Aula 00

CNU (Bloco Temático 8 - Nível Intermediário) Matemática

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

14 de Outubro de 2024

Índice

AVISO IMPORTANTE!

Olá, Alunos (as)!

Passando para informá-los a respeito da **disposição das questões** dentro do nosso material didático. Informamos que a escolha das bancas, dentro dos nossos Livros Digitais, é feita de maneira estratégica e pedagógica pelos nossos professores a fim de proporcionar a melhor didática e o melhor direcionamento daquilo que mais se aproxima do formato de cobrança da banca do seu concurso.

Assim, o formato de questões divididas por tópico facilitará o seu processo de estudo, deixando mais alinhado às disposições constantes no edital.

No mais, continuaremos à disposição de todos no Fórum de dúvidas!

Atenciosamente,

Equipe Exatas

Estratégia Concursos

APRESENTAÇÃO DO CURSO

Olá, pessoal! Tudo bem?

É com grande satisfação que damos início ao nosso curso!

Os professores **Eduardo Mocellin, Francisco Rebouças, Luana Brandão, Djefferson Maranhão** e **Vinicius Veleda** ficarão responsáveis pelo **Livro Digital**.

Antes de continuarmos, vamos apresentar os professores do material escrito:

Eduardo Mocellin: Fala, pessoal! Meu nome é Eduardo Mocellin, sou professor de Matemática e de Raciocínio Lógico do Estratégia Concursos e engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Sinto-me feliz em poder contribuir com a sua aprovação! Não deixe de me seguir no Instagram: **@edu.mocellin**

Francisco Rebouças: Fala, alunos! Aqui é o Francisco Rebouças, professor de Matemática do Estratégia Concursos. Sou Engenheiro Aeroespacial formado pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Saiba que será uma honra fazer parte da sua jornada rumo à aprovação e que estaremos sempre aqui para auxiliá-los com o que precisarem. Um grande abraço e nos vemos nas aulas!

Luana Brandão: Oi, pessoal! O meu nome é Luana Brandão e sou professora de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduada, Mestre e Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense. Passei nos concursos de Auditor Fiscal (2009/2010) e Analista Tributário (2009) da Receita Federal e de Auditor Fiscal do Estado do Rio de Janeiro (2010). Sou Auditora Fiscal do Estado do RJ desde 2010. Vamos juntos nesse caminho até a aprovação? **@professoraluanabrandao**

Djefferson Maranhão: Olá, amigos do Estratégia Concursos, tudo bem? Meu nome é Djefferson Maranhão, professor de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduado em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Desde 2015, sou Auditor da Controladoria Geral do Estado do Maranhão (2015 - 5º lugar). Antes, porém, exerci os cargos de Analista de Sistemas na UFMA (2010 - 1º lugar) e no TJ-MA (2011 - 1º lugar). Já estive na posição de vocês e sei o quanto a vida de um concurseiro é um tanto atribulada! São vários assuntos para se dominar em um curto espaço de tempo. Por isso, contem comigo para auxiliá-los nessa jornada rumo à aprovação. Um grande abraço.

Vinicius Veleda: Olá, caros alunos! Sou Auditor Fiscal do Estado do Rio Grande do Sul. Professor de Matemática e Matemática Financeira do Estratégia Concursos. Aprovado nos Concursos de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda dos Estados do Rio Grande do Sul (SEFAZ RS - 2019), Santa Catarina (SEFAZ SC - 2018) e Goiás (SEFAZ GO - 2018). Formado em Engenharia de Petróleo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com graduação sanduíche em Engenharia Geológica pela Universidade Politécnica de Madrid (UPM). Pela UFRJ, fui campeão sul americano do Petrobowl (Buenos Aires) e, posteriormente, Campeão Mundial (Dubai). Cursei meu ensino médio na Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx). Contem comigo nessa trajetória! **@viniciusveleda**

O material escrito em **PDF** está sendo construído para ser sua fonte **autossuficiente** de estudos. Isso significa que o livro digital será **completo** e **voltado para o seu edital**, justamente para que você não perca o seu precioso tempo "caçando por aí" o conteúdo que será cobrado na sua prova. Ademais, sempre que necessário, você poderá fazer perguntas sobre as aulas no **fórum de dúvidas**. **Bons estudos!**

TEORIA DOS CONJUNTOS

Introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição de Conjunto

Iniciaremos o nosso estudo da matemática pela **Teoria dos Conjuntos**. A escolha desse conteúdo é **cuidadosamente pensada** para que você possa formar **uma base sólida,** que lhe servirá de alicerce na construção de toda matemática necessária a sua prova.

A palavra "conjunto" significa exatamente o que você deve estar pensando: uma espécie de **grupo, lista** ou **uma coleção** de determinado objeto. Observe alguns exemplos de **como podemos representar** conjuntos na matemática:

- $A = \{a, b, c, d, e\}$
- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

O conjunto A é formado pelas **5 primeiras letras** no nosso alfabeto. O conjunto B é formado por **5 números pares**. O conjunto C é formado por **10 números ímpares**. Você pode estar se perguntando: *só podemos fazer conjuntos de números e letras?*

A resposta é não! Podemos criar conjuntos de basicamente qualquer coisa, desde um conjunto representando **os funcionários de determinada empresa** a **conjuntos formados por outros conjuntos!** Por exemplo, o conjunto E lista alguns professores de exatas do Estratégia Concursos.

- $\mathrm{E} = \{\mathrm{Francisco}, \mathrm{Eduardo}, \mathrm{Vinicius}, \mathrm{Luana}, \mathrm{Djefferson}\}$

Primeiramente, note que um conjunto muitas vezes aparecerá com seus elementos listados **dentro de um par de chaves**. Por isso, sempre que for escrever algum conjunto, não esqueça de colocar seus elementos aqui dentro: $\{\ \}$. É também usual as pessoas nomearem seus conjuntos com letras maiúsculas, mas **isso não é mandatório, nem necessário,** em algumas situações.

Relação de Pertinência

Quando um elemento faz parte de determinado conjunto, dizemos que **o elemento PERTENCE ao conjunto**. Essa relação de pertinência **entre um elemento e um conjunto** é representada pelo símbolo $\in$.

- $b \in A$: **Lemos**: b **pertence** a A;
- $4 \in B$: **Lemos**: 4 **pertence** a B;

Atente-se à simbologia! Podemos dizer que um elemento **não pertence** a um determinado conjunto. Para isso, utilizamos o símbolo "não pertence": $\notin$.

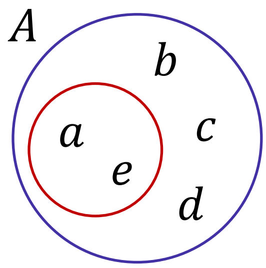
- $z \notin A$: z **não pertence** a A;
- $100 \notin B$: 100 **não pertence** a B;

Relação de Inclusão

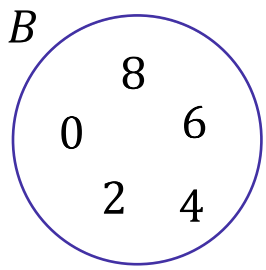
Existe mais um tipo de relação que devemos estudar: **a relação de inclusão**. Nesse tipo de relação, é estabelecido **um relacionamento entre dois conjuntos** e não mais entre um elemento e outro conjunto. Para isso, usamos uma simbologia específica que você deverá guardar: $\subset, \not\subset, \supset$ ***e*** $\not\supset$. Vamos ver com calma o que cada um deles diz! Considere: $\boldsymbol{A = \{a, b, c, d, e\}}$, $\boldsymbol{B = \{0, 2, 4, 6, 8\}}$ e $\boldsymbol{C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}}$.

- $\{a, e\} \subset A$: **Lemos**: $\{a, e\}$ **está contido** em A;
- $\{0, 2, 8\} \subset B$: **Lemos**: $\{0, 2, 8\}$ **está contido** em B;

Perceba que agora não estamos estabelecemos uma relação entre um elemento e um conjunto**. A relação de inclusão envolve <u>2 conjuntos</u>!** Diante disso, podemos introduzir um novo termo: **o subconjunto**. O subconjunto nada mais é do que **parte de um conjunto maior**. Quando dizemos, por exemplo, que $\boldsymbol{\{a, e\}}$ **está contido em $\boldsymbol{A}$**, estamos dizendo, com outras palavras, que $\{a, e\}$ é um subconjunto de $\boldsymbol{A}$.



O diagrama acima ajuda a compreender a relação de inclusão. Observe que **o conjunto $\boldsymbol{\{a, e\}}$ está inteiramente contido em $\boldsymbol{A}$**. Nessas condições, dizemos que $\{a, e\}$ está contido em A ou ainda que $\{a, e\}$ é um subconjunto de A. Algumas vezes, você poderá ver **o termo "parte" sendo usado como sinônimo de subconjunto**. Agora, imagine a seguinte situação:



Nesse caso, temos que $\{a, e\} \not\subset B$: **Lemos**: $\{a, e\}$ não está contido em B ou $\{a, e\}$ não é um subconjunto de B. Vamos ver mais alguns exemplos de quando **um conjunto não está contido em outro**:

- $\{a, e, f\} \not\subset A$
- $\{1, 3, 5\} \not\subset B$
- $\{0, 1\} \not\subset C$
- $\{\text{Sicrano}, \text{Beltrano}\} \not\subset \text{E}$

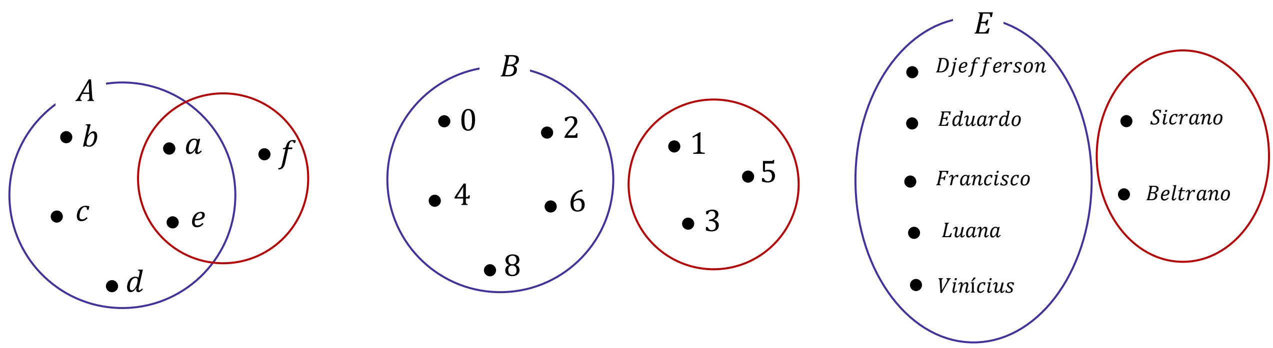
Perceba que **basta um elemento do conjunto não pertencer** ao conjunto maior que **não poderemos estabelecer uma relação de inclusão** entre os dois conjuntos e, portanto, dizemos que um não está contido no outro. Pessoal, **se $\{a, e\}$ está contido em A,** então também podemos dizer que **A contém $\{a, e\}$**. Quando queremos expressar essa ideia de que um conjunto maior contém determinado subconjunto, utilizamos o símbolo $\supset$.

- $A \supset \{a, e\}$: A **contém** $\{a, e\}$
- $B \supset \{0, 2, 8\}$: B **contém** $\{0, 2, 8\}$
- $C \supset \{1, 3, 5, 19\}$: C **contém** $\{1, 3, 5, 19\}$
- $\text{E} \supset \{\text{Francisco}, \text{Eduardo}\}$: E **contém** $\{\text{Francisco}, \text{Eduardo}\}$

Analogamente, podemos estender o raciocínio para quando queremos dizer que determinado conjunto **não contém outro**. Nessas situações, utilizamos $\not\supset$.

- $A \not\supset \{a, e, f\}$: A **não contém** $\{a, e, f\}$
- $C \not\supset \{0, 1\}$: C **não contém** $\{0, 1\}$
- $\text{E} \not\supset \{\text{Sicrano}, \text{Beltrano}\}$ -- E **não contém** $\{\text{Sicrano}, \text{Beltrano}\}$

ESQUEMATIZANDO



$A \not\supset \{a, e, f\}$ $\quad$ $B \not\supset \{1, 3, 5\}$ $\quad$ $\text{E} \not\supset \{\text{Sicrano}, \text{Beltrano}\}$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. PIÊN/2023) Sejam A, B e C conjuntos dados por $A = \{-1,2,9,7,3\}$, $B = \{2,7\}$ e $C = \{-1,0\}$. Assinale a alternativa **CORRETA**.

A) $0 \in A$

B) $7 \subset A$

C) $B \subset A$

D) $C \subset A$

E) $-1 \notin A$

Comentários:

Vamos verificar se cada alternativa, de acordo com a definição dos conjuntos A, B e C.

A) $0 \in A$

Falsa, pois 0 **não** está no conjunto $A = \{-1,2,9,7,3\}$.

B) $7 \subset A$

Falsa, pois **7 não é um conjunto, mas um elemento**. Não podemos dizer que um elemento está contido em outro conjunto.

C) $B \subset A$

Verdadeira, pois todos os elementos de $B = \{2,7\}$ também estão no conjunto A.

D) $C \subset A$

Falsa, pois $C = \{-1,0\}$ tem um elemento, 0, que não está no conjunto A.

E) $-1 \notin A$

Falsa, pois -1 está no conjunto A.

Gabarito: LETRA C.

Igualdade entre Conjuntos

Pessoal, dois conjuntos são considerados iguais (ou idênticos) se eles possuem **exatamente os mesmos elementos!** Todo elemento que estiver em um deve necessariamente estar no outro. Por exemplo, considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 2,1\}$. Nessa situação, podemos escrever que $A = B$.

Professor, mas a ordem está diferente!

Não importa! O importante é que todos elementos de A são os mesmos elementos de B.

Subconjuntos

Vamos aprofundar um pouco o nosso estudo sobre **os subconjuntos**. Para começar, tente dizer quais são os subconjuntos do conjunto $A = \{a, b\}$. *Pronto?* Observe como fica:

Conjunto	Subconjuntos
$A = \{a, b\}$	$\emptyset$
	$\{a\}$
	$\{b\}$
	$\{a, b\}$

A tabela acima lista todos os subconjuntos que podemos formar utilizando o conjunto A. Sabendo disso, podemos escrever as seguintes relações:

- $\emptyset \subset A$
- $\{a\} \subset A$
- $\{b\} \subset A$
- $\{a, b\} \subset A$

Devemos falar um pouco do **conjunto vazio e conjunto unitário**. O conjunto vazio, como o próprio nome sugere, **é um conjunto que não possui elementos**! É representado por meio do **símbolo** $\emptyset$ mas também pode aparecer como um simples par de chaves $\{\ \}$. Já **o conjunto unitário** é todo conjunto que **possui um único elemento**!

TOME NOTA!

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

Seja X um conjunto genérico, então:

$$\emptyset \subset X \qquad ou \qquad \{\ \} \subset X$$

Observe que $\{a, b\} \subset A$, indicando que **qualquer conjunto é também um subconjunto de si mesmo**! Seja $B = \{a, b, c\}$. Vamos listar os seus subconjuntos também?

Conjunto	Subconjuntos
$B = \{a, b, c\}$	$\emptyset$
	$\{a\}$
	$\{b\}$
	$\{c\}$
	$\{a, b\}$
	$\{a, c\}$
	$\{b, c\}$
	$\{a, b, c\}$

Quando um subconjunto de B é diferente do próprio B, chamamos ele de **subconjunto próprio de B**. Por exemplo, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ são subconjuntos próprios de B. Já o subconjunto $\{a, b, c\}$ é denominado **impróprio** pois é igual ao próprio B! Pessoal, observe que **os subconjuntos de um conjunto são apenas diferentes combinações de seus elementos**. Portanto, se você precisar listar os subconjuntos, siga os seguintes passos:

Passo 1: O primeiro conjunto que você deve anotar como subconjunto é o **conjunto vazio**.

Passo 2: Depois, transforme em subconjunto cada elemento, um por um.

Passo 3: Em seguida, escreva os subconjuntos formado por pares de elementos.

Passo 4: Acabando os pares, pegue os trios e assim sucessivamente.

Seguindo essa receita, vamos listar os subconjuntos de $C = \{1, 2, 3\}$?

Passo 1: Você não deve esquecer que **o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto**, portanto:

$$\emptyset$$

Passo 2: Transformando cada elemento em um subconjunto, **um por um**.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$$

Passo 3: Escrever os subconjuntos formado por **pares** de elementos.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}$$

Passo 4: Ir para os trios.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}, \{1, 2, 3\}$$

Como o conjunto C só possui 3 elementos, encerramos por aqui! Listamos todos os subconjuntos dele. Observe que quando tínhamos um conjunto com **2 elementos, obtivemos 4 subconjuntos**. Ao aumentar um elemento no conjunto, **passamos a ter 8 subconjuntos**. Será que é possível estabelecer uma fórmula para calcular **o número de subconjuntos baseado na quantidade de elementos de um conjunto**?

É possível sim e **a fórmula é bem simples**. Seja $n(A)$ **o número de elementos de um conjunto** A. Então, **o número de subconjuntos de A, n_{S_A}**, é dado por:

$$\boxed{n_{S_A} = 2^{n(A)}}$$

Por exemplo, vamos voltar no conjunto $C = \{1, 2, 3\}$. Como ele tem **três elementos**, para encontrar o número de subconjuntos de C, fazemos assim:

$$n_{S_C} = 2^{n(C)} \quad \rightarrow \quad n_{S_C} = 2^3 \quad \rightarrow \quad n_{S_C} = 8$$

Logo, C tem **oito subconjuntos**.

(Pref. Tuparetema/2024) Julgue o item:

Um conjunto não pode ser um subconjunto de si mesmo.

Comentários:

Para julgar o item, precisamos saber o que é um subconjunto. Um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B **se todos os elementos de A também pertencem a B**. Por exemplo, $\{a, b\}$ é um subconjunto de $\{a, b, c\}$, mas $\{a, d\}$ não é um subconjunto de $\{a, b, c\}$. A relação de subconjunto é representada pelo símbolo $\subseteq$. Podemos escrever $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$, mas não podemos escrever $\{a, d\} \subseteq \{a, b, c\}$.

