Aula 00

IFSULDEMINAS (PEBTT - Matemática) Conhecimentos Específicos - 2024 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

28 de Novembro de 2024

Índice

AVISO IMPORTANTE!

Olá, Alunos (as)!

Passando para informá-los a respeito da **disposição das questões** dentro do nosso material didático. Informamos que a escolha das bancas, dentro dos nossos Livros Digitais, é feita de maneira estratégica e pedagógica pelos nossos professores a fim de proporcionar a melhor didática e o melhor direcionamento daquilo que mais se aproxima do formato de cobrança da banca do seu concurso.

Assim, o formato de questões divididas por tópico facilitará o seu processo de estudo, deixando mais alinhado às disposições constantes no edital.

No mais, continuaremos à disposição de todos no Fórum de dúvidas!

Atenciosamente,

Equipe Exatas

Estratégia Concursos

APRESENTAÇÃO DO CURSO

Olá, pessoal! Tudo bem?

É com grande satisfação que damos início ao nosso curso!

Os professores **Eduardo Mocellin, Francisco Rebouças, Luana Brandão, Djefferson Maranhão** e **Vinicius Veleda** ficarão responsáveis pelo **Livro Digital**.

Antes de continuarmos, vamos apresentar os professores do material escrito:

Eduardo Mocellin: Fala, pessoal! Meu nome é Eduardo Mocellin, sou professor de Matemática e de Raciocínio Lógico do Estratégia Concursos e engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Sinto-me feliz em poder contribuir com a sua aprovação! Não deixe de me seguir no Instagram: **@edu.mocellin**

Francisco Rebouças: Fala, alunos! Aqui é o Francisco Rebouças, professor de Matemática do Estratégia Concursos. Sou Engenheiro Aeroespacial formado pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Saiba que será uma honra fazer parte da sua jornada rumo à aprovação e que estaremos sempre aqui para auxiliá-los com o que precisarem. Um grande abraço e nos vemos nas aulas!

Luana Brandão: Oi, pessoal! O meu nome é Luana Brandão e sou professora de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduada, Mestre e Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense. Passei nos concursos de Auditor Fiscal (2009/2010) e Analista Tributário (2009) da Receita Federal e de Auditor Fiscal do Estado do Rio de Janeiro (2010). Sou Auditora Fiscal do Estado do RJ desde 2010. Vamos juntos nesse caminho até a aprovação? **@professoraluanabrandao**

Djefferson Maranhão: Olá, amigos do Estratégia Concursos, tudo bem? Meu nome é Djefferson Maranhão, professor de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduado em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Desde 2015, sou Auditor da Controladoria Geral do Estado do Maranhão (2015 - 5º lugar). Antes, porém, exerci os cargos de Analista de Sistemas na UFMA (2010 - 1º lugar) e no TJ-MA (2011 - 1º lugar). Já estive na posição de vocês e sei o quanto a vida de um concurseiro é um tanto atribulada! São vários assuntos para se dominar em um curto espaço de tempo. Por isso, contem comigo para auxiliá-los nessa jornada rumo à aprovação. Um grande abraço.

Vinicius Veleda: Olá, caros alunos! Sou Auditor Fiscal do Estado do Rio Grande do Sul. Professor de Matemática e Matemática Financeira do Estratégia Concursos. Aprovado nos Concursos de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda dos Estados do Rio Grande do Sul (SEFAZ RS - 2019), Santa Catarina (SEFAZ SC - 2018) e Goiás (SEFAZ GO - 2018). Formado em Engenharia de Petróleo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com graduação sanduíche em Engenharia Geológica pela Universidade Politécnica de Madrid (UPM). Pela UFRJ, fui campeão sul americano do Petrobowl (Buenos Aires) e, posteriormente, Campeão Mundial (Dubai). Cursei meu ensino médio na Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx). Contem comigo nessa trajetória! **@viniciusveleda**

O material escrito em **PDF** está sendo construído para ser sua fonte **autossuficiente** de estudos. Isso significa que o livro digital será **completo** e **voltado para o seu edital**, justamente para que você não perca o seu precioso tempo "caçando por aí" o conteúdo que será cobrado na sua prova. Ademais, sempre que necessário, você poderá fazer perguntas sobre as aulas no **fórum de dúvidas**. **Bons estudos!**

