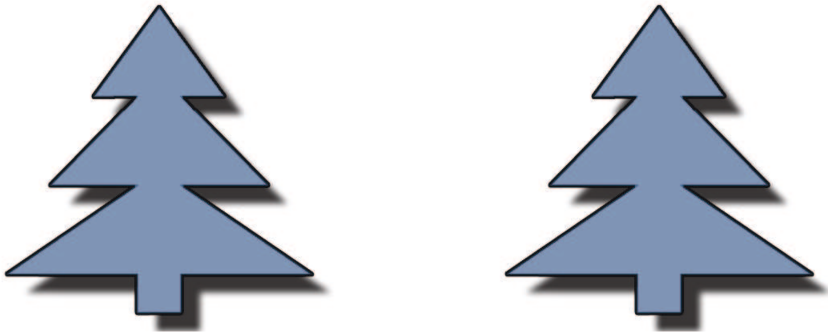
$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + f + \alpha + \beta + \gamma &= 540° \\ a + b + c + d + e + f + 180° &= 540° \\ a + b + c + d + e + f &= 360°. \end{aligned}$$

Gabarito: D

3.4– Congruência de triângulos

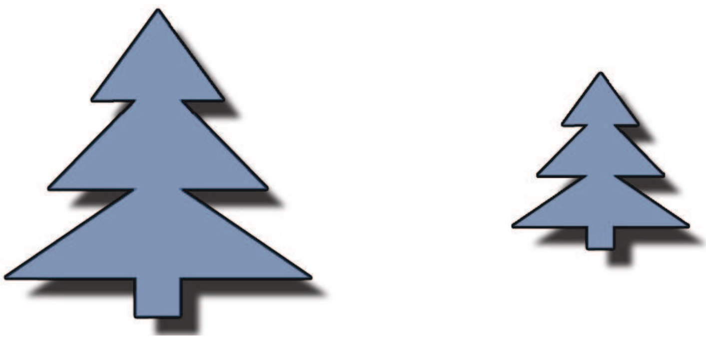
Não é o assunto mais importante do mundo. Não mesmo. Mas a importância da congruência de triângulos se dá para que possamos, posteriormente, aprender o que vem a ser uma *semelhança* de triângulos. Então um bom entendimento desse tópico trará benefícios depois (inclusive, ainda nesse livro eletrônico). Vamos lá!

Mas o que são, afinal, figuras congruentes? Bom, observe atentamente as duas formas desenhadas a seguir:



Imagine que eu recorte uma delas (recortar mesmo, imagine que estão desenhadas num papel e que são recortadas com uma tesoura) e cole em cima da outra que restou. Se as figuras se encaixam *perfeitamente*, dizemos que são *congruentes*. Acima, então, vemos um exemplo de formas congruentes.

E quanto às formas abaixo? O que você acha? São congruentes?

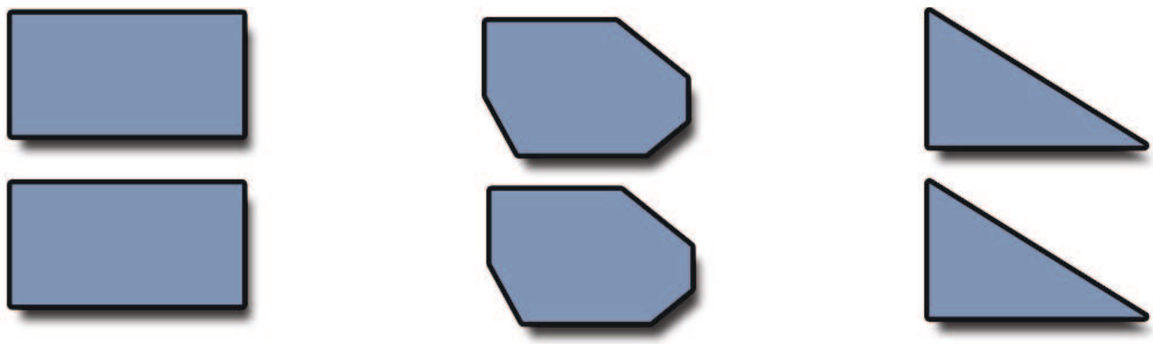


Pense, antes de responder. Será que, após recortar uma das formas (qualquer uma), poderemos encaixar tal forma na restante perfeitamente, com perfeita harmonização?