Uma propriedade importante da relação de subconjunto é que todo conjunto é um subconjunto de si mesmo. **Isso significa que qualquer conjunto A satisfaz $A \subseteq A$, pois todos os elementos de A pertencem a A.** Portanto, o item está errado. Um conjunto pode sim ser um subconjunto de si mesmo.

Gabarito: ERRADO.

Conjunto das Partes

Você sabia que **podemos juntar todos os subconjuntos de um conjunto para formar um novo conjunto**? Esse novo conjunto formado é denominado **conjunto das partes** e é representado pelo **símbolo $\wp$**. Por exemplo, os **conjuntos das partes** de $A = \{a, b\}$ e de $B = \{a, b, c\}$ são:

$$\wp(A) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\wp(B) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Observe que $\wp(A)$ e $\wp(B)$ são **conjuntos formados por outros conjuntos**! Note ainda que **a sua quantidade de elementos é exatamente a quantidade de subconjuntos** calculada pela fórmula $\boldsymbol{nS_A = 2^{n(A)}}$. Um outro ponto que chamamos atenção é que, no conjunto das partes, listamos **o conjunto vazio** $\{\,\}$ explicitamente com um dos seus elementos.

HORA DE PRATICAR!

(CRQ 4/2023) Considerem-se A o conjunto dos meses do ano que começam com vogal, B o conjunto dos meses do ano que começam com consoante e C o conjunto dos meses do ano que começam com a letra J. Com base nessas informações, julgue o item.

O conjunto das partes de A tem 8 subconjuntos não vazios.

Comentários:

Vamos lá! O conjunto A é **formado pelos meses do ano que começam com vogal**, ou seja:

$$\text{A} = \{\text{abril, agosto, outubro}\}$$

O **conjunto das partes de A é o conjunto que contém todos os subconjuntos possíveis de A**, incluindo o subconjunto vazio e o próprio A. Para calcular o número de elementos do conjunto das partes de um conjunto finito, usa-se a fórmula $\boldsymbol{2^n}$**,** onde n é o número de elementos do conjunto original. No caso de A, $n = 3$, então o conjunto das partes de A tem $2^3 =$ **8 elementos**.

Porém, desses 8 elementos, um deles é o subconjunto vazio. Portanto, **o conjunto das partes de A tem 7 subconjuntos não vazios**, e não 8 como afirma o item.

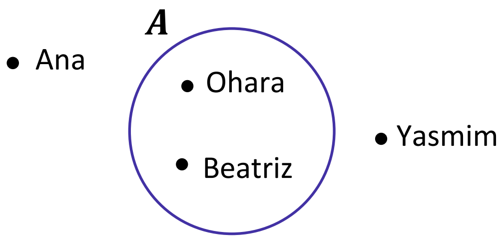
Os subconjuntos não vazios de A são: {abril}, {agosto}, {outubro}, {abril, agosto}, {abril, outubro}, {agosto, outubro} e {abril, agosto, outubro}.

Gabarito: ERRADO.

Operações com Conjuntos

Representação por Diagramas

Você deve ter visto ao longo da aula que **apareceram alguns conjuntos na forma de diagramas**. Esse tipo de representação é extremamente útil na resolução de questões, pois **possibilita uma melhor compreensão do problema**. Por exemplo, seja $\boldsymbol{A}$ o conjunto de funcionários de uma determinada empresa.



Todos aqueles que estão dentro do conjunto $\boldsymbol{A}$ **representam funcionários da empresa. Quem está fora, não é funcionário da empresa**. Olhando simplesmente para o diagrama, podemos dizer que:

- $Ohara \in A$;
- $Beatriz \in A$;
- $Yasmim \notin A$;
- $Ana \notin A$.

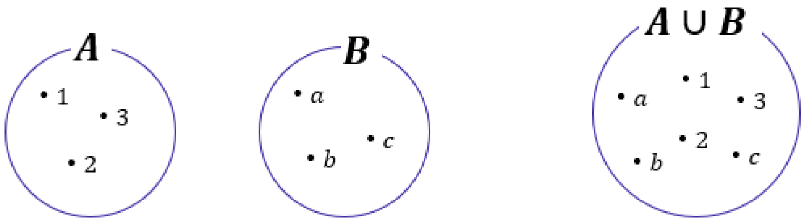
Esses diagramas são bastante conhecidos no meio matemático e possuem um nome especial: são os **Diagramas de Venn-Euler** ou, simplesmente, **Diagramas de Venn**. Esse tipo de representação é utilizado principalmente quando **precisamos representar vários conjuntos ao mesmo tempo**. Nos tópicos a seguir, usaremos bastante esses diagramas e você logo ficará habituado.

Existem diferentes maneiras de representarmos os conjuntos. A primeira dela é como fizemos no começo da aula, como por exemplo, em $V = \{a, e, i, o, u\}$. Chamamos esse tipo de representação de "**representação por enumeração".**

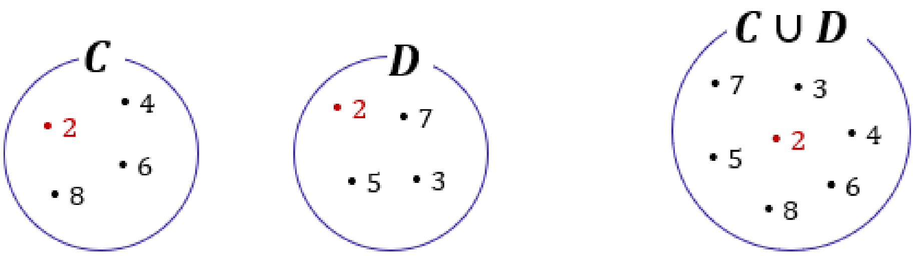
Ademais, temos a **representação por propriedade**. Para entender melhor, considere o mesmo conjunto V citado anteriormente. Ele também poderia ser escrito da seguinte forma: $V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}$. Por fim, temos a **representação por diagramas** que estudamos agora a pouco!

União

Nessa parte da nossa aula, veremos que existem **várias operações** que os conjuntos podem se submeter. A mais conhecida talvez seja **a união (ou reunião) de conjuntos**. A união de conjuntos é representada pelo **símbolo** ∪ e, basicamente, **funde dois conjuntos em um só**.



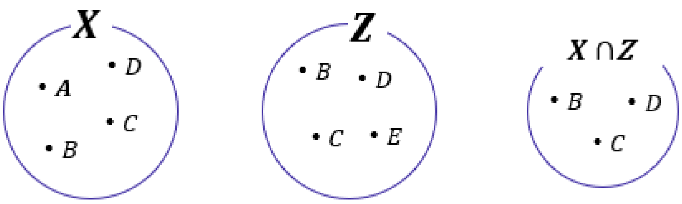
No diagrama acima, temos que $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Quando fazemos a união de A e B, criamos um conjunto que possui **todos os elementos dos dois conjuntos**, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$. Haverá casos em que os conjuntos possuirão um mesmo elemento e, quando for necessário fazer a união dos dois, **você não precisará escrever duas vezes o elemento repetido**. Observe um exemplo nos diagramas abaixo.



Note que **o 2 é um elemento comum aos dois conjuntos**: $C = \{2, 4, 8, 6\}$ e $D = \{2, 3, 5, 7\}$. Nessas situações, quando fazemos a união de conjuntos que possuem elementos em comum, **esse elemento não vai aparecer duas vezes no conjunto união**! Confira que $C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, **o 2 aparece apenas uma vez**.

Intersecção

A operação que seleciona **os elementos comuns entre dois ou mais conjuntos é denominada intersecção e é representada por** ∩. Por exemplo, nos diagramas acima o número 2 é o único elemento comum entre C e D. Logo, o conjunto intersecção será formado apenas pelo elemento 2: $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D} = \{\mathbf{2}\}$.



Temos que $X = \{A, B, C, D\}$ e $Z = \{B, C, D, E\}$. São dois conjuntos distintos, mas que **possuem alguns elementos em comum**. Os elementos B, C e D aparecem nos 2 conjuntos e formam o conjunto intersecção: $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Z} = \{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\}$. Vamos treinar um pouco esses conceitos?

(IBGE/2023) Assinale a alternativa que identifica corretamente a intersecção entre esses três conjuntos A = {1, 2, 5, 6, 7}, B = {2, 3, 4, 5, 6, 7} e C = {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

A) {2, 3, 5}

B) {2, 5}

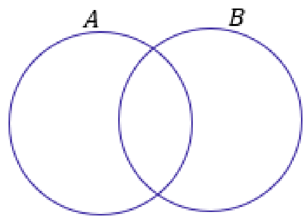
C) {6, 7}
D) {1, 2, 5}
E) {1, 2, 3, 4, 5}

Comentários:
A intersecção entre três conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem aos três conjuntos ao mesmo tempo. Portanto, **para encontrar a intersecção entre A, B e C, basta identificar quais elementos estão presentes nos três conjuntos dados**.

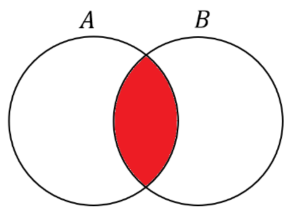
Assim, para encontrar a intersecção entre A, B e C, devemos verificar quais elementos satisfazem a condição de pertencer aos três conjuntos A, B e C. Dados os conjuntos A = {1, 2, 5, 6, 7}, B = {2, 3, 4, 5, 6, 7} e C = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, podemos ver que **os únicos elementos que cumprem essa condição são 2 e 5**. Portanto, a intersecção entre esses três conjuntos é o conjunto {2, 5}. Assim, a alternativa correta é a letra B.

Gabarito: LETRA B.

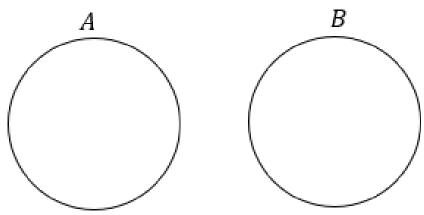
Quando dois conjuntos **possuem elementos em comum**, podemos representá-los assim:



Essa região comum representa exatamente a sua intersecção. Os elementos que estão na região em **vermelho** abaixo **pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B**.

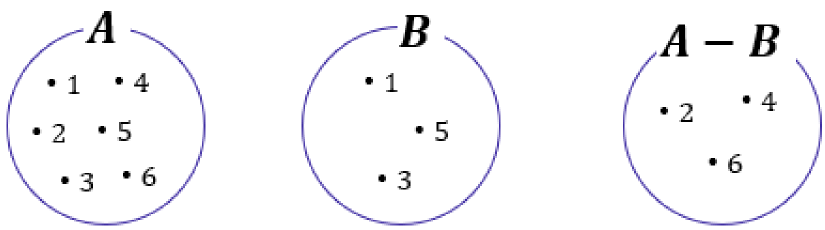


Caso os conjuntos não possuam elementos em comum, isto é, **não haja intersecção entre os dois**, nós vamos chamá-los de **disjuntos** e os representaremos utilizando círculos afastados um do outro.

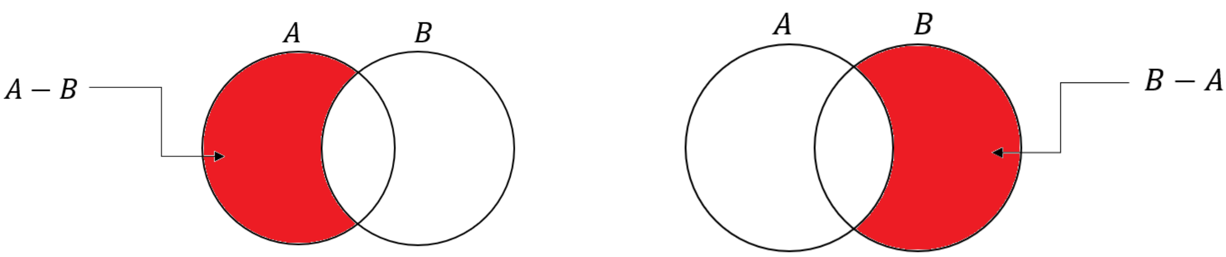


Diferença

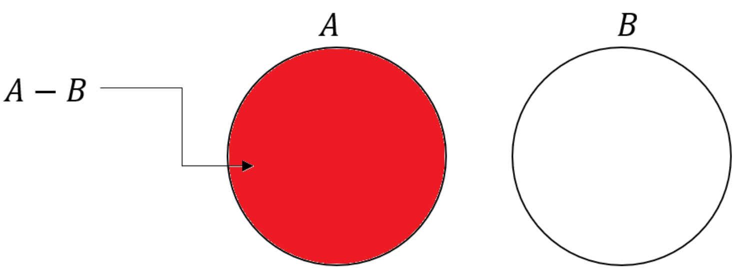
Existe uma outra operação que é muito importante para a sua prova! Essa operação **é a diferença ou, como também é conhecida, a subtração de conjuntos**! O conjunto diferença é representado por $\boldsymbol{A - B}$ e é formado por **todos os elementos de A que não são elementos de B**! Por exemplo, considere os conjuntos:



Observe que $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Para encontrar $A - B$, devemos selecionar **os elementos de $\boldsymbol{A}$ que não são elementos de $\boldsymbol{B}$**! Ou seja, **aqueles elementos que são apenas elementos de $\boldsymbol{A}$**! Observe que A e B possuem em comum os seguintes elementos: $A \cap B = \{1, 3, 5\}$. Logo, se $A = \{\mathbf{1}, 2, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6\}$, então o $A - B = \{2, 4, 6\}$. Em diagramas, também é possível representar o conjunto diferença.



Um detalhe importante é que se A e B são **conjuntos disjuntos**, então $\boldsymbol{A - B = A}$ **e** $\boldsymbol{B - A = B}$. Veja como essa informação pode ser representada:



Vamos fazer alguns **exemplos numéricos** para visualizar ainda melhor essa última situação. Considere os conjuntos $A = \{10, 20, 30\}$ e $B = \{40, 50\}$. **A e B são disjuntos pois não possuem elementos em comum!** São totalmente diferentes um outro. Agora, lembre-se que $\boldsymbol{A - B}$ **é o conjunto de elementos formados por todos os elementos de A que não são elementos de B**. Ora, nesse nosso exemplo, **<u>todos</u> os elementos de A não são elementos de B**!!

$$A - B = \{10, 20, 30\} = A$$

HORA DE PRATICAR!

(UFPB/2023) Sejam os conjuntos finitos A = {0,1,2,3,5,6} e B = {0,2,3,5,8}, então podemos dizer que:
A) A união entre os conjuntos A e B possui exatamente 8 elementos
B) A – B possui exatamente 2 elementos
C) B – A possui exatamente 2 elementos
D) A intersecção entre os conjuntos A e B possui exatamente 3 elementos
E) Os conjuntos A e B são disjuntos

Comentários:
Essa questão envolve várias operações e conceitos da Teoria dos Conjuntos! Vamos comentar cada uma das alternativas.

A) A união entre os conjuntos A e B possui exatamente 8 elementos
Incorreta! A união entre A e B é formada pelos elementos {0,1,2,3,5,6,8}, que **são 7 ao todo.**

B) A – B possui exatamente 2 elementos
Correta! A – B é formado pelos elementos que pertencem a A, mas não a B. Neste caso, temos que $A - B = \{1{,}6\}$, que **possui exatamente 2 elementos**.

C) B – A possui exatamente 2 elementos
Incorreta! $B - A$ é formado pelos elementos que pertencem a B, mas não a A. Neste caso, temos que $B - A = \{8\}$, que **possui apenas 1 elemento**.

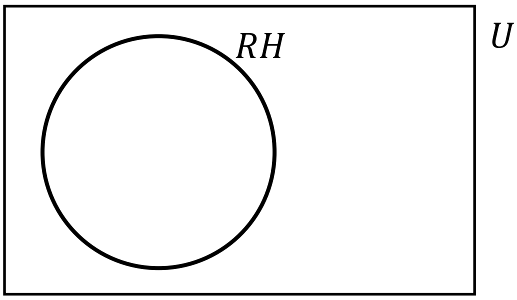
D) A intersecção entre os conjuntos A e B possui exatamente 3 elementos
Incorreta! A intersecção entre A e B é formada pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos ao mesmo tempo. Neste caso, temos que $A \cap B = \{0{,}2{,}3{,}5\}$, que possui **4 elementos**.

E) Os conjuntos A e B são disjuntos
Incorreta! Dois conjuntos são disjuntos **se não possuem nenhum elemento em comum**. Neste caso, podemos ver que A e B possuem vários elementos em comum, como 0, 2, 3 e 5.

Gabarito: LETRA B.

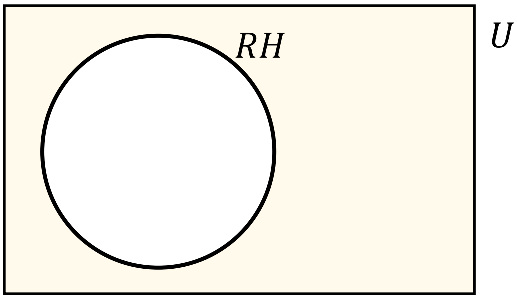
Complementar

Quando falamos de um determinado conjunto, normalmente **estamos destacando determinado grupo dentro de um universo maior**. Por exemplo, podemos formar um conjunto dos funcionários especializados em RH de uma empresa. Esse grupo de funcionários foi retirado de um conjunto maior: **o conjunto formado por todos os funcionários da empresa**. Acompanhe o diagrama abaixo.



Observe que o conjunto formado por aqueles especializados em RH está contido dentro de um conjunto U. **Esse conjunto maior é frequentemente chamado de conjunto universo** e, nesse exemplo, poderia representar **o conjunto de todos os funcionários da empresa**.

Quando estamos falando de conjunto universo, um novo conceito surge: **o conjunto complementar**. Lembre-se do conjunto que inventamos com os funcionários de uma empresa especializados em RH. *Qual o complementar desse conjunto?* Seria o conjunto formado por **todos os outros funcionários da empresa que não são especializados em RH!** Vamos mostrar no diagrama.