PONTO

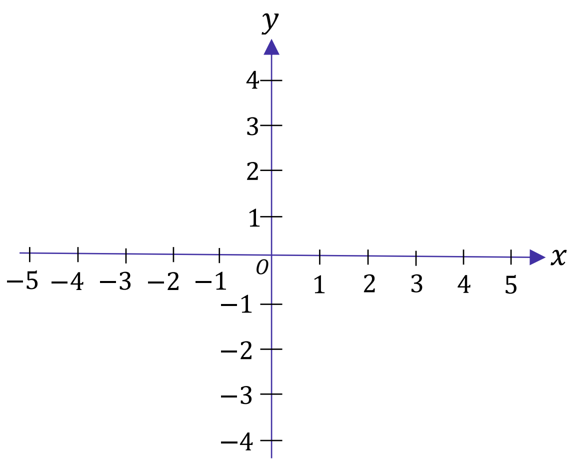
Eixos Coordenados

Para começar, imagine que você vai à praia. Quando chega na estrada, você vê uma placa indicando que está no km 0. Se houver uma outra placa indicando que há um **café no km 8**, você saberá prontamente chegar lá e até quanto tempo irá levar. Se seu carro quebrar no meio do caminho, você consegue ligar para um amigo e informar sua posição exata para ele.

Agora, imagine a situação em que esse café da manhã, localizado no km 8, não estivesse no chão. Isso mesmo! Estamos no ano de 31021 e existem prédios que flutuam. **O Café Estratégico está a 400 metros de altura.**

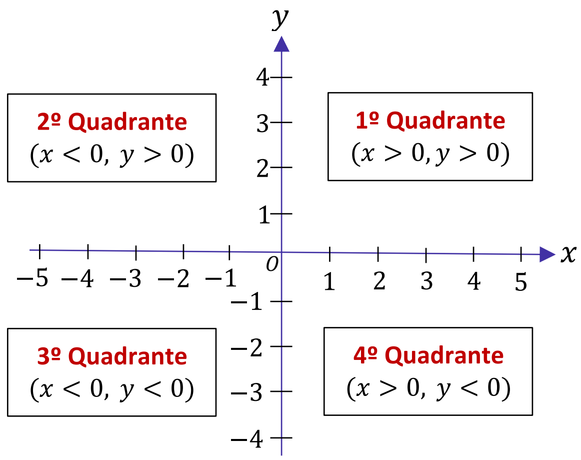
Perceba que a informação de que o café está no km 8 não é mais suficiente para encontrá-lo. Você precisa da altura também, afinal, várias outras coisas flutuam nesse mesmo quilômetro. Logo, a informação completa para que você encontrasse o café seria algo como: (Km 8, Altura 400).

Com essa ideia preliminar em mente, vamos estudar os chamados **eixos coordenados**. Observe a imagem abaixo.



Note que temos duas retas que se cruzam em um ponto O, que denominamos de **origem do sistema**. Vale a pena notar que **essas retas são perpendiculares entre si**, formando um plano e dividindo o mesmo em **quatro regiões ou quadrantes**.

Pronto, acabamos de descrever o que é um plano cartesiano ou também, como frequentemente aparece nas questões, **o sistema de coordenadas xOy**.

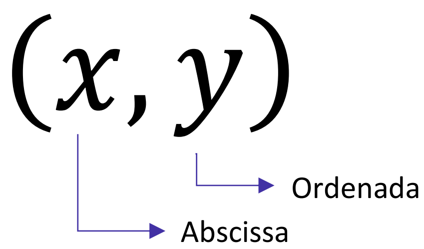


Além disso, os eixos que compõem esse sistema possuem nomes e é importante conhecê-los! O eixo horizontal é o conhecido **eixo das abscissas ou eixo Ox**. Por outro lado, o eixo vertical é o conhecido **eixo das ordenadas ou eixo Oy**.

Pontos

É possível localizar um ponto no nosso plano cartesiano **por meio de um par ordenado**. A representação desse par ordenado é dada por $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. O primeiro número, x, indica sua localização tomando como referência o eixo Ox.