É claro que não. As formas têm tamanhos diferentes, uma é maior que a outra. Acabará sobrando espaço ou faltando, dependendo do corte.

Seguem alguns exemplos de pares de figuras congruentes:

"Iguais" é uma palavra muito forte, mas sim, essencialmente são "iguais" (mas as aspas aqui se fazem super necessárias). O que acontece é que em matemática, quando dizemos que duas coisas são iguais, é porque não há a menor diferença entre elas. No caso das formas que vimos, ao dizer

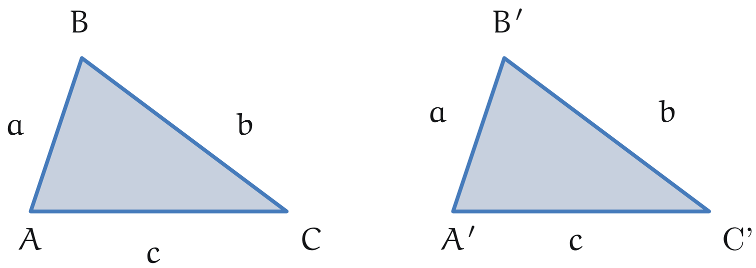


que são iguais, pecamos pela posição delas. A rigor, não são iguais porque, por exemplo, uma está acima da outra. Isso já seria suficiente para não serem iguais, iguais. Porém: quando não há riscos de confusão, podemos dizer "iguais" sem problemas. Eu mesmo em nossos materiais utilizarei deliberadamente esse termo, ao invés de congruente. Por simplicidade.

Aqui, o que discutiremos é quanto à congruência de triângulos. Na prática, é claro que você não vai sair recortando os triângulos para ver se encaixam perfeitamente. É impraticável e inviável. O que podemos fazer, porém, é adotar *casos de congruência*, situações que sempre que acontecem, concluímos os triângulos congruentes. Entendamos melhor.

Existem quatro casos de congruência de triângulos. Vejamos e analisemos cada um deles:

- *LLL:* Quando dois triângulos possuem lados correspondentemente iguais, pode-se concluir que os triângulos são congruentes. Veja a representação abaixo:

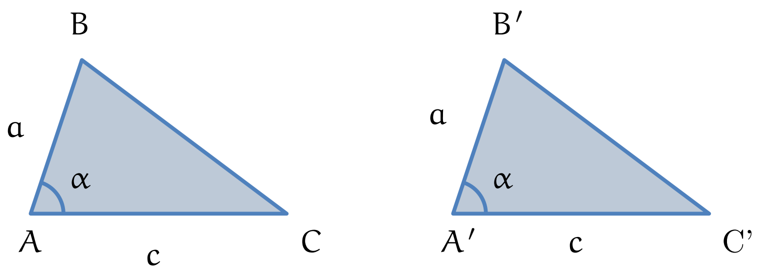


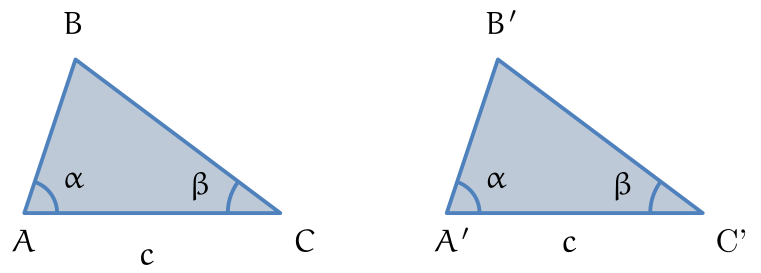
  Como os lados são iguais, temos que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (o símbolo "$\equiv$" refere-se à congruência entre as figuras).

- *LAL:* Quando dois triângulos possuem dois lados iguais, e, também, o ângulo formado por esses lados, esses triângulos serão considerados congruentes.