O complementar do conjunto RH é representado pela **parte pintada em amarelo**. Para determinar o complementar de qualquer conjunto, **é de fundamental importância conseguir identificar qual é o conjunto universo**. A notação utilizada para representar o complementar de um conjunto X é $\boldsymbol{X^C}$ **ou** $\boldsymbol{\overline{X}}$. Representamos o conjunto complementar com esse "expoente" C ou uma barra em cima. Ademais, podemos definir o conjunto complementar utilizando o que acabamos de ver **sobre conjunto diferença**.

$$\boxed{\overline{X} = X^C = U - X}$$

Veja que utilizando a definição acima, temos que o conjunto complementar X^C é formado por **tudo que está no conjunto universo, mas não está em X**.

HORA DE PRATICAR!

(CRAS/2023) Sendo $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 7, 10\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 5, 10, 11\}$, então o complementar de Y em X é:

A) $\{2, 3, 5, 10\}$.

B) $\emptyset$.

C) $\{-3, -2, -1\}$.

D) $\{11\}$.

E) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 7\}$.

Comentários:

O complementar de Y em X (C_X^Y) é o conjunto formado pelos **elementos que pertencem a X mas não pertencem a Y**. Para encontrar esse conjunto, temos que eliminar de X os elementos que são comuns a Y. Assim:

$$C_X^Y = X - Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, 7, \mathbf{10}\} - \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, \mathbf{10}, 11\}$$

Note que **os elementos comuns são {2,3,5,10}**. Logo, sobram os elementos {-3,-2,-1,0,1,7}, que formam o complementar de Y em X.

$$\boxed{\boldsymbol{X - Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 7\}}}$$

Gabarito: LETRA E.

Leis de De Morgan

Pessoal, as leis de De Morgan são dois teoremas que **relacionam as operações de união e intersecção de conjuntos com a complementação**. Elas foram formuladas pelo matemático britânico Augustus De Morgan no século 19 e podem ser enunciadas assim:

- O complemento da união de dois conjuntos é igual à intersecção dos complementos desses conjuntos.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

- O complemento da intersecção de dois conjuntos é igual à união dos complementos desses conjuntos.

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Essas leis nos permitem manipular expressões envolvendo conjuntos de maneiras diferentes e facilitam o entendimento de algumas propriedades dos conjuntos. Vamos ver alguns exemplos para ilustrar como elas funcionam.

Suponha que **A seja o conjunto dos números pares menores que 10** e que **B seja o conjunto dos números múltiplos de 3 menores que 10.** Temos que:

- $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $B = \{0, 3, 6, 9\}$
- $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Então, a união de A e B é o conjunto que contém todos os elementos de A ou de B, ou seja:

$$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

O complemento de A∪B é o conjunto que contém todos os elementos de U que não estão em A∪B, ou seja:

$$(A \cup B)^c = \{1, 5, 7\}$$

Por outro lado, **o complemento de A é o conjunto que contém todos os elementos que não estão em A**:

$$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

E **o complemento de B é o conjunto que contém todos os elementos que não estão em B**:

$$B^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

A **intersecção de A^c e B^c é o conjunto que contém todos os elementos que estão em A^c e em B^c**, ou seja:

$$A^c \cap B^c = \{1, 5, 7\}$$

Observe que **esse conjunto é exatamente o mesmo que o complemento de A ∪ B**. Isso mostra que a primeira lei de De Morgan é válida nesse caso. Podemos fazer um raciocínio análogo para mostrar a validade da segunda lei!

Princípio da Inclusão-Exclusão

Pessoal, muitas vezes vamos precisar **determinar o número de elementos de um conjunto**. Essa tarefa de contar **pode ficar um pouco complicada quando temos elementos que pertencem a mais de um conjunto**, pois, nesses casos, **devemos eliminar as repetições** para não contar o mesmo elemento duas vezes.

Nesse sentido, surge o Princípio da Inclusão-Exclusão (PIE). Esse princípio possibilita uma contagem exata da quantidade de elementos **de um conjunto formado pela união de vários outros, mesmo que contenham intersecções**.

➢ 2 Conjuntos

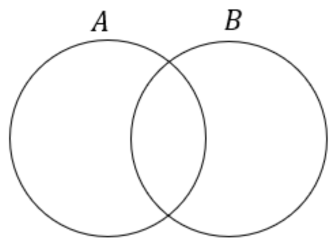
Imagine **dois conjuntos A e B com elementos em comum**. Se $n(A)$ é o número de elementos de A e $n(B)$ é o número de elementos de B, quanto vale $n(A \cup B)$?

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}}$$

Vamos tentar entender o caminho das pedras para chegar na relação acima. Considere os conjuntos:

- $A = \{1, 2, 3\} \quad \Rightarrow \quad n(A) = 3$
- $B = \{3, 4, 5\} \quad \Rightarrow \quad n(B) = 3$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \Rightarrow \quad n(A \cup B) = 5$
- $A \cap B = \{3\} \quad \Rightarrow \quad n(A \cap B) = 1$



Observe que **apesar da união entre A e B ser uma espécie de fusão entre os dois conjuntos**, o número de elementos na união, na maioria dos casos, **não é a soma direta do número de elementos de A com o número de elementos de B**.

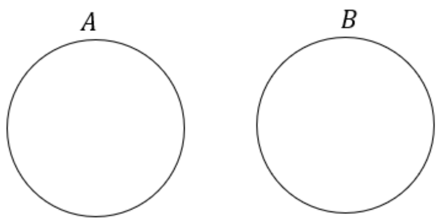
Perceba que **o elemento 3 aparece tanto em A como em B** e ao somar o número de elementos dos dois conjuntos **devemos considerar que estamos somando o mesmo elemento duas vezes!** É por isso esse motivo que devemos subtrair a quantidade de elementos que estão na intersecção. Já para **conjuntos disjuntos** temos que:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}}$$

pois:

$$\boldsymbol{n(A \cap B) = 0}.$$



HORA DE PRATICAR!

(PREF. CAMPOS DOS GOYTACAZES/2024) Certo congresso acadêmico organizado na universidade federal de determinado Estado contou com a participação de 160 pesquisadores e foi realizado em dois dias. O primeiro dia do congresso teve a participação de 120 pesquisadores e, no segundo, a participação foi de 100 pesquisadores. Considerando estas informações, quantos pesquisadores participaram dos dois dias do congresso?

A) 30.
B) 45.
C) 60.
D) 75.

Comentários:

Para resolver esta questão, podemos usar o **princípio da inclusão-exclusão**, que diz que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

No caso, o conjunto A é formado pelos pesquisadores que participaram do primeiro dia do congresso, e o conjunto B é formado pelos que participaram do segundo dia. **O número de elementos da união entre A e B é igual ao número total de pesquisadores, ou seja, 160**. Substituindo os dados na fórmula, temos:

$$160 = 120 + 100 - n(A \cap B)$$

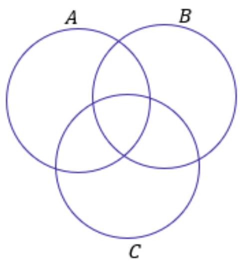
Simplificando, obtemos:

$$n(A \cap B) = 60$$

Gabarito: LETRA C.

➢ 3 Conjuntos

Imagine que você tem 3 conjuntos, **cada conjunto possui elementos em comum com os outros dois**. A situação **mais completa** que podemos imaginar está representada pelo diagrama abaixo.



Agora, considere que **você conhece a quantidade** de elementos de cada um dos conjuntos cima, isto é, $\boldsymbol{n(A)}$, $\boldsymbol{n(B)}$ **e** $\boldsymbol{n(C)}$**.** *Como você faria para encontrar* $\boldsymbol{n(A \cup B \cup C)}$ *? Será que é só somar as três quantidades?* **A resposta para essa pergunta é não!** Precisamos ter atenção aos **elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**.

Segundo o Princípio da Inclusão-Exclusão, a fórmula geral que permite calcular a quantidade de elementos de um **conjunto formado pela união de outros três** é dada por:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Vamos tentar entender com ela surge? Note que para achar a quantidade de elementos do conjunto união, primeiro **somamos individualmente as quantidades de cada um dos conjuntos**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C)}$$

No entanto, nós vimos que, ao fazer isso, **não estamos considerando os elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**. Essa soma dará, certamente, uma quantidade de elementos maior do que a quantidade real. *Mas, então, o que fazer?* **É preciso subtrair as quantidades dos elementos que estão nas intersecções, evitando assim a dupla contagem**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)}$$

Perceba que a fórmula ainda não está completa. Imagine um elemento que é **comum a todos os 3 conjuntos**, isto é, pertence a $A \cap B \cap C$. Esse elemento pertence tanto a A, quanto a B e a C. Quando fizemos a soma $n(A) + n(B) + n(C)$, **contamos ele três vezes**!

Quando fizemos a subtração $-n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$ estamos **tirando ele três vezes**! **Resultado: não estamos contando os elementos de** $\boldsymbol{A \cap B \cap C}$. Por esse motivo, **adicionamos** $\boldsymbol{n(A \cap B \cap C)}$**.** Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Eu sei que a fórmula **pode parecer um pouco complicada**, mas garanto que com **um pouco de paciência e resolução de exercícios**, ela se tornará **mais amigável e bastante intuitiva**! Além disso, também ensinarei um jeito que vocês poderão utilizar **caso não lembrem da fórmula**. Algumas vezes, no entanto, **a questão pode exigir a aplicação direta dela**. Confira o exercício abaixo.

HORA DE PRATICAR!

(ITAIPU/2024) A divisão de saúde da usina de Itaipu entrevistou 79 servidores a respeito dos seus hábitos esportivos. Nessa pesquisa, verificou-se que:

- 35 jogam futebol;
- 35 praticam natação;
- 30 jogam tênis;
- 11 praticam futebol e natação;
- 8 praticam natação e tênis;
- 6 praticam tênis e futebol;
- todos os entrevistados praticam algum esporte.

Na situação apresentada, o número de entrevistados que praticam todos os esportes é igual a
A) 1.
B) 3.
C) 4.
D) 6.
E) 11.

Comentários:
Para resolver essa questão, podemos usar o princípio da inclusão-exclusão!

$$\boxed{\boldsymbol{n(F \cup N \cup T) = n(F) + n(N) + n(T) - n(F \cap N) - n(F \cap T) - n(N \cap T) + n(F \cap N \cap T)}}$$

- "F" representa o conjunto daqueles que jogam futebol;
- "N" representa o conjunto daqueles que praticam natação;
- "T" representa o conjunto daqueles que jogam tênis;

De acordo com o enunciado, podemos retirar as seguintes informações:

- 35 jogam **futebol:**

$$n(F) = 35$$

- 35 praticam **natação**:

$$n(N) = 35$$

- 30 jogam **tênis**:

$$n(T) = 30$$

- 11 praticam **futebol e natação**;

$$n(F \cap N) = 11$$

- 8 praticam **natação e tênis**;

$$n(N \cap T) = 8$$

- 6 praticam **tênis e futebol**:

$$n(F \cap T) = 6$$

- todos os entrevistados (79) praticam algum esporte.

$$\boldsymbol{n(F \cup N \cup T) = 79}$$

Pronto! Podemos substituir essas quantidades na fórmula:

$$79 = 35 + 35 + 30 - 11 - 6 - 8 + n(F \cap N \cap T)$$

Simplificando:

$$79 = 75 + n(F \cap N \cap T)$$

$$\boxed{\boldsymbol{n(F \cap N \cap T) = 4}}$$

Gabarito: LETRA C.

Em algumas questões **não precisaremos aplicar diretamente a fórmula acima**. Será necessário um trabalho mais braçal da nossa parte, para chegar à resposta. Muitas vezes a questão pede valores específicos que vão surgir de uma maneira mais fácil **se a gente for completando o diagrama de Venn** com as quantidades.

> Para contar elementos em um diagrama de Venn, o primeiro passo é sempre inserir a quantidade de elementos que possui a intersecção dos três conjuntos! Depois, partimos para as intersecções duplas e, por fim, analisamos a quantidade de elementos exclusivos de cada conjunto. Vamos ver na prática como fazemos isso?

(UNICAMP/2024) Num congresso, o número de pessoas que falam inglês é o dobro do número de pessoas que falam espanhol e é o triplo do número de pessoas que falam alemão. Há 3 pessoas que falam inglês e espanhol, 4 pessoas que falam inglês e alemão e 6 pessoas que falam espanhol e alemão. Não há ninguém que fale as três línguas. Há 447 pessoas que falam apenas uma dessas três línguas. Nessas condições, o número de pessoas que falam apenas inglês é igual a:

A) 294

B) 280

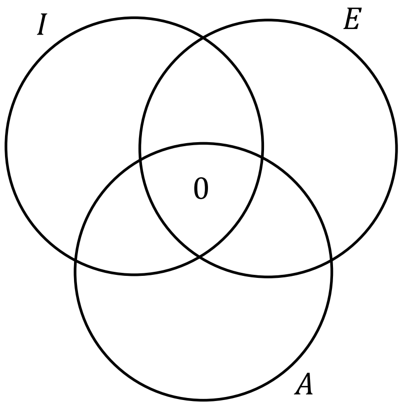
C) 273

D) 260

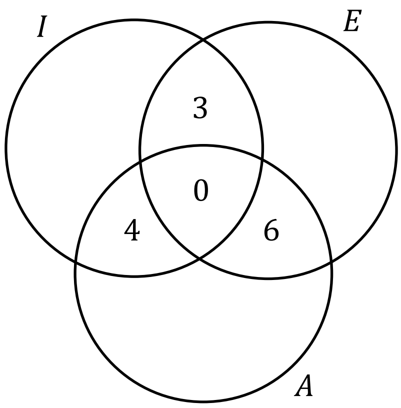
E) 251

Comentários:

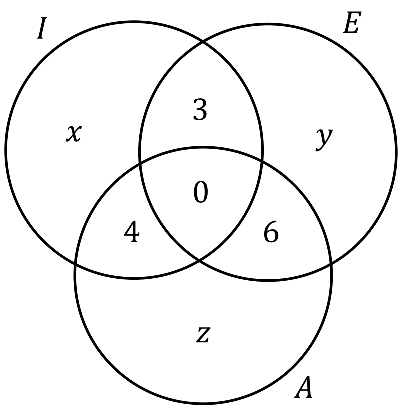
Vamos organizar as informações do enunciado em um diagrama. A primeira coisa que fazemos é colocar a **intersecção entre os três conjuntos**. Sendo assim, note que o enunciado diz que não há ninguém que fale as três línguas. Logo, essa intersecção é zero.



O enunciado também diz as intersecções dois a dois: **Há 3 pessoas que falam inglês e espanhol, 4 pessoas que falam inglês e alemão e 6 pessoas que falam espanhol e alemão**. No diagrama, ficamos:



Sobre as quantidades de pessoas que falam apenas inglês, apenas espanhol ou apenas alemão, o enunciado não fala nada. Por esse motivo, **vamos chamar essas quantidades de "x", "y" e "z",** respectivamente.



Ora, o enunciado afirma **447 pessoas falam apenas uma dessas três línguas**. Logo:

$$x + y + z = 447 \qquad (1)$$

Por sua vez, temos que **o número de pessoas que falam inglês é o dobro do número de pessoas que falam espanhol**. Logo:

$$(x + 3 + 0 + 4) = 2 \cdot (3 + y + 0 + 6)$$

$$x + 7 = 2y + 18$$

$$x = 2y + 11 \qquad (2)$$

Por fim, sabemos também que **o número de pessoas que falam inglês é o triplo do número de pessoas que falam alemão**. Logo:

$$(x + 3 + 0 + 4) = 3 \cdot (z + 0 + 4 + 6)$$

$$x + 7 = 3z + 30$$

$$x = 3z + 23 \qquad (3)$$

Vamos isolar "y" em (2) e "z" em (3):

$$y = \frac{x - 11}{2} \qquad\qquad z = \frac{x - 23}{3}$$

Substituindo em (1):

$$x + \frac{(x - 11)}{2} + \frac{(x - 23)}{3} = 447$$

Multiplicando os dois membros da equação pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores, que é 6, obtemos:

$$6x + 3(x - 11) + 2(x - 23) = 2682$$

Simplificando e colocando em ordem, temos:

$$11x - 79 = 2682$$

Isolando x, obtemos:

$$x = \frac{(2682 + 79)}{11}$$

$$x = \frac{2761}{11}$$

$$\boxed{x = 251}$$

"x" é exatamente o valor procurado pela questão, pois é a quantidade de pessoas que falam apenas inglês.

Gabarito: LETRA E.

Questões Comentadas - Cesgranrio

Operações com Conjuntos

1. (CESGRANRIO/UNEMAT/2024) No departamento administrativo de uma universidade, os processos que implicam alteração dos proventos pertencem a pelo menos um dos seguintes conjuntos, podendo haver interseções:

P: conjunto formado pelos processos que incluem alguma solicitação de alteração de regime;
Q: conjunto formado pelos processos que incluem alguma solicitação de progressão funcional;
R: conjunto formado pelos processos que incluem alguma modificação de status de dependentes.

O conjunto $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}) \cap \boldsymbol{R}$ é formado pelos processos desse departamento administrativo que implicam alteração de proventos e que incluem alguma solicitação de:

A) modificação de *status* de dependentes e alguma de progressão funcional, mas nenhuma solicitação de alteração de regime.
B) alteração de regime, mas nenhuma solicitação de modificação de *status* de dependentes, nem de progressão funcional.
C) alteração de regime e alguma de modificação de *status* de dependentes, mas nenhuma de progressão funcional.
D) pelo menos um dos três tipos de solicitação.
E) cada um dos três tipos de solicitação.

Comentários:

Sabemos que o conjunto $P-Q$ é formado pelos elementos de **P que não são elementos de Q.** Portanto, é importante ter em mente que **em $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}$ não teremos qualquer elemento de Q!**

Com as definições do enunciado, é possível concluir que $P-Q$ é formado pelos processos que incluem alguma solicitação de alteração de regime, mas **não incluem solicitação de progressão funcional**.