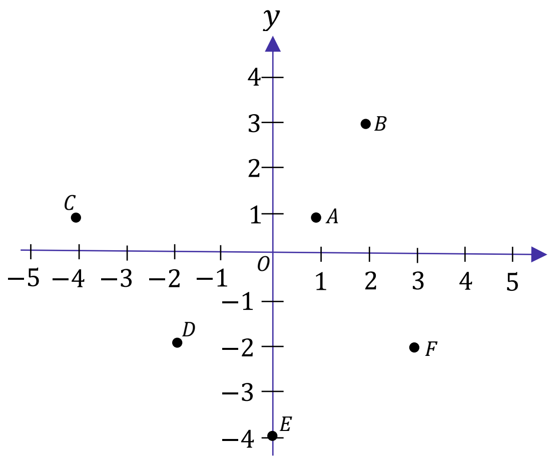
Analogamente, o número y indica a localização do ponto, tendo o eixo Oy como referência. Esses valores possuem um nome: **o primeiro é chamado de abscissa do ponto e o segundo, de ordenada.** Observe que os nomes nada mais são do que uma referência ao eixo que deve ser considerado.



Vamos localizar alguns pontos na prática? Considere:

- $A = (1, 1)$
- $B = (2, 3)$
- $C = (-4, 1)$
- $D = (-2, -2)$
- $E = (0, -4)$
- $F = (3, -2)$

No plano cartesiano, ficamos com:



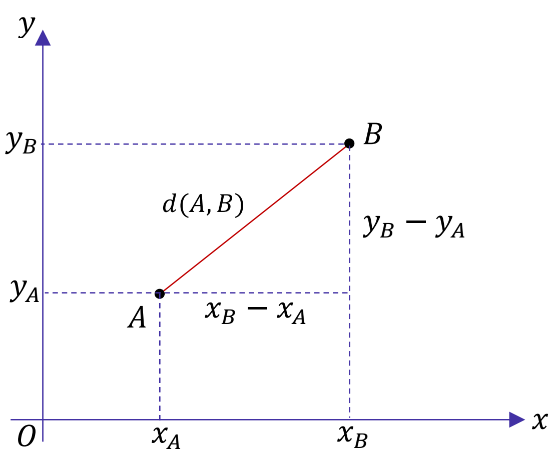
É interessante perceber que **um ponto pode estar em qualquer lugar do sistema**, inclusive sobre o eixo (como exemplifica o ponto E). Quando a ordenada do ponto é nula ($y = 0$), dizemos que ele está sobre o eixo Ox. De igual modo, quando a abscissa do ponto é nula ($x = 0$), dizemos que ele está sobre o eixo Oy. Por fim, vale dizer que representamos **a origem como o ponto de coordenadas $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$**.

Distância entre Pontos

Suponha agora que você esteja no ponto $A = (x_A, y_A)$ e quer chegar no ponto $B = (x_B, y_B)$ **usando o menor caminho**. Ora, esse menor caminho, como estamos em um plano, **será necessariamente uma reta que liga A à B.** Mas qual será a distância desses dois pontos?

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$d(A, B)$ representa a distância do ponto A ao B, x_A e x_B são as abscissas dos respectivos pontos; y_A e y_B são as ordenadas. A demonstração dessa fórmula não é difícil e conseguimos realizá-la com a bagagem que acumulamos até aqui. Considere dois pontos genéricos A e B.



Note que o triângulo retângulo que destacamos **tem hipotenusa igual a distância entre os dois pontos**. Sabemos também que os catetos medem $(x_B - x_A)$ e $(y_B - y_A)$. O que vem a sua cabeça? Aposto que o **Teorema de Pitágoras**!

$$d^2(A,B) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Perceba que a fórmula que calcula a distância entre dois pontos decorre da aplicação do Teorema de Pitágoras. Se você voltar a esquecê-la, tente desenhar os pontos, procurar o triângulo retângulo e aplicar o teorema. Certamente você terá a fórmula em um instante! Vamos fazer algumas observações sobre ela?

- Os dois pontos podem estar em qualquer quadrante. Não há limitação. S**e você tem dois pontos e quer calcular a distância entre eles, basta usar a fórmula**.