  Como os lados a e c são iguais e, o ângulo formado entre eles (α) também, temos $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

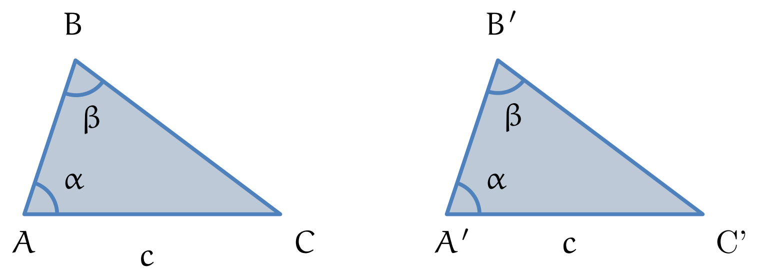
- *ALA:* Quando dois triângulos posseum dois ângulos iguais e, também, o lado comum a esses ângulos, esses triângulso serão considerados congruentes.





Como os ângulos α e β são iguais e o lado comum c também, temos $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

- *LAA_o:* Quando dois triângulos tiverem um lado igual, um ângulo adjacente a esse lado igual e, também, o ângulo oposto àquele lado também igual, os triângulos serão considerados congruentes. Mei complicada essa, não? Dê uma boa olhada na figura enquanto lê e relê a definição.



Veja que temos um lado igual (c), um ângulo adjacente igual (α) e, finalmente, o ângulo oposto àquele lado também igual (β).

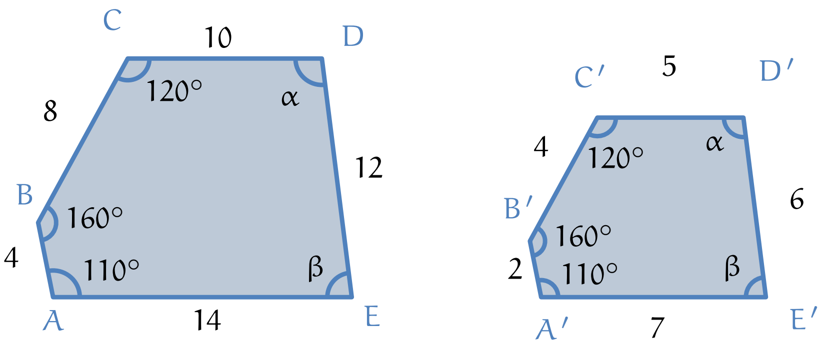
Meio complicado né? Mas são apenas regras para verificarmos se dois triângulos são ou não congruentes. A vantagem de dois triângulos serem congruentes é que se você descobrir que de fato são, todas as medidas de um podem ser transferidas para o outro, e vice-versa.

Então, vamos então ao conceito de semelhança de triângulos. Quero porém, antes de começar a próxima seção, criar um clímax na sua cabeça: preste bastante atenção na frase que iniciará a próxima seção. É um frase super impactante porém extremamente verdadeira. Em nosso material atual, já falei por diversas vezes sobre a importância de teoremas, como, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo (mencionei ser o teorema angular mais importante da geometria plana). Mas semelhança de triângulos, tem uma importância que está em outro nível. Vamos lá.

3.5– Semelhança de Triângulos

Esse é o assunto mais importante de TODA a geometria plana. Sim, jovem, o *mais importante*. Praticamente tudo o que veremos de agora em diante (e nisso eu incluo os próximos materiais) vem do conceito de semelhança de triângulos: potência de ponto em relação a círculos, TODAS as relações métricas em triângulos retângulos (inclusive o Teorema de Pitágoras), a trigonometria INTEIRA nasce do conceito de semelhança de triânguios, etc. Então, olhando sério pra você, com ênfase eu digo: dê bastante atenção para esse tópico. Parece simples, mas não é. Vamos juntos que tudo dá certo ao final. Mas temos de ir juntos. Não houve entendimento? Use nosso fórum em nossa plataforma online e fale diretamente conosco. Terei muito prazer em tirar todas as suas dúvidas.

Bom, ao assunto. Observe o par de figuras abaixo:



Percebe que seus ângulos são todos iguais? Mas percebe também que as figuras não são congruentes? Pois bem, mas há uma relação super útil nelas também.

Quero que você faça essas operações de divisão que vou te sugerir agora. Faça primeiro: $\frac{AB}{A'B'}$. Encontrou quanto? Achou 2? Muito bom. Agora, faça essas aqui: $\frac{BC}{B'C'}, \frac{CD}{C'D'}, \frac{DE}{D'E'}, \frac{AE}{A'E'}$. Pois bem. Encontrou resultado para todas elas? E mais importante, encontrou 2 para todas elas? Agora, por causa disso e porque seus ângulos são todos iguais, podemos dizer que essas duas figuras são semelhantes (escreve-se $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$, onde "$\sim$" é o símbolo que indica semelhança entre duas figuras).