Buscamos a **intersecção de $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}$ com $\boldsymbol{R}$**. Ora, a intersecção traz justamente os elementos que pertencem tanto a $P-Q$ quanto a R. Logo, $(P-Q) \cap R$ é formado por todos os processos que **incluem alguma solicitação de alteração de regime** e que também **incluem modificação de status de dependentes**, mas **não incluem solicitação de progressão funcional**. Para que fique mais claro, vamos analisar as alternativas.

A) modificação de *status* de dependentes e alguma de progressão funcional, mas nenhuma solicitação de alteração de regime.
Errado. Observe que o conjunto $(P-Q) \cap R$ não possui processo com solicitação de progressão funcional. Esses processos são "retirados" quando fazemos a diferença $P-Q$.

B) alteração de regime, mas nenhuma solicitação de modificação de *status* de dependentes, nem de progressão funcional.

Errado. O conjunto $(P - Q) \cap R$ possui processos com solicitação de modificação de status de dependentes. Esses processos "aparecem" quando fazemos a intersecção com R.

C) alteração de regime e alguma de modificação de *status* de dependentes, mas nenhuma de progressão funcional.

Correto! É o gabarito. Observe que o conjunto $(P - Q) \cap R$ tem elementos de P (alteração de regime) e de R (modificação de *status* de dependentes), mas não de Q (progressão funcional).

D) pelo menos um dos três tipos de solicitação.

Errado. O conjunto $(P - Q) \cap R$ não tem processos com solicitação de progressão funcional (Q).

E) cada um dos três tipos de solicitação.

Errado. O conjunto $(P - Q) \cap R$ não tem processos com solicitação de progressão funcional (Q).

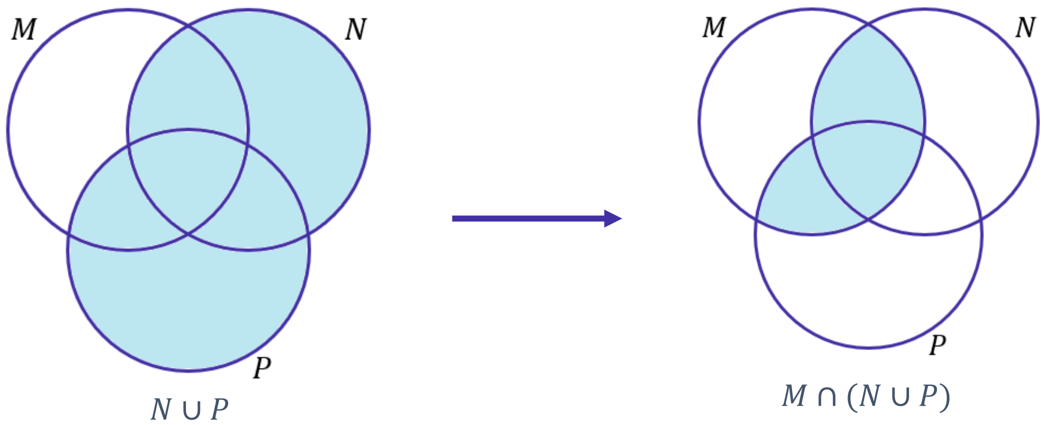
Gabarito: LETRA C.

2. (CESGRANRIO/BR/2015) Dados três conjuntos M, N e P, tem-se que o conjunto $\boldsymbol{M \cap (N \cup P)}$ é igual ao conjunto

a) $M \cap (N \cap P)$
b) $M \cap (N \cup P)$
c) $M \cup (N \cap P)$
d) $(M \cap N) \cup (M \cap P)$
e) $(M \cup N) \cap (M \cup P)$

Comentários:

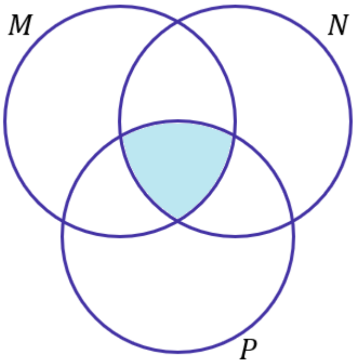
Vamos resolver o problema desenhando diagramas. Para começar, desenhe a região que o conjunto do enunciado representa. Depois, compare ela com cada um dos conjuntos do enunciado.



A região da direita é a que vamos buscar nas alternativas. Observe que primeiro desenhamos N∪P, para depois desenhar M∩(N∪P). Fomos por partes, e, sempre que possível, procederemos assim.

a) $M \cap N \cap P$

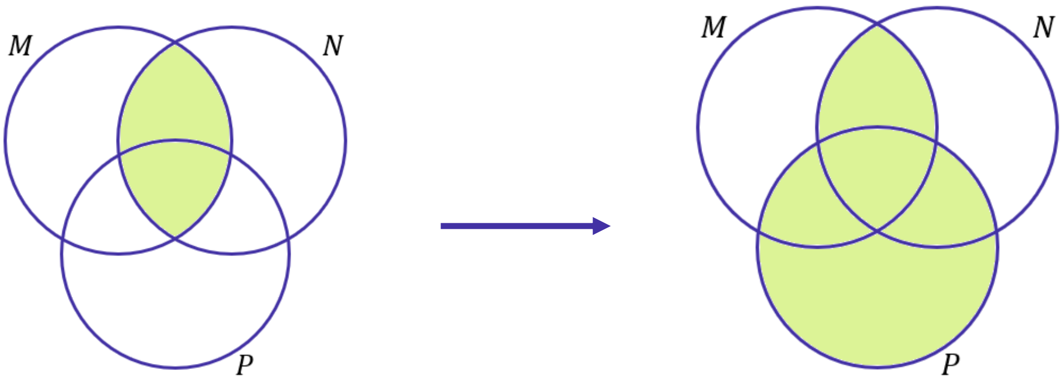
Alternativa incorreta. Note que $M \cap N \cap P$ é exatamente a intersecção dos três conjuntos.



$M \cap (N \cap P)$

b) $(M \cap N) \cup P$

Alternativa incorreta.

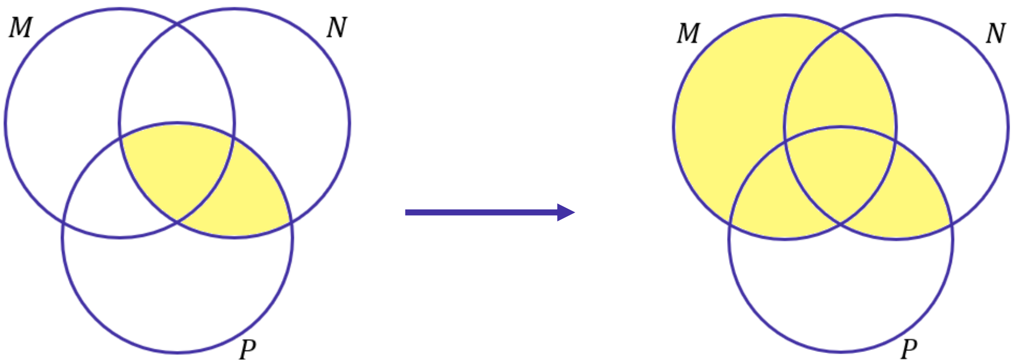


$M \cap N$

$(M \cap N) \cup P$

c) $M \cup (N \cap P)$

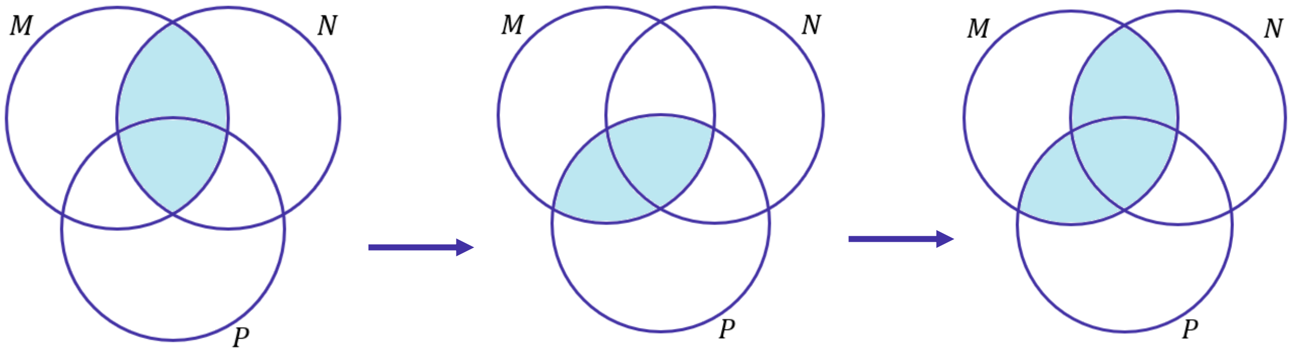
Alternativa incorreta.



$N \cap P$

$M \cup (N \cap P)$

d) $(M \cap N) \cup (M \cap P)$
Alternativa correta.

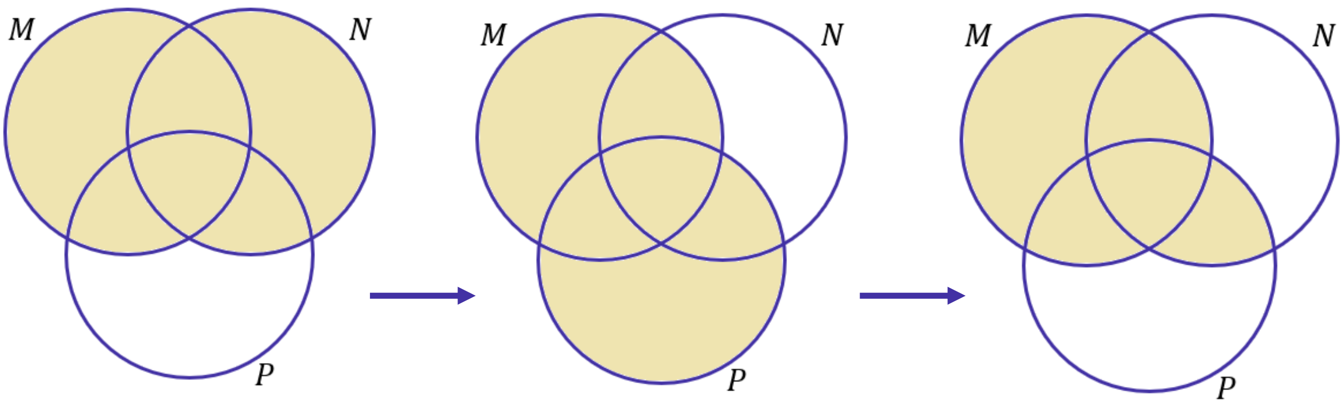


$M \cap N$ $\quad$ $M \cap P$ $\quad$ $(M \cap N) \cup (M \cap P)$

Veja que após os desenhos, a região obtida é igual ao conjunto proposto do enunciado. Desse modo, podemos escrever sem receio que:

$$M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$$

e) $(M \cup N) \cap (M \cup P)$
Alternativa incorreta.



$M \cup N$ $\quad$ $M \cup P$ $\quad$ $(M \cup N) \cap (M \cup P)$

Gabarito: LETRA D.

3. (CESGRANRIO/BASA/2014) O conjunto diferença X - Y, entre dois subconjuntos X e Y de um mesmo conjunto universo U, é definido por:

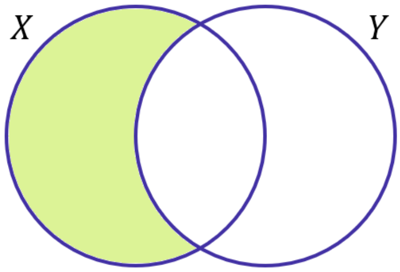
$$\boldsymbol{X - Y = \{u \in U / u \in X \ e \ u \notin Y\}}$$

Considere três subconjuntos, A, B e C, do mesmo conjunto Universo U. O conjunto $A - (B \cap C)$ é igual ao conjunto

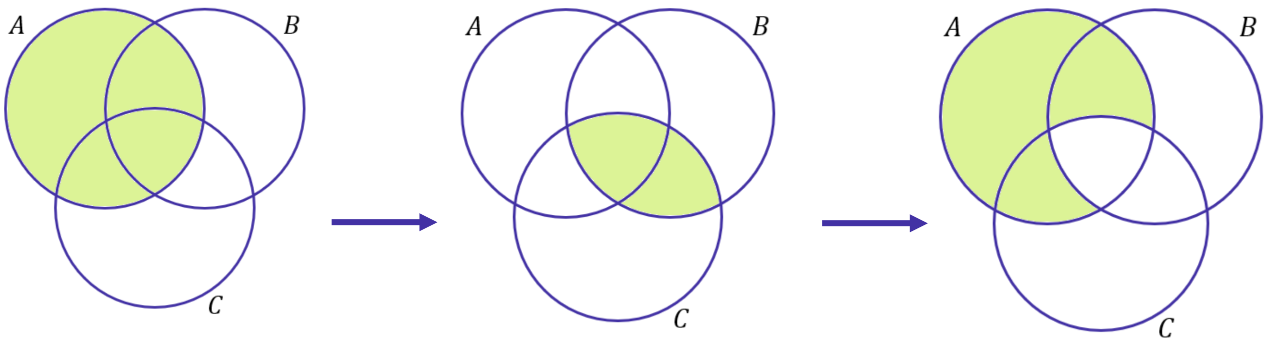
a) $(A - B) \cap (A - C)$.
b) $(A - B) \cup (A - C)$.
c) $(A - B) \cap C$.
d) $(A - B) \cup C$.
e) $(A - B) - C$.

Comentários:

Essa é uma questão parecida com a anterior, mas que envolve o conjunto diferença. O conjunto $X - Y$ vai trazer todos aqueles elementos que são de X mas não são de Y. Em diagramas, ele é representado por:



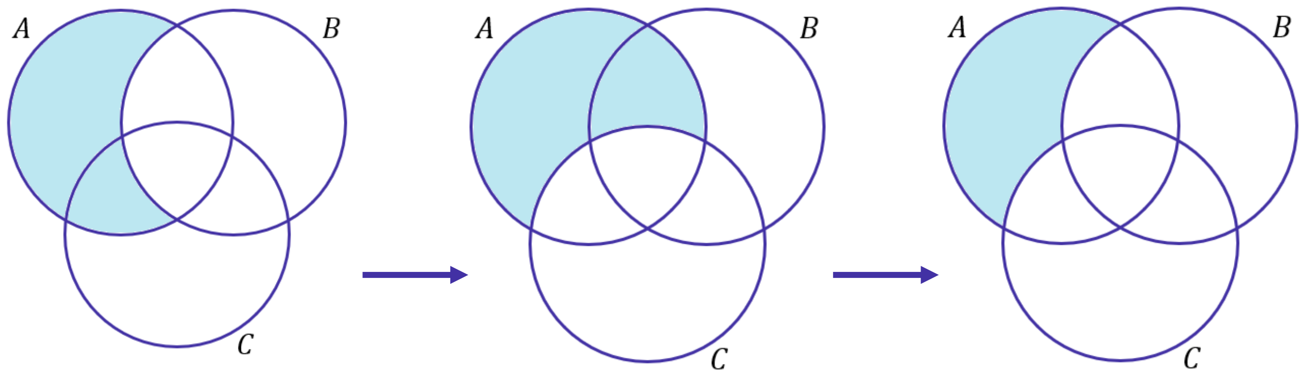
Vamos proceder de forma muito semelhante à questão anterior. Primeiro, identificando a região representativa do conjunto do enunciado, depois vamos analisar as alternativas em busca de uma igual. O enunciado trouxe o conjunto $\boldsymbol{A - (B \cap C)}$.



A $\qquad$ $B \cap C$ $\qquad$ $\boldsymbol{A - (B \cap C)}$

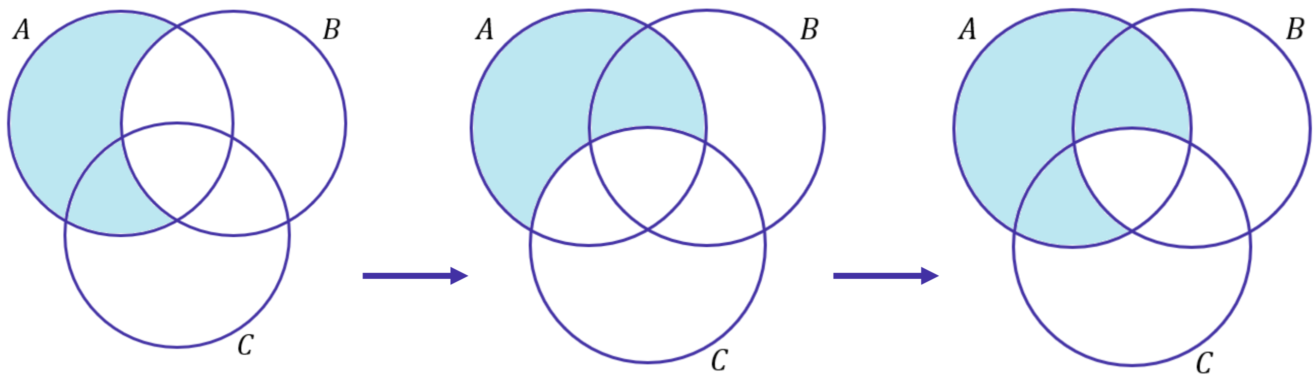
Agora vamos analisar as alternativas.

a) $(A - B) \cap (A - C)$.
Alternativa incorreta.



$A - B$ $A - C$ $(A - B) \cap (A - C)$

b) $(A - B) \cup (A - C)$.
Alternativa correta.