- A ordem que você coloca as abscissas ou ordenadas não importa. *Como assim, professor?!* A mesma fórmula que acabamos de encontrar $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ também pode ser escrita $d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. Isso acontece, pois **a subtração está elevada ao quadrado**. O expoente par "tira o sinal negativo" do resultado da subtração, se houver. Por exemplo,

    - $(5-2)^2 = 3^2 = 9$ ou $(2-5)^2 = (-3)^2 = 9.$
    - $(20-10)^2 = 10^2 = 100$ ou $(10-20)^2 = (-10)^2 = 100.$
    - $(15-3)^2 = 12^2 = 144$ ou $(3-15)^2 = (-12)^2 = 144.$

Perceba que **temos os mesmos resultados**, por mais que invertamos a ordem da subtração.

(PREF. MIRACENA/2024) Dados os pontos A: (2,7) e B: (3,5). Qual a distância entre os pontos A e B?

A) $\sqrt{3}$

B) $\sqrt{5}$

C) 5

D) 3

Comentários:

Temos que $A = (2,7)$ e $B = (3,5)$. Na fórmula, ficamos com:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(3-2)^2 + (5-7\,)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{1^2 + (-2)^2}$$

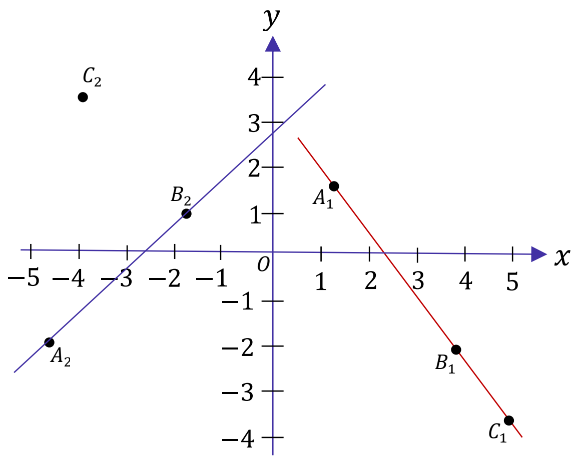
$$d(A,B) = \sqrt{1+4}$$

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{5}}$$

Gabarito: LETRA B.

Pontos Colineares

Pontos colineares são pontos que estão super alinhados! Tão alinhados que **conseguimos passar até uma reta por eles**, observe:



- Os pontos A_1, B_1 e C_1 são colineares.
- Os pontos A_2, B_2 e C_2 não são colineares.

Algumas observações importantes:

- **Dois pontos são sempre colineares**. Isto é, sempre conseguimos passar uma reta por eles. Por esse motivo, não faz sentido discutir a colinearidade de apenas dois pontos.

- A reta que passa por pontos colineares é única.

Existe uma **maneira bem rápida de verificarmos se três pontos são colineares**, sem precisar desenhá-los no plano e nem procurar uma reta. Suponha três pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$. Para que eles sejam colineares, essas coordenadas devem obedecer a seguinte relação:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como está sua memória para calcular determinantes? Espero que esteja se lembrando bem da aula! Caso não esteja, vamos fazer uma rápida revisão?

Existem diferentes formulas de se calcular um determinante. Para determinantes de matrizes de ordem 3, é comum utilizar o seguinte passo a passo:

- Considere que você quer calcular o seguinte determinante: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

- Primeiro, você deve **repetir as duas primeiras colunas**: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

- Segundo, você deve **multiplicar os elementos das três diagonais principais e somá-los**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$

$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$

$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$

A primeira parte do nosso determinante é:

$$Parte\ 1 = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

- Terceiro, **fazer a mesma coisa para as diagonais secundárias**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

A segunda parte do nosso determinante é:

$$Parte\ 2 = a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + \quad a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

- Pronto, agora fazemos **a parte 1 menos a parte 2**.

$$\det = \text{Parte } 1 - \text{Parte } 2$$

$$det = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

$$det = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Por mais assustador que uma expressão dessa possa parecer, para obtê-la, nós devemos seguir passos bem definidos. Dessa forma, você não precisa lembrá-la. O que você deve aprender é **o algoritmo que desenvolvemos aqui para chegar nessa expressão**. Para mais detalhes, sugiro dar uma olhada novamente na nossa aula de Matrizes e Determinantes! Beleza, moçada! Vimos a condição para que três pontos sejam colineares:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

E se calcularmos esse determinante **e ele não for zero**? Ora, nessas situações **temos que os pontos não são colineares e estaríamos como no caso dos pontos A_2, B_2 e C_2**. Vamos ver como isso é cobrado?