De forma mais prática e resumida, aqui vão as duas condições para que duas figuras sejam consideradas semelhantes:

- os ângulos correspondentes devem ser iguais;
- os lados correspondentes devem ter razões iguais.

Na nossa figura anterior, por exemplo, além dos ângulos serem todos de fato iguais, constatamos que qualquer lado do maior dividido pelo seu correspondente[1] no menor resulta em 2. Logo, veri-

[1] Muitas vezes ao invés do termo *correspondentes*, utilizar-se-á o termo *homólogos*.

ficadas verdadeiras as duas condições, podemos afirmar sem medo que as figuras são semelhantes. Inclusive, aqui vai um nome novo para você. No exemplo anterior, ao dividir o lado do maior pelo seu correspondente, encontramos sempre 2, correto. Pois bem, esse 2 recebe o nome especial de *razão de semelhança*. Então razão de semelhança nada mais é que o valor constante que se encontra ao dividir o lado (ou outra medida qualquer) de uma das formas com a sua medida correspondente na outra forma.

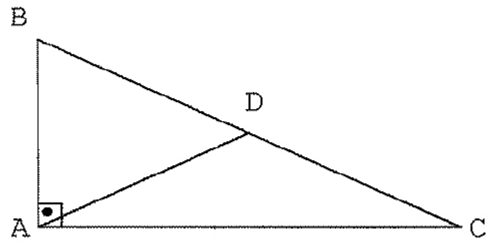
E em triângulos? Como funciona a semelhança? Ora, triângulos seguem as mesmas regras que falei acima, **só que:** para triângulos, e exclusivamente para triângulos, *você não precisa checar as duas condições, APENAS UMA!* Sim, escolha uma delas, se funcionar, já pode concluir que os triângulos são semelhantes. Então se os lados dividirem na mesma razão, já pode dizer que são semelhantes sem precisar checar que os ângulos são iguais. E se os ângulos forem iguais, pode afirmar sem medo que os triângulos são semelhantes, sem precisar checar a razão de semelhança.

Sim, coruja. Incrivelmente é só fazer isso! Se em algum momento dois triângulos foram notados e você perceber que eles têm ângulos correspondentemente iguais, vai por mim: são semelhantes com certeza! E daí funciona tudo o que eu falei sobre a razão de semelhança. Os lados dividirão na mesma razão, simplesmente porque você percebeu que os ângulos são iguais. E digo mais: nem precisa fazer a verificação de três ângulos; se você conseguir perceber que dois ângulos já são iguais, *game over*! São semelhantes (porque o terceiro ângulo será inevitavelmente igual também).

Atenção para os nossos exercícios agora. Darei uma boa misturada aqui para mexer com ângulos mas também resolvermos as questões de semelhança. Lembrando que as questões da CFN não pedem que você resolva semelhança diretamente. Por isso não veremos questões CFN aqui. Mas precisaremos de semelhança posteriormente. Lembre-se que não há muitas questões do concurso da CFN e estamos adotando a estratégia da regularidade. Aprenda a ferramenta sem questionamentos. Não busque esse tipo de atalhos. Confie na gente. Então, vamos lá!

(EAM-2008) QUESTÃO 30

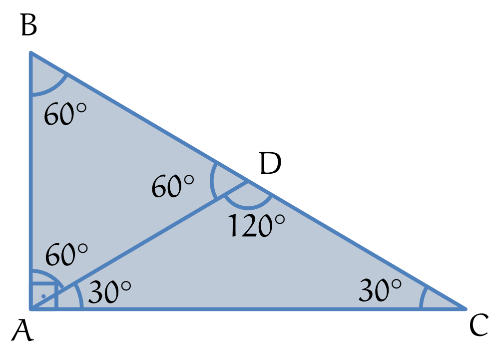
Observe a figura abaixo.