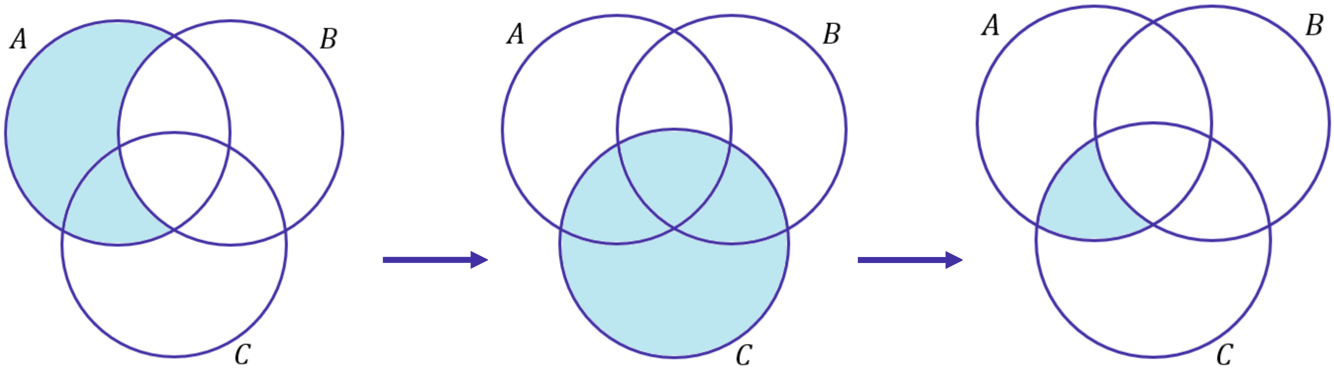


$A - B$ $A - C$ $(A - B) \cup (A - C)$

Veja que é exatamente a mesma região do enunciado e, por esse motivo, podemos escrever que:

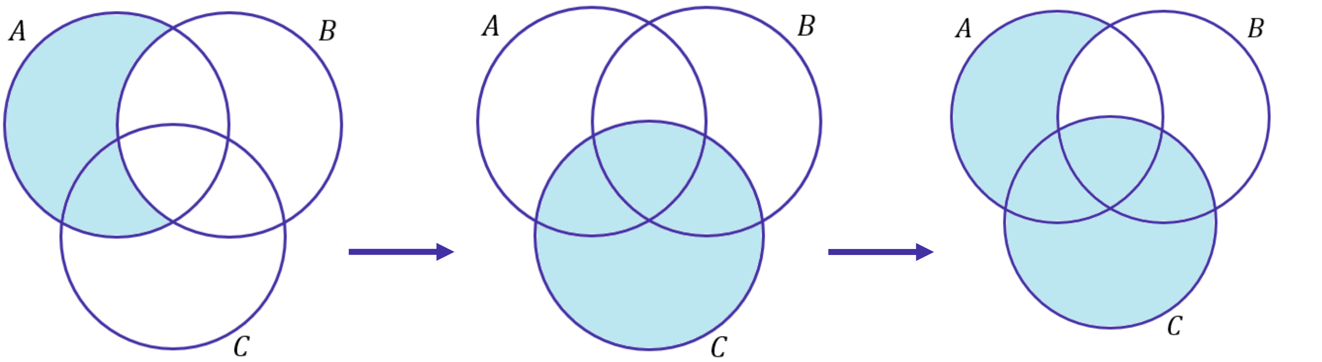
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

c) $(A - B) \cap C$.
Alternativa incorreta.



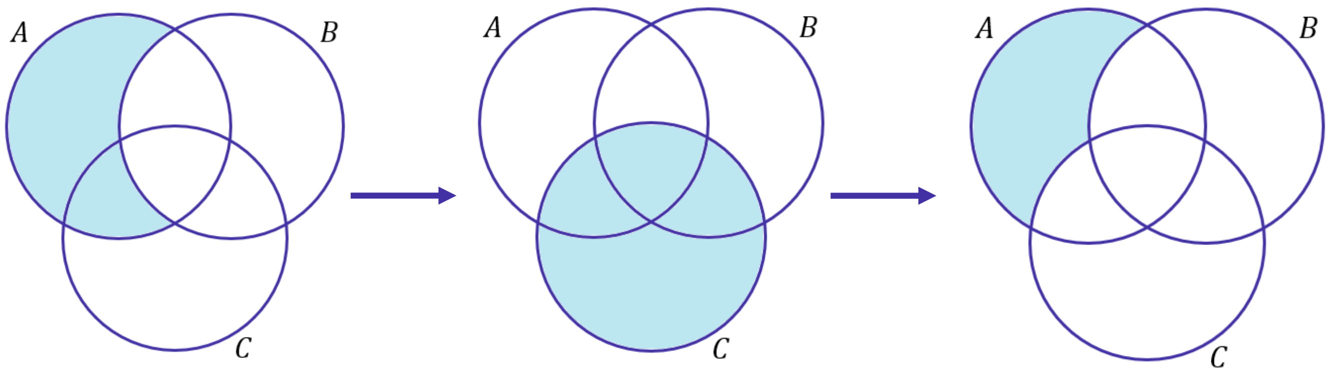
$A - B$ | C | $(A - B) \cap C$

d) $(A - B) \cup C$.
Alternativa incorreta.



$A - B$ | C | $(A - B) \cup C$

e) $(A - B) - C$.
Alternativa incorreta.



$A - B$ | C | $(A - B) - C$

Gabarito: LETRA B.

4. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Considere um conjunto U, do qual X é um subconjunto não vazio e próprio. Seja Y o complemento do complemento de X (os complementos sendo considerados em relação a U). Então, a

a) união de X e Y é igual a U.

b) diferença de X e Y é igual a U.

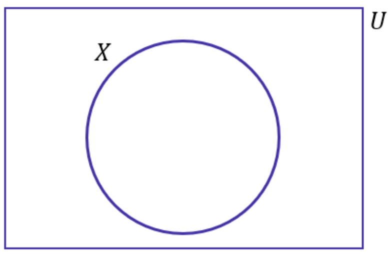
c) intercessão de X e Y é vazia.

d) intercessão de X e Y é igual a U.

e) intercessão de X e Y é igual a X.

Comentários:

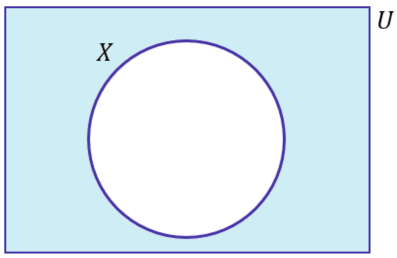
Essa é uma questão bem estilo pegadinha. O aluno com certeza ficaria com uma pulga atrás da orelha (rsrs). Nós **temos o conjunto universo U e um subconjunto X**. Em diagramas, seria algo como a situação a seguir:



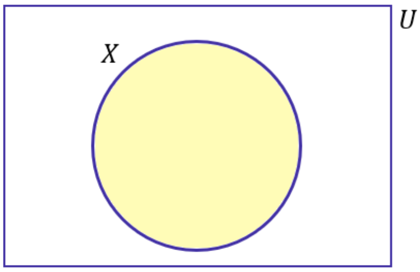
Quem é o complemento de X? Ora, **o complemento de X é o conjunto formado por todos aqueles elementos que pertencem ao conjunto U, mas não pertencem a X**. Em termos matemáticos,

$$X^C = U - X$$

No diagrama, seria a região representada abaixo:



Agora, quem seria o complemento do complemento de X? Ora, seria o conjunto formado por todos aqueles elementos que pertencem ao conjunto U mas não pertencem ao complemento de X. Em diagramas,



Veja que é o próprio conjunto X! A conclusão que chegamos é que o complementar do complementar de um conjunto é o próprio conjunto! Matematicamente,

$$(X^C)^C = X$$

Portanto, **se Y é o complementar do complementar de X, então Y é o próprio X**. Tudo bem, pessoal?! Vamos analisar as alternativas.

a) união de X e Y é igual a U.
Alternativa incorreta. A união de X e Y é o próprio X, afinal X=Y.

b) diferença de X e Y é igual a U.
Alternativa incorreta. Se X=Y, então a diferença de X e Y não pode ser igual a U. Na verdade, é o conjunto ∅.

c) intercessão de X e Y é vazia.
Alternativa incorreta. Se X=Y, então a intercessão de X e Y é o próprio X.

d) intercessão de X e Y é igual a U.
Alternativa incorreta. Se X=Y, então a intercessão de X e Y é o próprio X.

e) intercessão de X e Y é igual a X.
Alternativa correta. É exatamente isso moçada, afinal, X=Y. Assim, a intercessão de X com ele mesmo fornece o próprio conjunto X.

Gabarito: LETRA E.

QUESTÕES COMENTADAS - CESGRANRIO

Princípio da Inclusão-Exclusão

1. (CESGRANRIO/CNU/2024) Um técnico fez três buscas em um banco de dados com 600 alunos cadastrados. Na primeira busca, identificou que 450 alunos cursaram a disciplina A; a segunda busca gerou a informação de que 300 alunos cursaram a disciplina B. E uma terceira busca identificou que 200 alunos cursaram as duas referidas disciplinas (A e B). Sabe-se que esse banco de dados não sofreu alterações quando as três buscas foram realizadas. A partir dessas informações, constata-se que o número de alunos que não cursaram nenhuma dessas duas disciplinas é igual a

A) 50

B) 100

C) 150

D) 200

E) 250

Comentários:

Vamos separar as informações passadas pelo enunciado:

- Total de alunos cadastrados no banco de dados: $n(U) = 600$
- Alunos que cursaram a disciplina A: $n(A) = 450$
- Alunos que cursaram a disciplina B: $n(B) = 300$
- Alunos que cursaram ambas as disciplinas (A e B): $n(A \cap B) = 200$

Utilizando o **Princípio da Inclusão-Exclusão**, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$n(A \cup B) = 450 + 300 - 200 = 550$$

O número de alunos que **não cursaram nenhuma das disciplinas** é dado por:

$$n[(A \cup B)^C] = n(U) \; - \; n(A \cup B)$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$n[(A \cup B)^C] = 600 \; - \; 550 \; = \; \mathbf{50}$$

Portanto, **o número de alunos que não cursaram nenhuma dessas duas disciplinas é igual a 50.**

Gabarito: LETRA A.

2. (CESGRANRIO/BANRISUL/2023) Um banco possui um total de 1000 clientes, dos quais apenas 700 investem em pelo menos um dos fundos A ou B. Sabe-se que o total de clientes que investem em ambos os fundos é igual a 250, e que pelo menos 100 clientes investem apenas no fundo B. Qual é o número máximo de clientes que investem apenas no fundo A?

A) 350

B) 600

C) 650

D) 800

E) 900

Comentários:

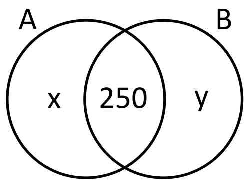
Como 700 investem em pelo menos um dos fundos A ou B, escrevemos:

$$n(A \cup B) = 700$$

Por sua vez, 250 clientes investem em ambos os fundos, assim:

$$n(A \cap B) = 250$$

Agora, vamos desenhar o diagrama para nos auxiliar na visualização do problema.



Considere que "x" é a quantidade de clientes que investem apenas no fundo A, enquanto "y" é a quantidade de clientes que investem apenas no fundo B. Dito isso, quando somamos as quantidades destacadas no diagrama, devemos obter o total de clientes que investem em algum dos fundos, ou seja:

$$x + 250 + y = 700$$

$$x + y = 450$$

De acordo com o enunciado, **pelo menos 100 clientes investem apenas no fundo B**. Com isso, a quantidade máxima de clientes que investem apenas no fundo A é:

$$x + 100 = 450$$

$$\boxed{\mathbf{x = 350}}$$

Gabarito: LETRA A.

3. (CESGRANRIO/BB/2021) Antes de iniciar uma campanha publicitária, um banco fez uma pesquisa, entrevistando 1000 de seus clientes, sobre a intenção de adesão aos seus dois novos produtos. Dos clientes entrevistados, 430 disseram que não tinham interesse em nenhum dos dois produtos, 270 mostraram-se interessados no primeiro produto, e 400 mostraram-se interessados no segundo produto. Qual a porcentagem do total de clientes entrevistados que se mostrou interessada em ambos os produtos?

A) 10%
B) 15%
C) 20%
D) 25%
E) 30%

Comentários:

Vamos chamar o conjunto daqueles que ficaram interessados no primeiro produto de "P" e daqueles interessados no segundo produto de "S".

Para começar, vamos determinar quantas pessoas estão interessadas em pelo menos um dos produtos. Como tivemos **1000 entrevistados** e 430 disseram que não tinham interesse em nenhum dos dois produtos:

$$n(P \cup S) = 1000 - 430$$

$$n(P \cup S) = 570$$

Por sua vez, temos que **270 mostraram-se interessados no primeiro produto** enquanto **400 mostraram-se interessados no segundo produto**.

$$n(P) = 270$$

$$n(S) = 400$$

Temos todas as informações para usarmos o **Princípio da Inclusão-Exclusão**.

$$n(P \cup S) = n(P) + n(S) - n(P \cap S)$$

Substituindo o que temos:

$$570 = 270 + 400 - n(P \cap S)$$

$$570 = 670 - n(P \cap S)$$

$$n(P \cap S) = 100$$

Como queremos **a porcentagem do <u>total de clientes</u>** entrevistados que se mostrou interessadas em ambos os produtos, fazemos:

$$p = \frac{n(P \cap S)}{1000} \quad \rightarrow \quad p = \frac{100}{1000} \quad \rightarrow \quad \boxed{p = 0{,}1 = 10\%}$$

Gabarito: LETRA A.

4. (CESGRANRIO/BB/2021) Um banco está selecionando um novo escriturário e recebeu um total de 50 currículos. Para o exercício desse cargo, três habilidades foram especificadas: comunicação, relacionamento interpessoal e conhecimento técnico. As seguintes características foram detectadas entre os candidatos a essa vaga:

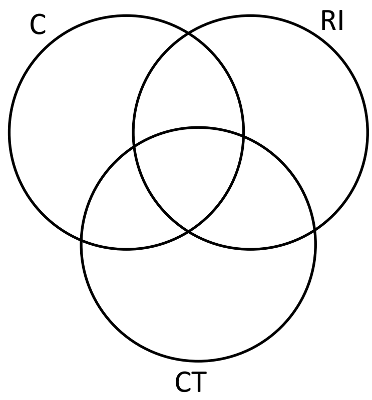
- 15 apresentavam habilidade de comunicação;
- 18 apresentavam habilidade de relacionamento interpessoal;
- 25 apresentavam conhecimento técnico;
- Seis apresentavam habilidade de relacionamento interpessoal e de comunicação;
- Oito apresentavam habilidade de relacionamento interpessoal e conhecimento técnico;
- Dois candidatos apresentavam todas as habilidades;
- Oito candidatos não apresentavam nenhuma das habilidades.

Com base nessas informações, qual o número total de candidatos que apresentam apenas uma das três habilidades apontadas?

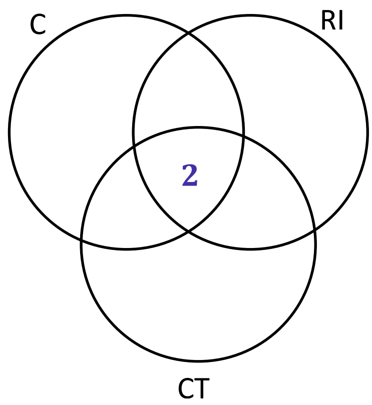
A) 28
B) 38
C) 21
D) 13
E) 15

Comentários:

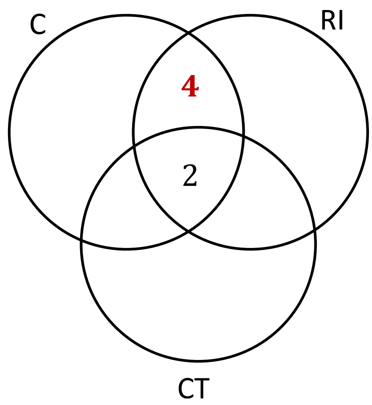
Nessa questão, desenharemos o diagrama passo a passo! Para isso, considere que "C", "RI" e "CT" sejam os conjuntos formados por aqueles que apresentam as habilidades de comunicação, relação interpessoal e conhecimento técnico, respectivamente.



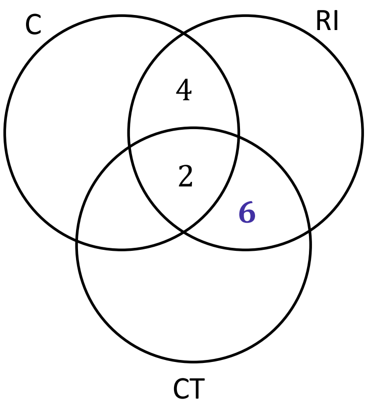
Sempre começamos a preencher o diagrama pela "intersecção tripla". Assim, de acordo com o enunciado, **dois candidatos apresentam as três habilidades**. Assim:



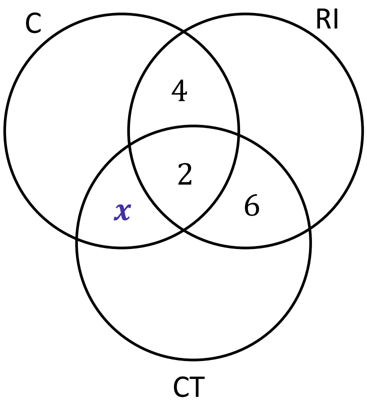
Agora, partimos para as "intersecções duplas". Lembre-se sempre de descontar o que já foi inserido anteriormente. Por exemplo, **6 apresentam as habilidades de "RI" e "C".** Como já contabilizamos 2 na "intersecção tripla", colocamos apenas o 4 no diagrama para fechar os 6 da região. Observe:



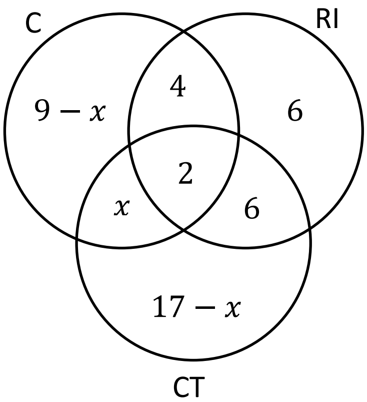
Por sua vez, a questão informa também que **oito apresentavam habilidade de relacionamento interpessoal e conhecimento técnico.** No diagrama, ficamos:



Como nada foi informado sobre aqueles que possuem as habilidades de comunicação e conhecimento técnico, então vamos chamar essa quantidade de "x".