(PREF. MARICÁ/2024) Na engenharia urbana e no planejamento de uma cidade, garantir que certos elementos sejam colineares pode ajudar a manter a aparência visual ordenada, além de ser crucial para a funcionalidade de infraestruturas como vias férreas, estradas, ou canais de drenagem. Numa cidade, estruturas urbanas devem seguir uma linha reta específica em um mapa, visando estética e funcionalidade. É necessário verificar se os pontos (-1, 4), (-2, 3) e (3, m) do mapa, que são locais de construção no plano da cidade, estão alinhados para manter a consistência do design. O valor de m para que os pontos (-1, 4), (-2, 3) e (3, m) sejam colineares é:

A) 8

B) 7

C) 6

D) 5

E) 4

Comentários:

Vimos que para três pontos A, B, e C serem **colineares** devemos ter:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Substituindo as coordenadas dos pontos fornecidos no enunciado:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo esse **determinante**, vamos encontrar que:

$$(-3 + 12 - 2m) - (9 - m - 8) = 0$$

$$-3 + 12 - 2m - 9 + m + 8 = 0$$

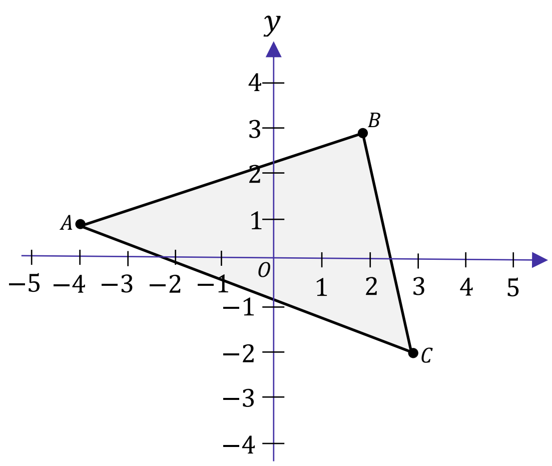
$$-m + 8 = 0$$

$$\boxed{m = 8}$$

Gabarito: LETRA A.

Área do Triângulo

Quando três pontos não são colineares, eles podem ser tratados como vértices de um triângulo.



Observe que **A, B e C são claramente não colineares e determinam o triângulo ABC**. Imagine que você precisa calcular a área desse triângulo. Existe um jeito rápido e direto.

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right|$$

O determinante $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ aparece aqui novamente!

Como agora os pontos não são colineares, então **seu valor é necessariamente diferente de 0**. Para encontrar a área, devemos ainda dividir o resultado por 2. Sei que você deve estar muito curioso para saber como chegamos nisso.

Informo que **a demonstração dessa expressão foge do escopo de um curso para concursos**. Minha sugestão é que você memorize por meio da aplicação contínua nos mais diversos exercícios que costumam cobrá-la. Por último, note que **o determinante está dentro de módulo**. Logo, se ao calcular o determinante encontrarmos um número negativo, então **devemos considerar apenas seu valor absoluto**. Lembre-se:

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

- $|-5| = 5$
- $|-102| = 102$
- $|65| = 65$

(CM-SP/2024) Sobre um plano munido do sistema de coordenadas cartesianas e cujas unidades de comprimento estão medidas em centímetros, encontram-se os pontos A(2,2), B(8,2) e C(6,5), vértices do triângulo ABC, cuja área mede

A) 8 cm²

B) 9 cm²

C) 12 cm²

D) 15 cm²

E) 18 cm²

Comentários:

Questão clássica em que **aplicamos diretamente a fórmula** que acabamos de ver.