O triângulo ABC é retângulo em A e o triângulo ABD é eqüilátero. Se a medida de BC é 12, o comprimento de AB é

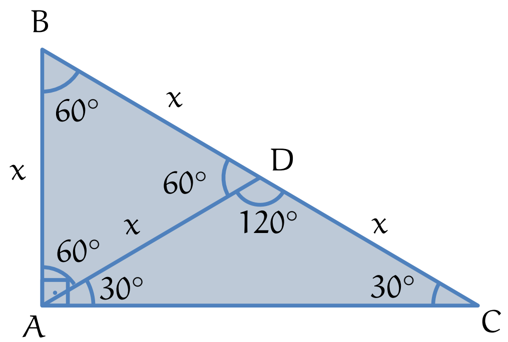
(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8
(e) 9

R: O fato de o triângulo ABD ser equilátero nos traz a importantíssima informação de que seus ângulos internos são todos iguais a $60°$. Isso traz as consequência a seguir para a figura:



Veja que o ângulo $\angle DAC = \angle BAC - \angle BAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, como está ilustrado. De forma análoga conseguimos concluir que $\angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ e, como a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre resulta em 180°, podemos concluir que $\angle BCA = 30^\circ$. Agora, às medidas dos segmentos formados.

Visto que ABD é equilátero, temos $AB = BD = AD$; chamarei essas medidas de x. Mas veja também que $AD = DC$, pois $\triangle ACD$ é isósceles (dois ângulos internos iguais). Logo, ambos segmentos medem x. Veja:



Como $BC = 12$ e $BC = 2x$, temos $2x = 12$ e portanto $x = 6$, medida do lado AB.

Gabarito: B

(EAM-2010) QUESTÃO 31

O perímetro de um triângulo de lados inteiros é igual a $12\,m$. O maior valor possível para um dos lados deste triângulo tem medida igual a

(a) $5\,m$
(b) $6\,m$
(c) $7\,m$
(d) $8\,m$
(e) $9\,m$

R: Vamos considerar que os lados desse triângulo tenham medidas iguais a a, b e c. Precisaremos usar aqui a condição de existência para triângulos, aquela que diz que a soma de dois lados quaisquer de um triângulo sempre deve superar a medida do terceiro lado. Então, vejamos.

Sabemos que o perímetro desse triângulo é $12\,m$, logo: $a + b + c = 12$, e portanto $a + b = 12 - c$.

Mas veja que $a + b > c$ (condição de existência de triângulos), logo:

$$
\begin{aligned}
12 - c &> c \\
-c - c &> -12 \\
-2c &> -12 \\
-2c &< -12 \\
2c &< 12 \\
c &< 6.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, o maior valor que esse lado poderá ter é 5, maior inteiro menor que 6.

Gabarito: A

(EAM-2012) QUESTÃO 32

Os ângulos internos de um triângulo são diretamente proporcionais a 2, 7 e 9. Então o menor ângulo interno desse triângulo mede

(a) 90°
(b) 80°
(c) 70°
(d) 40°
(e) 20°

R: Não sabemos quais seriam esses ângulos. Mas sabemos que são diretamente proporcionais a 2, 7 e 9; logo, um desses ângulos é $2k$, o outro é $7k$ e o último é $9k$ (condição de proporcionalidade direta[2]). Como a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta 180°, temos:

$$
\begin{aligned}
2k + 7k + 9k &= 180^\circ \\
18k &= 180^\circ \\
k &= 10^\circ.
\end{aligned}
$$

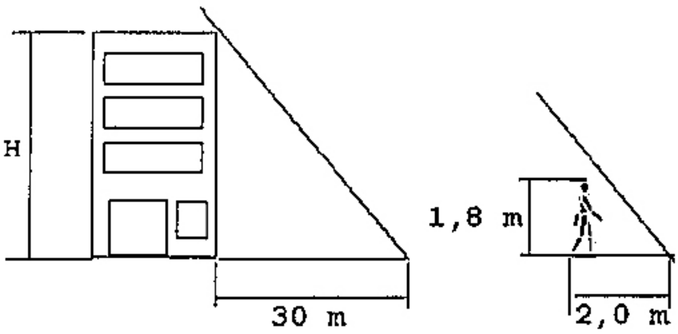
Com isso, o menor ângulo interno é $2k = 2 \cdot 10^\circ = 20^\circ$.

[2] Para mais informações, consultar o tema *razão e proporção*.