Agora, vamos para a quantidade em cada um dos conjuntos. De acordo com o enunciado, temos **15 que apresentam a habilidade de comunicação, 18 a de relacionamento interpessoal e 25 a de conhecimento técnico.** No diagrama:



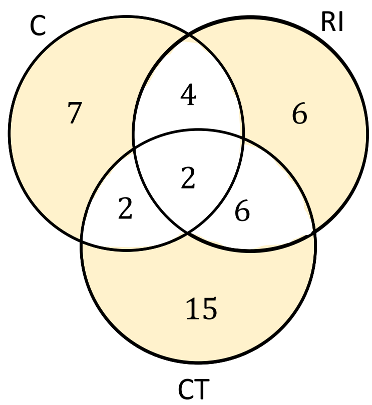
Pronto! Com o diagrama esquematizado, vamos determinar o valor de "x". Note que foram 50 currículos, mas **8 não apresentavam nenhuma habilidade**. Sendo assim, no total, temos 42 candidatos que apresentam pelo menos uma das habilidades. A soma das regiões do diagrama deve traduzir justamente essa quantidade.

$$(9 - x) + 4 + 6 + x + 2 + 6 + (17 - x) = 42$$

$$44 - x = 42$$

$$x = 2$$

Pronto! Com o valor de "x", podemos completar nosso diagrama e destacar a região procurada (aquela em que os candidatos apresentam apenas uma habilidade).



Somamos os currículos das regiões destacadas.

$$S = 7 + 6 + 15$$

$$\boxed{S = 28}$$

Gabarito: LETRA A.

5. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Um grupo de fornecedores foi dividido em três conjuntos, de acordo com o atendimento a três critérios de qualidade, denominados critérios A, B e C. Após uma análise, observou-se que apenas quatro empresas atendem aos três critérios; seis empresas atendem aos critérios B e C; dez empresas atendem ao critério C, mas não atendem ao A; doze empresas atendem ao critério B, mas não atendem ao A, e vinte e três empresas atendem a, pelo menos, um dos critérios A ou B. Considerando-se que nesse grupo de fornecedores não existe empresa que não atenda a, pelo menos, um dos três critérios, o número total de empresas desse grupo, isto é, $n(AUBUC)$, é igual a

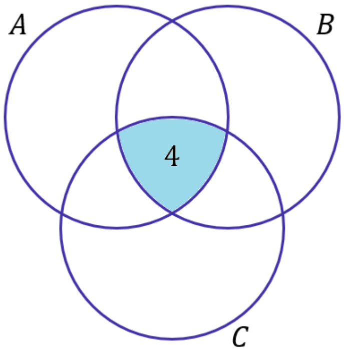
a) 21

b) 25
c) 27
d) 29
e) 31

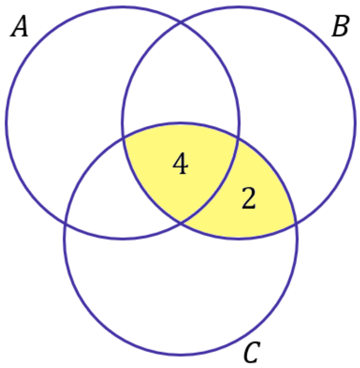
Comentários:

Galera, um jeito legal de resolver esse exercício é **por meio dos diagramas** que vimos ao longo da aula. Pegamos cada uma das informações passadas no enunciado e tentamos encaixá-las no desenho. Veja.

- **quatro empresas** atendem aos três critérios.

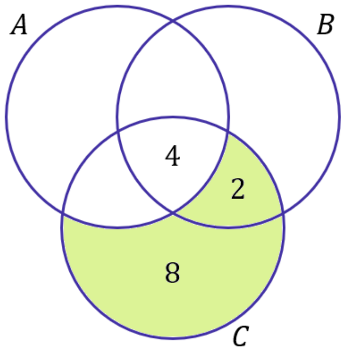


- **seis empresas** atendem aos critérios B e C.



Devemos perceber que a informação não nos diz que as empresas atendem APENAS aos critérios B e C. Dessa forma, **uma empresa que atende aos três critérios está inserida nessa conta**. Por isso, para completar os seis, adicionamos apenas mais duas empresas na região de intersecção dos dois critérios.

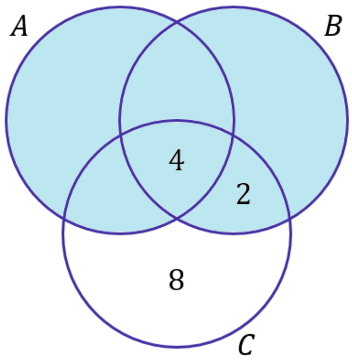
- dez empresas atendem ao critério C, mas não atendem a A.



A região verde representa as empresas que atendem ao critério C, mas não atendem ao A. Nessa parte do diagrama, **já tínhamos contabilizado duas empresas** no item anterior. Portanto, faltou apenas oito empresas que contabilizamos na região das empresas que atendem apenas ao critério C.

- vinte e três empresas atendem a, **pelo menos**, um dos critérios A ou B.

Essa informação é, talvez, a mais importante. Na prática, o enunciado está nos dizendo que toda a região marcada abaixo contabiliza **23 pessoas**:



Como sabemos que todas as empresas **cumprem ao menos um dos critérios**, então o total de empresas é a soma dessas 23 com as 8 que ficaram de fora (aquelas empresas que **apenas** atenderam ao critério C).

$$n(A \cup B \cup C) = 23 + 8 \quad \rightarrow \quad n(A \cup B \cup C) = 31$$

Gabarito: LETRA E.

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) Os conjuntos P e Q têm p e q elementos, respectivamente, com $p + q = 13$. Sabendo-se que a razão entre o número de subconjuntos de P e o número de subconjuntos de Q é 32, quanto vale o produto pq?

a) 16

b) 32

c) 36
d) 42
e) 46

Comentários:

Na teoria, vimos que o número de subconjuntos depende da quantidade de elementos do conjunto principal. Por exemplo, **se um conjunto tem 3 elementos, então ele terá $2^3 = 8$ subconjuntos**. Lembre-se da fórmula:

$$nS_A = 2^{n(A)}$$

$\boldsymbol{nS_A}$ **representa o número de subconjuntos de A** e $\boldsymbol{n(A)}$ **é o número de elementos de A**. Como o conjunto P tem p elementos e o conjunto Q tem q, podemos escrever:

$$nS_P = 2^{n(P)} \quad \rightarrow \quad nS_P = 2^p$$

$$nS_Q = 2^{n(Q)} \quad \rightarrow \quad nS_Q = 2^q$$

O enunciado diz que a razão entre o número de subconjuntos de P e o número de subconjuntos de Q é 32. Assim,

- $$\frac{nS_P}{nS_Q} = \frac{2^p}{2^q} = 32 \quad \rightarrow \quad 2^{p-q} = 32 \quad \rightarrow \quad 2^{p-q} = 2^5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p - q = 5}$$

Veja que o enunciado também informou que $\boldsymbol{p + q = 13}$. Temos duas equações e duas incógnitas. Podemos montar um sistema de equações.

$$\begin{cases} p + q = 13 & (1) \\ p - q = 5 & (2) \end{cases}$$

Podemos **isolar "p"** na equação (2):

$$p = q + 5$$

Agora, devemos substituir p na equação (1).

$$(q + 5) + q = 13 \quad \rightarrow \quad 2q + 5 = 13 \quad \rightarrow \quad 2q = 8 \quad \rightarrow \quad q = 4$$

Encontramos o valor de q. Agora, podemos substituir em $p = q + 5$.

$$p = 4 + 5 \quad \rightarrow \quad p = 9$$

Com os valores de p e q determinados, podemos encontrar o produto.

$$pq = 4 \cdot 9 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{pq = 36}$$

Gabarito: LETRA C.

7. (CESGRANRIO/IBGE/2014) Em uma central de telemarketing com 42 funcionários, todos são atenciosos ou pacientes. Sabe-se que apenas 10% dos funcionários atenciosos são pacientes e que apenas 20% dos funcionários pacientes são atenciosos. Quantos funcionários são atenciosos e pacientes?

a) 1
b) 3
c) 9
d) 12
e) 27

Comentários:

Seja A um conjunto que formado pelos funcionários que são atenciosos. Seja P um conjunto formado pelos funcionários que são pacientes. De acordo com o enunciado, **42 funcionários são atenciosos ou pacientes**. Na prática, ele está nos informando que $n(A \cup P) = 42$. Antes de prosseguir, observe que a questão pede quantos funcionários são atenciosos e pacientes, $n(A \cap P)$. Beleza?! Vamos lá!

O enunciado afirma que **10% dos funcionários atenciosos são pacientes**. Em outras palavras:

$$n(A \cap P) = 10\% \cdot n(A) = 0{,}1 \cdot n(A) \qquad (1)$$

Por fim, ele também afirma que **20% dos funcionários pacientes são atenciosos**.

$$n(A \cap P) = 20\% \cdot n(P) = 0{,}2 \cdot n(P) \qquad (2)$$

Lembre-se do **Princípio da Inclusão-Exclusão**:

$$n(A \cup P) = n(A) + n(P) - n(A \cap P) \qquad (3)$$

Vamos escrever tanto $n(A)$ como $n(P)$ em função de $n(A \cap P)$. Da equação (1):

$$n(A \cap P) = 0{,}1 \cdot n(A) \quad \rightarrow \quad n(A) = \frac{n(A \cap P)}{0{,}1} \quad \rightarrow \quad n(A) = 10 \cdot n(A \cap P)$$

Da equação (2):

$$n(A \cap P) = 0{,}2 \cdot n(B) \quad \rightarrow \quad n(B) = \frac{n(A \cap P)}{0{,}2} \quad \rightarrow \quad n(B) = 5 \cdot n(A \cap P)$$

Substituindo esses resultados na equação (3) e usando que $\boldsymbol{n(A \cup P) = 42}$.:

$$42 = 10 \cdot n(A \cap P) + 5 \cdot n(A \cap P) - n(A \cap P)$$

$$42 = 14 \cdot n(A \cap P)$$

$$n(A \cap P) = \frac{42}{14} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n(A \cap P) = 3}$$

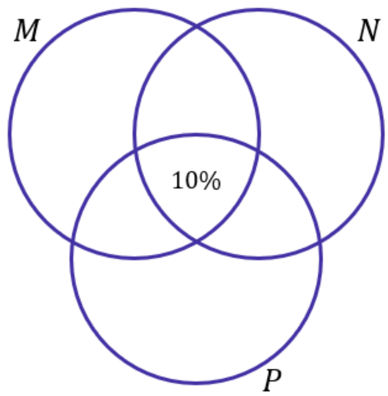
Gabarito: LETRA B.

8. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Numa certa comunidade, 35% de seus habitantes são leitores do jornal M; 40% são leitores do jornal N; 30% são leitores do jornal P; 25% leem os jornais M e N; 15% leem os jornais M e P; 20% leem os jornais N e P; e 10% leem os três jornais. Se o contingente de habitantes dessa comunidade que não leem nenhum dos três jornais está entre 270 e 360, então o contingente de leitores exclusivos do jornal M se situa entre

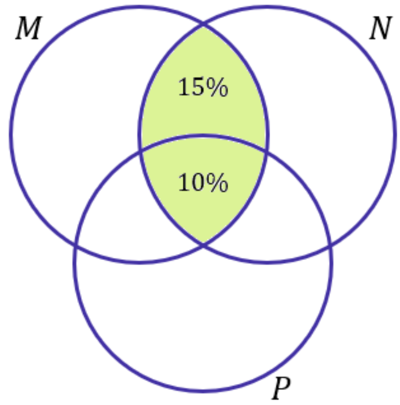
a) 30 e 50
b) 20 e 40
c) 30 e 40
d) 200 e 300
e) 210 e 280

Comentários:

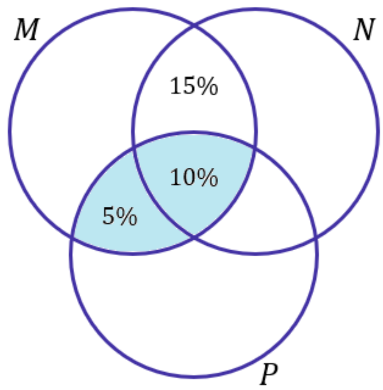
Pessoal, essa é uma questão que devemos usar os diagramas de Venn. Como estudamos, devemos sempre **tentar começar pela intersecção dos três conjuntos**. Nesse caso, a informação que diz que 10% leem os três jornais é o nosso ponto de partida.



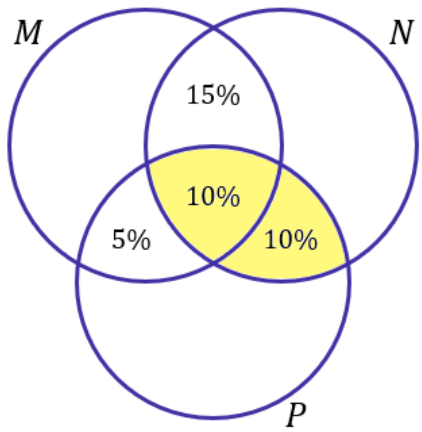
Agora, vamos analisar tudo que tem a ver com dois conjuntos. Por exemplo, a informação que diz que 25% leem os jornais M e N. Note que **já contabilizamos 10% desses 25%**, de modo que precisamos apenas colocar mais 15% na região de intersecção entre M e N.



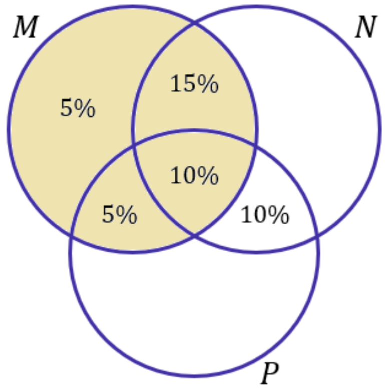
Note que a região destacada corresponde exatamente à intersecção entre M e N e a soma das porcentagens totaliza 25% que o enunciado nos passou ($10\% + 15\% = 25\%$). Vamos prosseguir! A próxima informação é: **15% leem os jornais M e P**. Mais uma vez, já contabilizamos 10% na intersecção tripla (veja a importância de colocar primeiro o valor dela, para impedir contar os valores duas vezes).



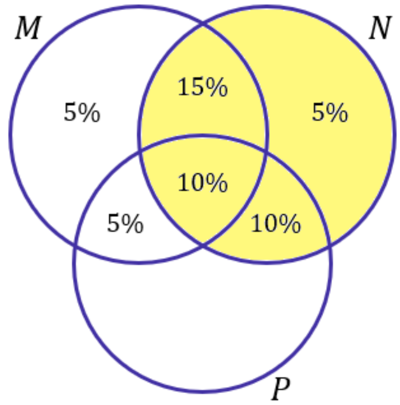
Mais uma vez fiz questão de destacar as duas regiões para que você perceba que a soma das porcentagens é exatamente o que o enunciado trouxe: 15% leem os jornais M e P. A próxima informação a ser considerada é: **20% leem os jornais N e P**. Ficamos então com:



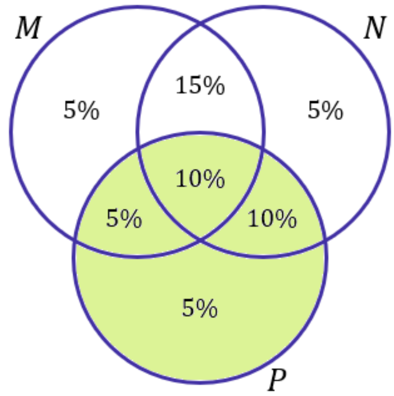
Beleza! Agora vamos avaliar cada conjunto individualmente. O enunciado trouxe que **35% do habitantes são leitores do jornal M**. Note que no diagrama de M temos $15\% + 10\% + 5\% = 30\%$ contabilizados. Para fechar os 35%, devemos apenas acrescentar mais 5% na "região disponível".



Some todos os valores da região M e confira que estará tudo coerente e totalizando os 35% dos habitantes. Vamos seguindo! **40% dos leitores são do jornal N**. Assim,



Por último, devemos levar em conta também que **30% são leitores do jornal P**.



Agora que todo o diagrama está preenchido, ao somar suas regiões, **vamos ter a porcentagem da população que lê pelo menos um dos jornais**, concorda? Assim,

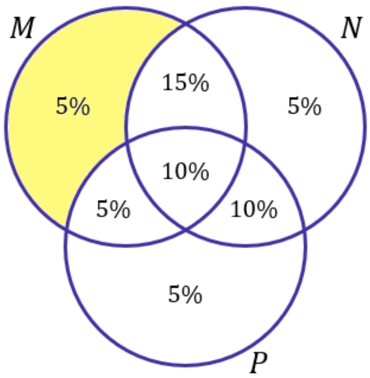
$$5\% + 15\% + 10\% + 5\% + 5\% + 10\% + 5\% = 55\%$$

Veja que **55% da cidade lê pelo menos um dos jornais**. Com isso, 45% (0,45) da população não lê nenhum dos três. Como ele diz a população que não lê nada está entre 270 e 360 habitantes. Podemos calcular o limite mínimo e máximo de habitantes dessa cidade.

$$0{,}45 \cdot p_{\min} = 270 \quad \rightarrow \quad p_{\min} = \frac{270}{0{,}45} \quad \rightarrow \quad p_{\min} = 600\ pessoas$$

$$0{,}45 \cdot p_{\max} = 360 \quad \rightarrow \quad p_{\max} = \frac{360}{0{,}45} \quad \rightarrow \quad p_{\max} = 800\ pessoas$$

Logo, **a população dessa cidade está entre 600 e 800 pessoas**. A questão pede a quantidade de habitantes que leem exclusivamente o jornal M.