$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix}\right\|$$

Os pontos são: $\boldsymbol{A(2,2)}$, $\boldsymbol{B(8,2)}$ **e** $\boldsymbol{C(6,5)}$. Logo:

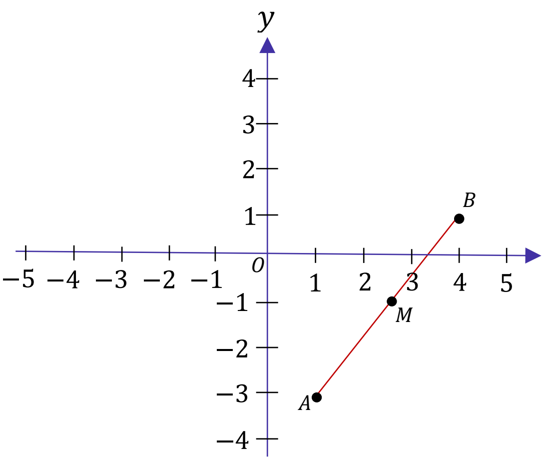
$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |(4 + 12 + 40) - (12 + 10 + 16)| \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \cdot |56 - 38| \quad \rightarrow \quad A = \frac{|18|}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{A = 9}$$

Gabarito: LETRA B.

Pontos Importantes

Para encerrar esse tópico inicial, vamos destacar dois pontos que são muito importantes para o nosso estudo, pois frequentemente aparecem em provas: **o ponto médio de um segmento de reta e o baricentro de um triângulo.** Imagine que você está com a seguinte situação:



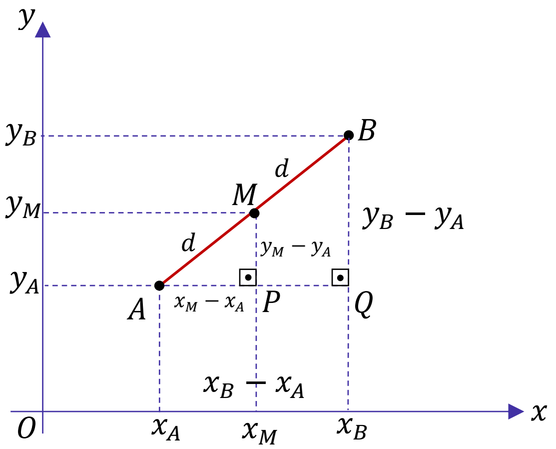
Temos um segmento de reta $\overline{AB}$ e queremos descobrir o ponto dele que dista igualmente das extremidades. Esse ponto é o famoso **ponto médio** e suas coordenadas são dadas pela **média aritmética das coordenadas dos pontos das extremidades**. Matematicamente,

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Para a situação que desenhamos acima, teríamos, portanto,

$$M=\left(\frac{1+4}{2},\frac{-3+1}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad M=\left(\frac{5}{2},\frac{-2}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad M=\left(\frac{5}{2},-1\right)$$

Esse é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Vamos entender agora o motivo disso.



Observe a figura acima. Ela pode parecer um pouco pesada, mas garanto que **faremos apenas coisas simples**. A primeira coisa que gostaria que você percebesse é que o segmento $\overline{AM}$ **mede** d. Analogamente, o segmento $\overline{MB}$ **também mede** d.

Isso acontece pois M é o nosso ponto médio e, da definição, **ele dista igual das duas extremidades do segmento**. Com isso, podemos dizer que o comprimento $\overline{AB}$ mede $2d$. Agora, perceba que os triângulos retângulos **AMP e ABQ são semelhantes**. Desse modo,

$$\frac{x_M-x_A}{\cancel{d}}=\frac{x_B-x_A}{2\cancel{d}}$$

$$x_M-x_A=\frac{x_B-x_A}{2}$$

$$x_M=\frac{x_B-x_A}{2}+x_A$$

$$x_M=\frac{x_B-x_A+2x_A}{2}$$

$$x_M=\frac{x_B+x_A}{2}$$

Pronto! Essa é a abscissa do ponto médio! *E a coordenada?* O processo é exatamente o mesmo e deixarei a seu cargo demonstrar que:

$$y_M = \frac{y_B + y_A}{2}$$

Beleza, vamos ver no exercício?

(PREF. ACRELÂNDIA/2022) Duas cidades A e B, distantes entre si X metros, estão localizadas em coordenadas (c, 5) e (3, c). Sabendo que há um posto de gasolina no ponto médio entre as duas cidades localizado no ponto M(2, 3), qual é o valor de X?