Gabarito: E

(EAM-2017) QUESTÃO 33

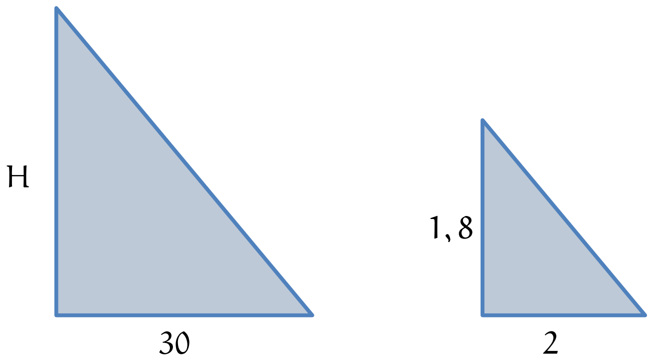
Observe a figura abaixo.



Um prédio projeta no solo uma sombra de $30\,\text{m}$ de extensão no mesmo instante em que uma pessoa de $1,80\,\text{m}$ projeta uma sombra de $2,0\,\text{m}$. Pode-se afirmar que a altura do prédio vale

(a) $27\,\text{m}$
(b) $30\,\text{m}$
(c) $33\,\text{m}$
(d) $36\,\text{m}$
(e) $40\,\text{m}$

R: Observe os triângulos destacados:



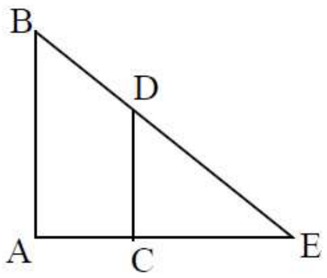
Supondo que os raios do sol cheguem paralelos, esses triângulos serão semelhantes. Assim, aplicando a condição de semelhança:

$$\frac{H}{30} = \frac{1,8}{2}$$

$$H = \frac{30 \cdot 1,8}{2}$$
$$H = 27\,m.$$

Gabarito: A

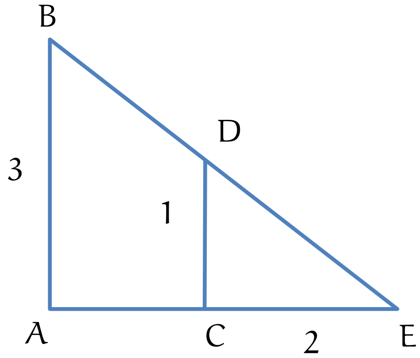
(FUZILEIRO NAVAL-2008) QUESTÃO 34



Na figura acima, as retas AB e CD são paralelas. $AB = 3cm$, $CE = 2cm$ e $CD = 1cm$. O segmento AE mede

(a) $2cm$
(b) $3cm$
(c) $4cm$
(d) $5cm$
(e) $6cm$

R: Observe a figura com os dados informados:

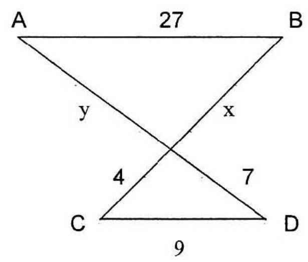


Vemos então que os triângulos ABE e CDE são semelhantes. Logo:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{CD}{CE}$$
$$\frac{3}{AE} = \frac{1}{2}$$
$$AE = 6cm.$$

Gabarito: E

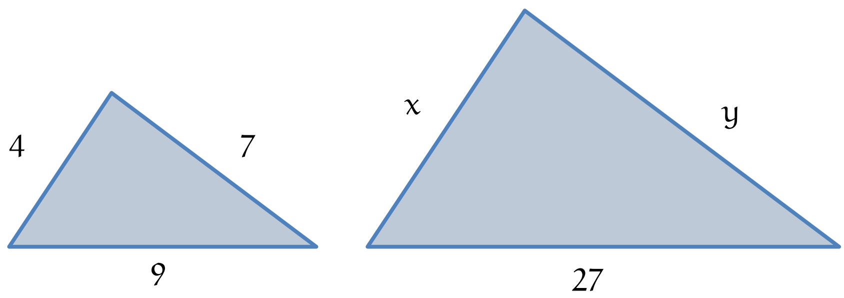
(FUZILEIRO NAVAL-2008) QUESTÃO 35



Na figura acima, os triângulos são semelhantes. Então, x e y valem, respectivamente