Veja que 5% (0,05) dos habitantes leem exclusivamente o jornal M. Assim,

$$M_{\min} = 600 \cdot 0{,}05 \quad \rightarrow \quad M_{\min} = 30\ pessoas$$

$$M_{\max} = 800 \cdot 0{,}05 \quad \rightarrow \quad M_{\max} = 40\ pessoas$$

Portanto, **a quantidade de leitores exclusivos do jornal M está entre 30 e 40 pessoas**.

Gabarito: LETRA C.

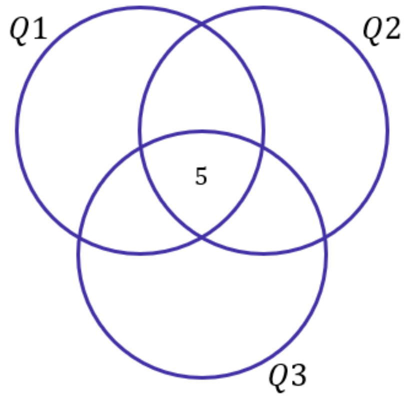
9. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Cinquenta e dois estudantes foram submetidos a uma prova composta de três questões objetivas. Do total de estudantes, trinta e um acertaram a questão 2, dezessete acertaram as questões 1 e 3, seis acertaram apenas a questão 3 e cinco gabaritaram a prova. Sabendo-se que nenhum estudante obteve nota zero, quantos acertaram somente a questão 1?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

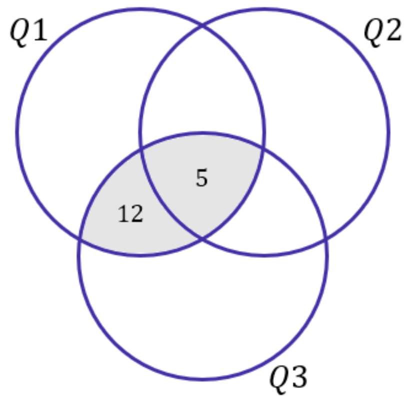
Comentários:

Beleza, moçada! Temos três conjuntos: Q1 formado por aqueles que acertaram a questão 1, Q2 formado por aqueles que acertaram a questão 2 e Q3 formado por aqueles que acertaram a questão 3.

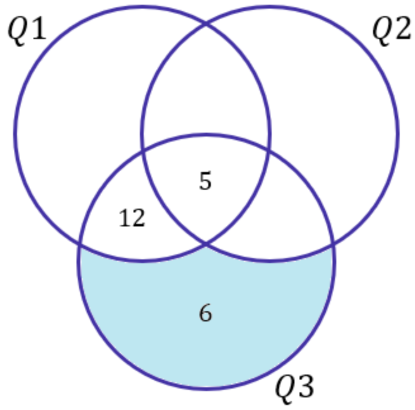
Como sempre, **devemos começar analisando a intersecção dos três**, ou seja, quantos gabaritaram a prova. De acordo com o enunciado, cinco acertaram as três questões. Assim,



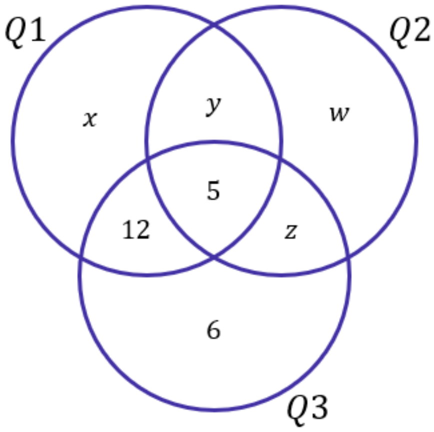
Vamos analisar quem acertou duas questões. Uma das informações do enunciado é que **dezessete acertaram as questões 1 e 3**. Como já contabilizamos 5 no diagrama, faltam apenas mais 12.



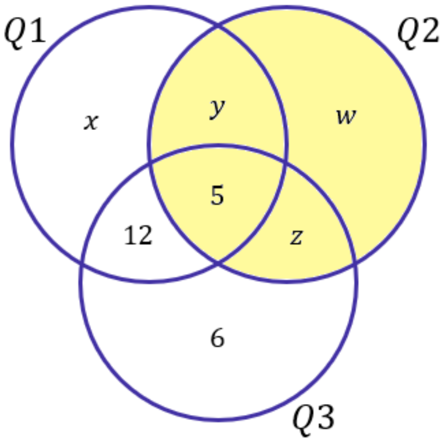
Quando somamos os valores na intersecção de Q1 e Q3, resulta exatamente nos 17 que acertaram as 2 questões. Continuando! A próxima informação que podemos utilizar é: **6 acertaram apenas a questão 3**.



Agora, vamos chamar os valores de cada uma das regiões de uma letra.



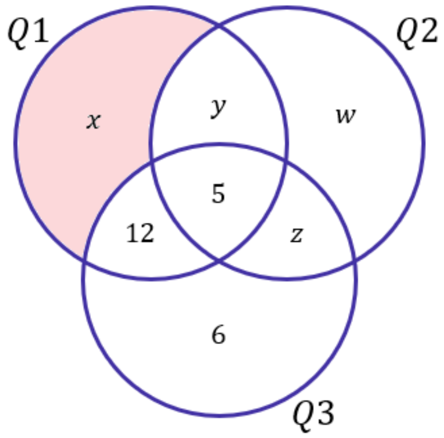
Agora que demos "nomes aos bois", vamos analisar a seguinte informação: trinta e um (31) acertaram a questão 2. No nosso diagrama, a região que representa aqueles que acertaram a questão 2 é:



Assim,

$$y + w + z + 5 = 31 \quad \rightarrow \quad y + w + z = 26$$

A questão quer a quantidade de alunos que acertaram apenas a questão 1, ou seja, o valor de x.



O número total de estudantes que fizeram a prova é 52. Como nenhum zerou, então **quando somamos os valores que estão nas regiões do diagrama, devemos obter exatamente o total de alunos**.

$$x + (y + w + z) + 12 + 5 + 6 = 52$$

$$x + 26 + 23 = 52$$

$$x + 49 = 52$$

$$x = 3$$

Gabarito: LETRA A.

10. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2012 - Adaptada) Um grupo de 100 jovens forneceu informações sobre as três redes sociais mais utilizadas no País: Facebook, MSN e Twitter. Os resultados encontrados foram os seguintes:

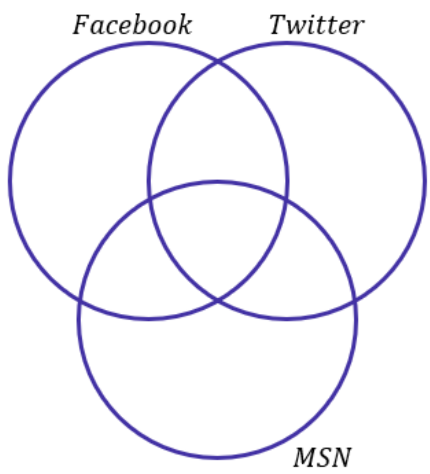
- 20 não utilizam nenhuma rede social.
- 32 só utilizam o Facebook.
- 65 utilizam o Facebook.
- 20 só utilizam o Twitter.
- 2 utilizam o Facebook, o Twitter e o MSN.
- 51 utilizam apenas dois dos três meios de comunicação.

A quantidade de jovens que utilizam apenas o Twitter e o MSN é

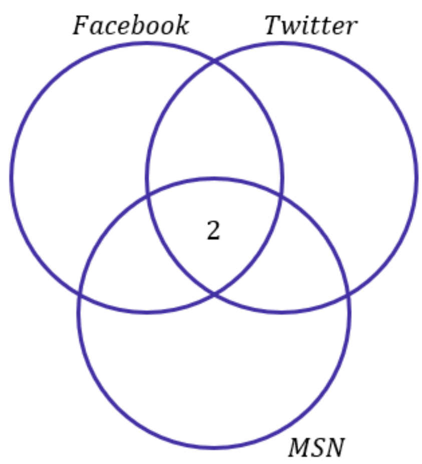
a) 10
b) 20
c) 25

d) 30
e) 35

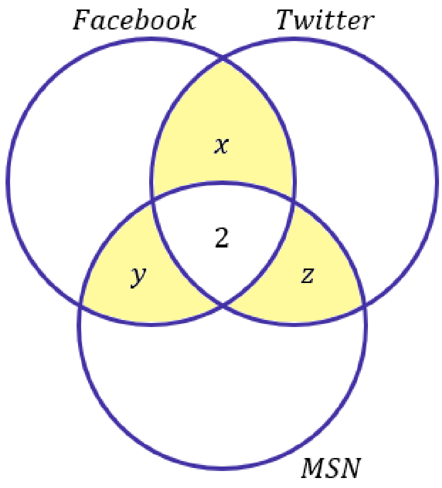
Comentários:
Mais uma vez, **vamos usar diagramas de Venn** para resolver essa questão de conjuntos. O enunciado foi muito bom pois separou as informações para nós de uma maneira que facilita a visualização.



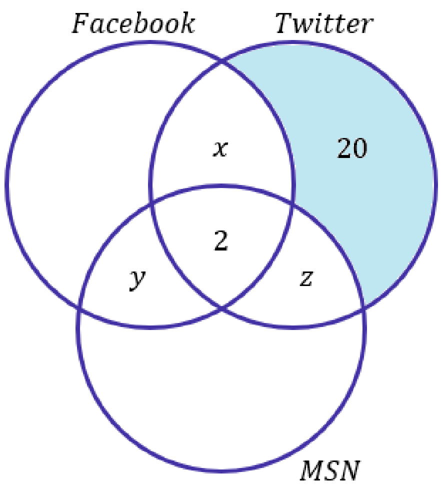
Vamos começar com a intersecção: **2 utilizam o Facebook, o Twitter e o MSN.**



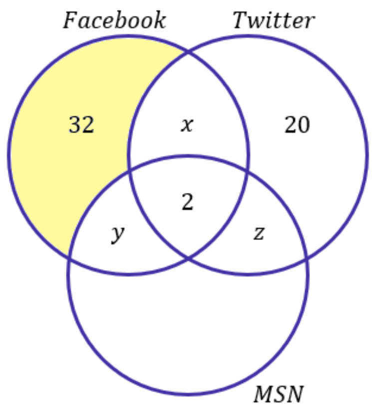
Ademais, o enunciado informou que: **51 utilizam apenas dois dos três meios de comunicação.**



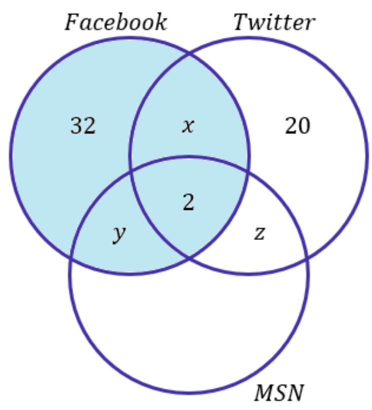
Ou seja, $x + y + z = 51$. Vamos manter assim por enquanto. A próxima informação que podemos utilizar é: 20 utilizam **apenas** o Twitter.



Prosseguindo: **32 só utilizam o Facebook.**



Vamos para a próxima informação: 65 utilizam Facebook.



Assim,

$$32 + x + y + 2 = 65 \quad \rightarrow \quad x + y = 31$$

Como descobrimos que $x + y = 31$, podemos usar o fato que $x + y + z = 51$ para determinar z.

$$x + y + z = 51 \quad \rightarrow \quad 31 + z = 51 \quad \rightarrow \quad z = 20$$

Portanto, **20 jovens utilizam <u>apenas</u> o Twitter e o MSN**.

Obs.: A questão realmente apresenta inconsistência nos dados. Quando somamos as regiões do diagrama, ela não totaliza os 100 jovens. De qualquer forma, ainda assim é possível obtermos uma resposta e marcar o gabarito. Ressalto que a banca não anulou a questão, de forma que precisamos ter um jogo de cintura para lidar com essas situações na hora da prova!

Gabarito: LETRA B.

11. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2012) Sejam $\#(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X e A, B e C conjuntos tais que $\#(A \cup B) = 12$, $\#(B \cup C) = 22$, $\#(A \cup C) = 22$, $\#(A \cup B \cup C) = 24$ e $\#(A \cap B \cap C) = 5$. Conclui-se que $\#(A) + \#(B) + \#(C)$ é igual a

a) 31
b) 32
c) 34
d) 36
e) 37

Comentários:

Vocês podem ter achado estranho essa notação que usa o #(A). Ela é bem rara e, hoje em dia, utilizamos **n(A) para expressar o número de elementos de um conjunto A**. Vamos escrever esses valores utilizando nossa notação, sem prejuízo algum:

- $n(A \cup B) = 12$
- $n(B \cup C) = 22$
- $n(A \cup C) = 22$
- $n(A \cup B \cup C) = 24$
- $n(A \cap B \cap C) = 5$
- $n(A) + n(B) + n(C) = ???$

Vocês perceberam que parece muito com os elementos do **Princípio da Inclusão e Exclusão**? Recorde a fórmula que vimos na teoria:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad (1)$$

Para usar essa fórmula, precisamos de $n(A \cap B), n(B \cap C)\ e\ n(A \cap C)$. No entanto, o enunciado forneceu $n(A \cup B), n(A \cup B)\ e\ n(A \cup B)$. O princípio da inclusão e exclusão permite relacionar as duas quantidades.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \rightarrow \quad n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 12$$

Analogamente para os demais conjuntos:

$$n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C) \quad \rightarrow \quad n(A \cap C) = n(A) + n(C) - 22$$

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) \quad \rightarrow \quad n(B \cap C) = n(B) + n(C) - 22$$

Dessa forma, podemos aplicar esses resultados na equação (1):

$$24 = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A) + n(B) - 12) - (n(A) + n(C) - 22) - (n(B) + n(C) - 22) + 5$$

$$24 = \cancel{n(A)} + \cancel{n(B)} + \cancel{n(C)} - \cancel{n(A)} - \cancel{n(B)} + 12 - n(A) - \cancel{n(C)} + 22 - n(B) - n(C) + 22 + 5$$

$$24 = 61 - n(A) - n(B) - n(C) \quad \rightarrow \quad n(A) + n(B) + n(C) = 37$$

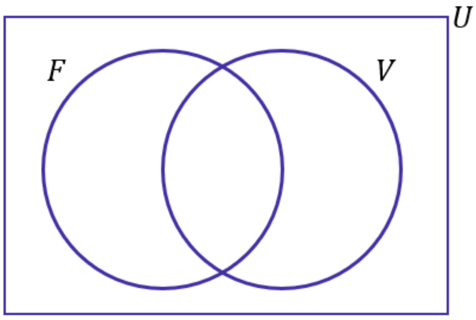
Gabarito: LETRA E.

12. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Conversando com os 45 alunos da primeira série de um colégio, o professor de educação física verificou que 36 alunos jogam futebol, e 14 jogam vôlei, sendo que 4 alunos não jogam nem futebol nem vôlei. O número de alunos que jogam tanto futebol quanto vôlei é
a) 5.

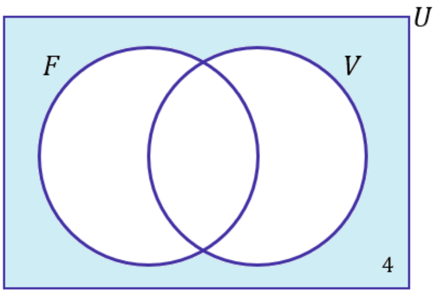
b) 7.
c) 9.
d) 11.
e) 13.

Comentários:

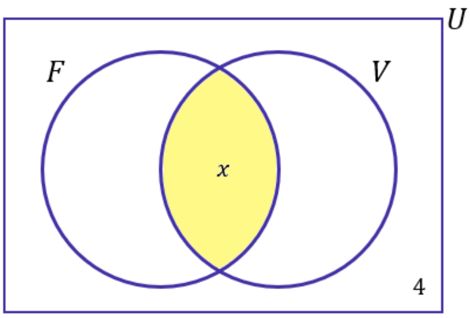
Questão que envolve dois conjuntos principais: um formado por aqueles que jogam futebol (F) e um outro formado por aqueles que jogam vôlei (V).



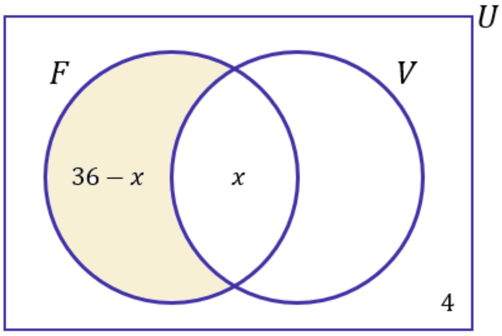
Note que delimitamos nosso conjunto universo, pois há **4 alunos que não jogam nem futebol, nem vôlei**.



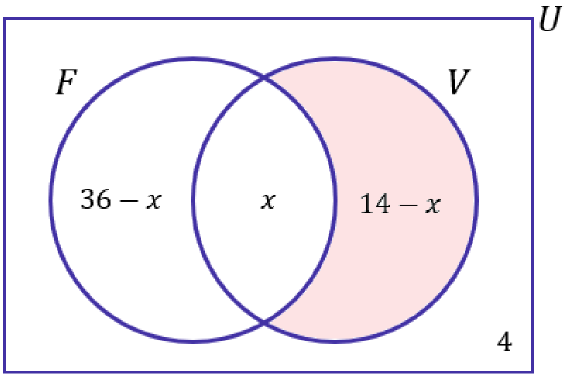
Queremos saber **quantas pessoas jogam futebol e vôlei**. É a nossa intersecção, vamos chamá-la de x.



Se 36 alunos jogam futebol, então $36 - x$ jogam **apenas** futebol.



Por fim, se 14 jogam vôlei, então $14 - x$ jogam **apenas** vôlei.