A) $\sqrt{20}$

B) $\sqrt{35}$

C) $\sqrt{7}$

D) $\sqrt{32}$

E) $\sqrt{40}$

Comentários:

Sabemos que as coordenadas do ponto médio, denotado por M nessa questão, são dadas por:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Do enunciado, tiramos que: $A = (c, 5)$ e $B = (3, c)$. Logo:

$$M = \left(\frac{c + 3}{2}, \frac{5 + c}{2}\right)$$

Como **o ponto médio dado pela questão é M = (2, 3),** comparar as coordenadas:

$$\frac{c + 3}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad c = 1$$

$$\frac{c + 5}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad c = 1$$

Observe que só precisamos fazer para uma das coordenadas... Afinal, se o problema foi bem escrito, então **as duas situações devem resultar no mesmo valor para "c",** da forma como encontramos acima!

Com o valor de "c", agora sabemos quem são A e B:

$$A = (1, 5) \qquad B = (3, 1)$$

Com as coordenadas dos pontos, **podemos calcular a distância entre eles**.

$$x = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$x = \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - 5\,)^2}$$

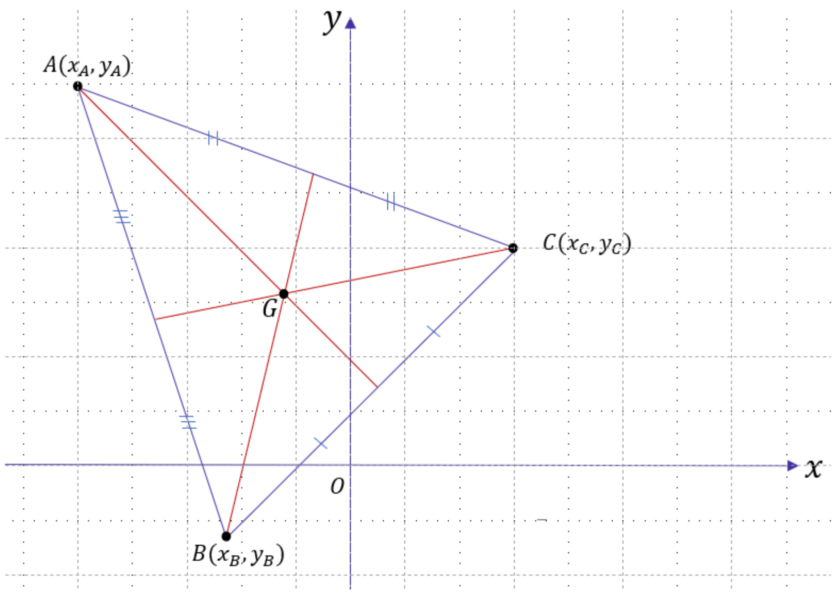
$$x = \sqrt{2^2 + (-4)^2}$$

$$x = \sqrt{4 + 16}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = \sqrt{20}}}$$

Gabarito: LETRA A.

Falta comentarmos um pouco sobre as coordenadas do baricentro de um triângulo. Pessoal, eu sei que você lembra tudo da nossa aula de geometria básica, mesmo assim, farei uma breve revisão sobre baricentro. **O baricentro é o ponto de encontro das medianas de um triângulo**. Por sua vez, as medianas são segmentos de reta que partem de um vértice até o lado oposto, **dividindo-o ao meio**. Observe a figura abaixo.



Uma observação sobre as medianas é que **elas não precisam tocar o outro lado fazendo um ângulo de 90°**. A condição é apenas **dividir o lado em duas partes iguais**. O encontro delas, por sua vez, é o baricentro (G) e o mesmo possui uma fórmula fácil de ser lembrada:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

As coordenados do baricentro é a média aritmética das coordenadas **dos três vértices do triângulo**. Vamos ver como é a cobrança?

(EEAR/2023) Os pontos A(0, 0), B(2, 4) e C(7, 2) são os vértices de um triângulo, no plano cartesiano. Assim, a distância do baricentro do triângulo até o eixo y é _____ unidades de comprimento.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5

Comentários:

Na teoria da aula, vimos que as coordenadas do baricentro de um triângulo são dadas por:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Os pontos do enunciado são:

$$A = (0, 0)$$
$$B = (2, 4)$$
$$C = (7, 2)$$

Logo, **o baricentro** está no ponto:

$$G = \left(\frac{0 + 2 + 7}{3}, \frac{0 + 4 + 2}{3}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{G = (3, 2)}}$$

Queremos a distância do baricentro G até o eixo Oy. Ora, essa medida é dada exatamente pela **abscissa do ponto**! Sendo assim, a distância procurada é igual 3.