(a) 12 e 21
(b) 12 e 24
(c) 15 e 18
(d) 21 e 12
(e) 21 e 27

R: Observando os triângulos separadamente, e vendo que $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são iguais por serem alternos internos, temos:



E daí:

$$\frac{y}{7} = \frac{27}{9}$$
$$\frac{y}{7} = 3$$
$$y = 3 \cdot 7$$
$$y = 21.$$

Analogamente, para x:

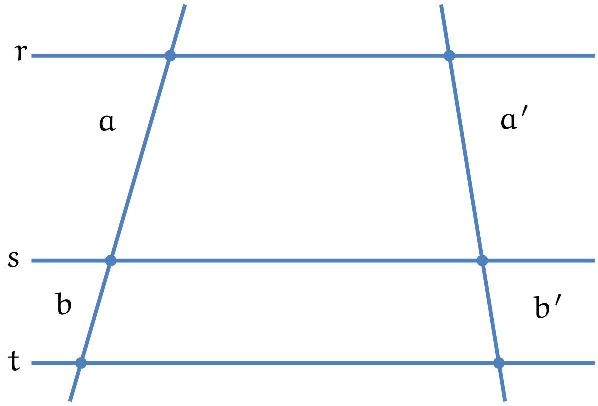
$$\frac{x}{4} = \frac{27}{9}$$
$$\frac{x}{4} = 3$$
$$x = 4 \cdot 3$$
$$x = 12.$$

Logo $x = 12$ e $y = 21$.

Gabarito: A

3.6– Teorema de Tales

Aqui apresentarei uma ferramenta extremamente útil da geometria plana comum. Não é bem um conceito intrínseco dos triângulos apenas, mas uma das grandes utilidades são pertinentes a eles, sim. Vamos então dar uma olhada nesse teorema.



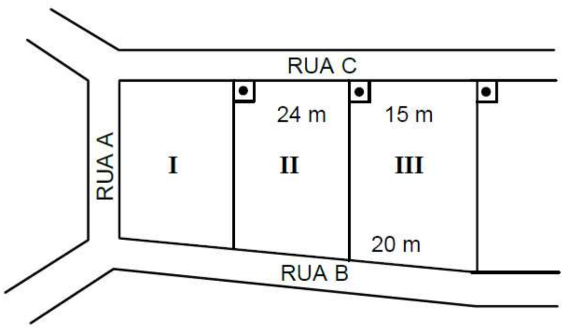
Na figura acima, vemos três retas paralelas (r, s e t) cortadas por duas transversais. Perceba, então, que quatro segmentos foram formados, de comprimentos a, a', b e b'. Vale então que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Então, podemos dizer que essas transversais determinam sobre as paralelas *segmentos proporcionais*[3]. Vejamos um exemplo de aplicação.

(AFA-2002) QUESTÃO 36

No desenho abaixo, estão representados os terrenos I, II e III.

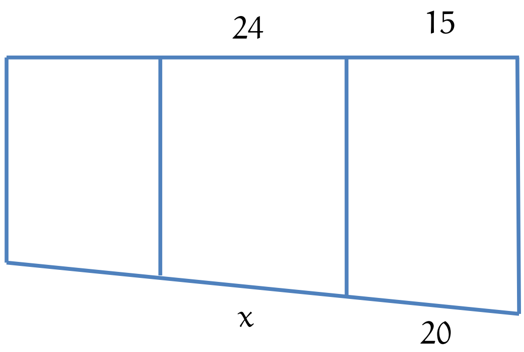


Quantos metros de comprimento deverá ter o muro que o proprietário do terreno II construirá para fechar o lado que faz frente com a rua B?

(a) 28
(b) 29
(c) 32
(d) 35

R: Observe como a figura está contextualizada com o tema de ruas, muros, terrenos, mas na verdade são apenas retas paralelas cortadas por transversais. Dessa forma, podemos redesenhar a figura de acordo com nossas necessidades:

[3] Esse fato será demonstrado posteriormente, quando falarmos de trigonometria.



Daí, pelo Teorema de Tales:

$$\frac{x}{20} = \frac{24}{15}$$
$$x = \frac{20 \cdot 24}{15}$$
$$x = 32.$$

Gabarito: C

3.6– Índice Remissivo

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.