Quando somamos todas as regiões, devemos ter o total de alunos (no caso, são 45). Assim,

$$(36 - x) + x + (14 - x) + 4 = 45$$
$$54 - x = 45$$
$$x = 9$$

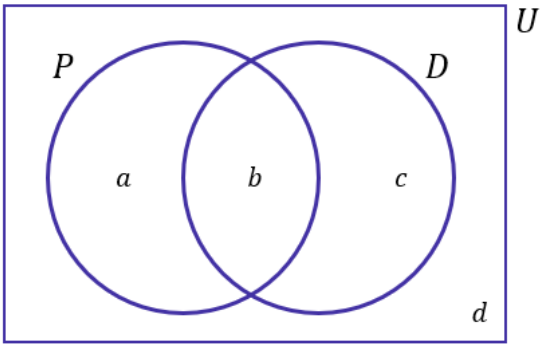
Gabarito: LETRA C.

13. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Em uma fábrica, 70% dos funcionários ou trabalham no setor de Produção ou trabalham no setor de Desenvolvimento, ou seja, nenhum deles trabalha nos dois setores. Um terço dos funcionários que trabalham no setor de Desenvolvimento também trabalha no setor de Produção, e 50% dos funcionários da fábrica não trabalham no setor de Produção. A porcentagem de funcionários da fábrica que trabalha tanto no setor de Desenvolvimento como no setor de Produção é

a) 5%
b) 10%
c) 20%
d) 25%
e) 30%

Comentários:

Galera, acredito que essa questão esteja em um nível bem acima da média. Exige bastante manipulação e possui sacadas bem peculiares. Para começar, **precisamos dar nomes aos bois**. Vamos colocar primeiro no diagrama poder explicar.



- P: conjunto dos funcionários que trabalham no setor de Produção;
- D: conjunto dos funcionários que trabalham no setor de Desenvolvimento;
- "a": é a quantidade de funcionários que trabalham **apenas** no setor de produção;
- "b": é a quantidade de funcionários que trabalham **nos dois setores**;
- "c": é a quantidade de funcionários que trabalham **apenas** no setor de Desenvolvimento;
- "d": é a quantidade de funcionários que **não trabalham em nenhum dos dois setores**.

Seja N o total de funcionários da empresa. Assim,

$$N = a + b + c + d \quad (1)$$

Vamos avaliar as informações que o enunciado passou.

- **70% dos funcionários ou trabalham no setor de Produção ou trabalham no setor de Desenvolvimento, ou seja, nenhum deles trabalha nos dois setores.**

$$\frac{a+c}{N} = 0{,}7 \quad \rightarrow \quad a + c = 0{,}7N \quad \rightarrow \quad a = 0{,}7N - c \quad (2)$$

- **50% dos funcionários da fábrica não trabalham no setor de Produção.**

$$\frac{c+d}{N} = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad c + d = 0{,}5N \quad \rightarrow \quad d = 0{,}5N - c \quad (3)$$

- **Um terço dos funcionários que trabalham no setor de Desenvolvimento também trabalha no setor de Produção.**

$$b = \frac{1}{3}(b+c) \quad \rightarrow \quad \frac{2b}{3} = \frac{c}{3} \quad \rightarrow \quad b = \frac{c}{2} \quad (4)$$

A questão pede a **porcentagem de funcionários da fábrica que trabalha tanto no setor de Desenvolvimento como no setor de Produção, ou seja, o valor de b/N.** Para isso, vamos manipular as equações acima de forma a fazer aparecer essa fração. Convenientemente, nós organizamos as equações (2) e (3), isolando as incógnitas a e d em função de N e c. Vamos substituir (2), (3) e (4) em (1).

$$N = (0{,}7N - \cancel{c}) + \frac{c}{2} + \cancel{c} + (0{,}5N - c) \quad \rightarrow \quad N = 1{,}2N - \frac{c}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{c}{2} = 0{,}2N \quad \rightarrow \quad c = 0{,}4N$$

Substituindo o que encontramos em (4):

$$b = \frac{0{,}4N}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{b}{N} = 0{,}2 \quad (20\%)$$

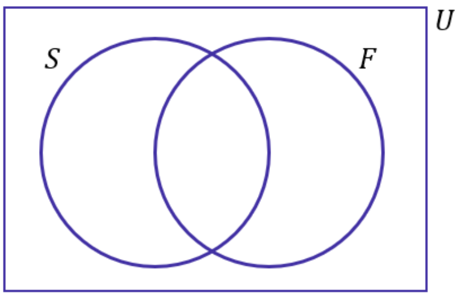
Gabarito: LETRA C.

14. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) Mil pessoas responderam a uma pesquisa sobre a frequência do uso de automóvel. Oitocentas e dez pessoas disseram utilizar automóvel em dias de semana, 880 afirmaram que utilizam automóvel nos finais de semana e 90 disseram que não utilizam automóveis. Do total de entrevistados, quantas pessoas afirmaram que utilizam automóvel durante a semana e, também, nos fins de semana?

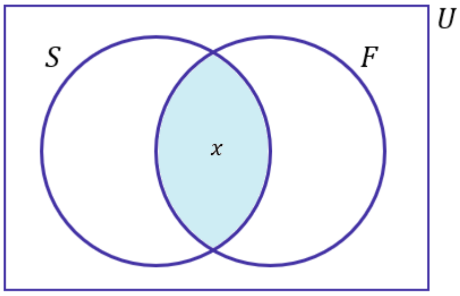
a) 580
b) 610
c) 690
d) 710
e) 780

Comentários:

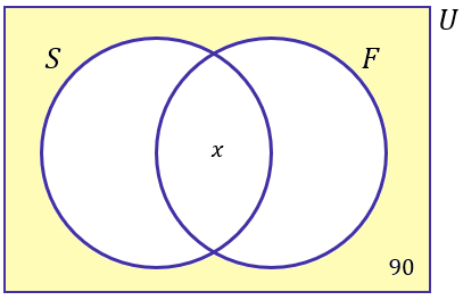
Essa questão envolve **dois conjuntos**: o primeiro formado pelas pessoas que utilizam o automóvel em dias de semana (S) e segundo, formado por aqueles que utilizam o automóvel nos finais de semana (F). Vamos esquematizar os diagramas.



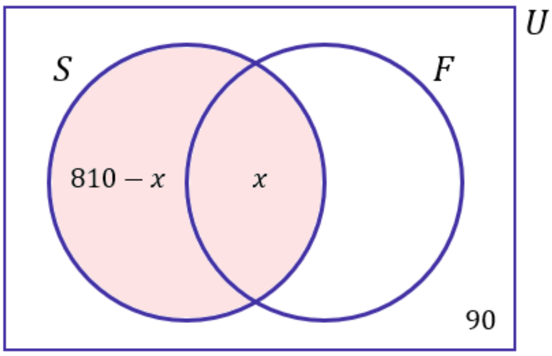
A questão pede justamente a quantidade de pessoas que utilizam o automóvel tanto nos dias de semana, quanto nos finais de semana. Na prática, **é exatamente a intersecção dos 2 conjuntos**. Vamos chamar de x.



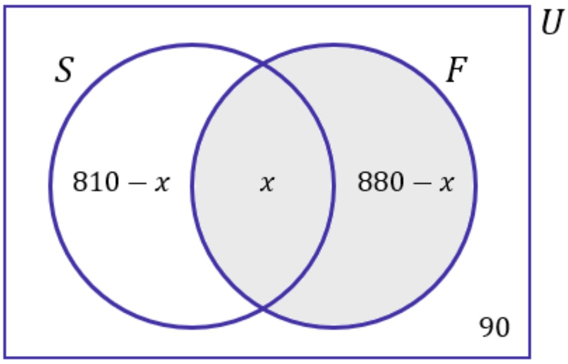
Agora, vamos analisar as informações do enunciado. A primeira informação que podemos aproveitar é que **90 pessoas não utilizam automóveis**.



- **Oitocentas e dez pessoas disseram utilizar automóvel em dias de semana.**



- **880 afirmaram que utilizam automóvel nos finais de semana.**



1000 responderam à pesquisa. Logo, quando somamos todas as regiões, devemos totalizar esse número.

$$(810 - x) + x + (880 - x) + 90 = 1000$$

$$1780 - x = 1000$$

$$x = 780$$

Gabarito: LETRA E.

LISTA DE QUESTÕES - CESGRANRIO

Operações com Conjuntos

1. (CESGRANRIO/UNEMAT/2024) No departamento administrativo de uma universidade, os processos que implicam alteração dos proventos pertencem a pelo menos um dos seguintes conjuntos, podendo haver interseções:

P: conjunto formado pelos processos que incluem alguma solicitação de alteração de regime;
Q: conjunto formado pelos processos que incluem alguma solicitação de progressão funcional;
R: conjunto formado pelos processos que incluem alguma modificação de status de dependentes.

O conjunto $(P - Q) \cap R$ é formado pelos processos desse departamento administrativo que implicam alteração de proventos e que incluem alguma solicitação de:
A) modificação de *status* de dependentes e alguma de progressão funcional, mas nenhuma solicitação de alteração de regime.
B) alteração de regime, mas nenhuma solicitação de modificação de *status* de dependentes, nem de progressão funcional.
C) alteração de regime e alguma de modificação de *status* de dependentes, mas nenhuma de progressão funcional.
D) pelo menos um dos três tipos de solicitação.
E) cada um dos três tipos de solicitação.

2. (CESGRANRIO/BR/2015) Dados três conjuntos M, N e P, tem-se que o conjunto $M \cap (N \cup P)$ é igual ao conjunto
a) $M \cap (N \cap P)$
b) $M \cap (N \cup P)$
c) $M \cup (N \cap P)$
d) $(M \cap N) \cup (M \cap P)$
e) $(M \cup N) \cap (M \cup P)$

3. (CESGRANRIO/BASA/2014) O conjunto diferença X - Y, entre dois subconjuntos X e Y de um mesmo conjunto universo U, é definido por:

$$X - Y = \{u \in U / u \in X \text{ e } u \notin Y\}$$

Considere três subconjuntos, A, B e C, do mesmo conjunto Universo U. O conjunto $A - (B \cap C)$ é igual ao conjunto
a) $(A - B) \cap (A - C)$.

b) $(A - B) \cup (A - C)$.
c) $(A - B) \cap C$.
d) $(A - B) \cup C$.
e) $(A - B) - C$.

4. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2011) Considere um conjunto U, do qual X é um subconjunto não vazio e próprio. Seja Y o complemento do complemento de X (os complementos sendo considerados em relação a U). Então, a

a) união de X e Y é igual a U.
b) diferença de X e Y é igual a U.
c) intercessão de X e Y é vazia.
d) intercessão de X e Y é igual a U.
e) intercessão de X e Y é igual a X.

GABARITO

1. LETRA C
2. LETRA D.
3. LETRA B.
4. LETRA E.

LISTA DE QUESTÕES - CESGRANRIO

Princípio da Inclusão-Exclusão

1. (CESGRANRIO/CNU/2024) Um técnico fez três buscas em um banco de dados com 600 alunos cadastrados. Na primeira busca, identificou que 450 alunos cursaram a disciplina A; a segunda busca gerou a informação de que 300 alunos cursaram a disciplina B. E uma terceira busca identificou que 200 alunos cursaram as duas referidas disciplinas (A e B). Sabe-se que esse banco de dados não sofreu alterações quando as três buscas foram realizadas. A partir dessas informações, constata-se que o número de alunos que não cursaram nenhuma dessas duas disciplinas é igual a

A) 50
B) 100
C) 150
D) 200
E) 250

2. (CESGRANRIO/BANRISUL/2023) Um banco possui um total de 1000 clientes, dos quais apenas 700 investem em pelo menos um dos fundos A ou B. Sabe-se que o total de clientes que investem em ambos os fundos é igual a 250, e que pelo menos 100 clientes investem apenas no fundo B. Qual é o número máximo de clientes que investem apenas no fundo A?

A) 350
B) 600
C) 650
D) 800
E) 900

3. (CESGRANRIO/BB/2021) Antes de iniciar uma campanha publicitária, um banco fez uma pesquisa, entrevistando 1000 de seus clientes, sobre a intenção de adesão aos seus dois novos produtos. Dos clientes entrevistados, 430 disseram que não tinham interesse em nenhum dos dois produtos, 270 mostraram-se interessados no primeiro produto, e 400 mostraram-se interessados no segundo produto. Qual a porcentagem do total de clientes entrevistados que se mostrou interessada em ambos os produtos?

A) 10%
B) 15%
C) 20%
D) 25%
E) 30%

4. (CESGRANRIO/BB/2021) Um banco está selecionando um novo escriturário e recebeu um total de 50 currículos. Para o exercício desse cargo, três habilidades foram especificadas: comunicação, relacionamento interpessoal e conhecimento técnico. As seguintes características foram detectadas entre os candidatos a essa vaga:

- 15 apresentavam habilidade de comunicação;
- 18 apresentavam habilidade de relacionamento interpessoal;
- 25 apresentavam conhecimento técnico;
- Seis apresentavam habilidade de relacionamento interpessoal e de comunicação;
- Oito apresentavam habilidade de relacionamento interpessoal e conhecimento técnico;
- Dois candidatos apresentavam todas as habilidades;
- Oito candidatos não apresentavam nenhuma das habilidades.

Com base nessas informações, qual o número total de candidatos que apresentam apenas uma das três habilidades apontadas?
A) 28
B) 38
C) 21
D) 13
E) 15

5. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018) Um grupo de fornecedores foi dividido em três conjuntos, de acordo com o atendimento a três critérios de qualidade, denominados critérios A, B e C. Após uma análise, observou-se que apenas quatro empresas atendem aos três critérios; seis empresas atendem aos critérios B e C; dez empresas atendem ao critério C, mas não atendem ao A; doze empresas atendem ao critério B, mas não atendem ao A, e vinte e três empresas atendem a, pelo menos, um dos critérios A ou B. Considerando-se que nesse grupo de fornecedores não existe empresa que não atenda a, pelo menos, um dos três critérios, o número total de empresas desse grupo, isto é, $n(AUBUC)$, é igual a
a) 21
b) 25
c) 27
d) 29
e) 31

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2017) Os conjuntos P e Q têm p e q elementos, respectivamente, com $p+q=13$. Sabendo-se que a razão entre o número de subconjuntos de P e o número de subconjuntos de Q é 32, quanto vale o produto pq?
a) 16
b) 32
c) 36
d) 42

e) 46

7. (CESGRANRIO/IBGE/2014) Em uma central de telemarketing com 42 funcionários, todos são atenciosos ou pacientes. Sabe-se que apenas 10% dos funcionários atenciosos são pacientes e que apenas 20% dos funcionários pacientes são atenciosos. Quantos funcionários são atenciosos e pacientes?

a) 1
b) 3
c) 9
d) 12
e) 27

8. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Numa certa comunidade, 35% de seus habitantes são leitores do jornal M; 40% são leitores do jornal N; 30% são leitores do jornal P; 25% leem os jornais M e N; 15% leem os jornais M e P; 20% leem os jornais N e P; e 10% leem os três jornais. Se o contingente de habitantes dessa comunidade que não leem nenhum dos três jornais está entre 270 e 360, então o contingente de leitores exclusivos do jornal M se situa entre

a) 30 e 50
b) 20 e 40
c) 30 e 40
d) 200 e 300
e) 210 e 280

9. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Cinquenta e dois estudantes foram submetidos a uma prova composta de três questões objetivas. Do total de estudantes, trinta e um acertaram a questão 2, dezessete acertaram as questões 1 e 3, seis acertaram apenas a questão 3 e cinco gabaritaram a prova. Sabendo-se que nenhum estudante obteve nota zero, quantos acertaram somente a questão 1?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

10. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2012 - Adaptada) Um grupo de 100 jovens forneceu informações sobre as três redes sociais mais utilizadas no País: Facebook, MSN e Twitter. Os resultados encontrados foram os seguintes:

- 20 não utilizam nenhuma rede social.
- 32 só utilizam o Facebook.
- 65 utilizam o Facebook.
- 20 só utilizam o Twitter.

- 2 utilizam o Facebook, o Twitter e o MSN.
- 51 utilizam apenas dois dos três meios de comunicação.

A quantidade de jovens que utilizam apenas o Twitter e o MSN é

a) 10
b) 20
c) 25
d) 30
e) 35

11. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2012) Sejam $\#(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X e A, B e C conjuntos tais que $\#(A \cup B) = 12$, $\#(B \cup C) = 22$, $\#(A \cup C) = 22$, $\#(A \cup B \cup C) = 24$ e $\#(A \cap B \cap C) = 5$. Conclui-se que $\#(A) + \#(B) + \#(C)$ é igual a

a) 31
b) 32
c) 34
d) 36
e) 37

12. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Conversando com os 45 alunos da primeira série de um colégio, o professor de educação física verificou que 36 alunos jogam futebol, e 14 jogam vôlei, sendo que 4 alunos não jogam nem futebol nem vôlei. O número de alunos que jogam tanto futebol quanto vôlei é

a) 5.
b) 7.
c) 9.
d) 11.
e) 13.

13. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2011) Em uma fábrica, 70% dos funcionários ou trabalham no setor de Produção ou trabalham no setor de Desenvolvimento, ou seja, nenhum deles trabalha nos dois setores. Um terço dos funcionários que trabalham no setor de Desenvolvimento também trabalha no setor de Produção, e 50% dos funcionários da fábrica não trabalham no setor de Produção. A porcentagem de funcionários da fábrica que trabalha tanto no setor de Desenvolvimento como no setor de Produção é

a) 5%
b) 10%
c) 20%
d) 25%
e) 30%

14. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) Mil pessoas responderam a uma pesquisa sobre a frequência do uso de automóvel. Oitocentas e dez pessoas disseram utilizar automóvel em dias de semana, 880 afirmaram que utilizam automóvel nos finais de semana e 90 disseram que não utilizam automóveis. Do total de entrevistados, quantas pessoas afirmaram que utilizam automóvel durante a semana e, também, nos fins de semana?

a) 580

b) 610

c) 690

d) 710

e) 780

Gabarito

1. LETRA A
2. LETRA A
3. LETRA A
4. LETRA A
5. LETRA E
6. LETRA C
7. LETRA B
8. LETRA C
9. LETRA A
10. LETRA B
11. LETRA E
12. LETRA C
13. LETRA C
14. LETRA E

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:

PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.