Gabarito: LETRA B

Reta

Chegamos ao capítulo sobre retas! Existe muita coisa a se falar sobre elas e sua compreensão é de suma importância para a geometria analítica e muitos outros assuntos da matemática. Por isso, **preste muito atenção**, tome aquele café para ficar esperto e vamos nessa.

Equação da Reta

Normalmente, denotamos uma reta no plano cartesiano por letras minúsculas: r, s, t. Além disso, todos os pontos que estão sobre essa reta, podem ser encontrados por meio de uma relação que denominamos **equação da reta**. Essa equação tem o seguinte aspecto:

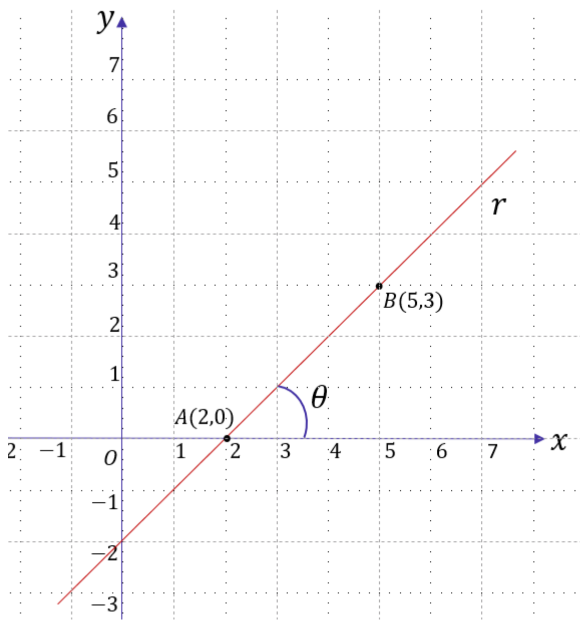
$$y = mx + n$$

Se você já estudou a função de primeiro grau, deve estar bastante familiarizado com essa expressão. A primeira coisa que devemos aprender é o que são esse m e n**.** Vamos lá!

- m é conhecido como **"coeficiente angular da reta"**. Você verá muitas em que precisaremos encontrá-lo. É melhor ficar amigo dele! Será **o número que acompanha o "x"**.

- n é conhecido como **"coeficiente linear da reta"**. Ele vai marcar exatamente o ponto em que a reta toca o eixo Oy.

Beleza! E como fazemos para encontrar uma equação da reta? Considere a reta r da figura abaixo:



Conhecemos dois pontos: $A(2,0)$ e $B(5,3)$. Para encontrar a equação de r, podemos seguir um passo a passo.

- Lembre-se que uma reta pode ser escrita na forma $y = mx + n$.
- Se ela passa por $A(2,0)$, então temos que $0 = 2m + n$.
- Se ela passa por $B(5,3)$, então temos que $3 = 5m + n$.
- Note que temos duas incógnitas e duas equações, podemos montar um sistema.

$$\begin{cases} 2m + n = 0 \\ 5m + n = 3 \end{cases}$$

Você pode resolver o sistema do jeito que quiser. Quando o fizer, encontrará que $m = 1$ e $n = -2$. Logo, a equação da reta que passa por A e B é $y = x - 2$.

- Nesse caso, o coeficiente angular (m) é igual 1.
- O coeficiente linear (n) é igual a -2. Note que é exatamente onde ela toca o eixo Oy.

HORA DE PRATICAR!

(DECEx/2024) Considerando o ponto P (-1,-3) e o ponto Q (3,5), marque a alternativa que expressa a equação da reta que passa pelo ponto P e Q.

A) $3x - 5y + 2 = 0$
B) $2x + y + 1 = 0$
C) $5x + 2y - 3 = 0$
D) $2x - y - 1 = 0$
E) $3x - 5y - 5 = 0$

Comentários:

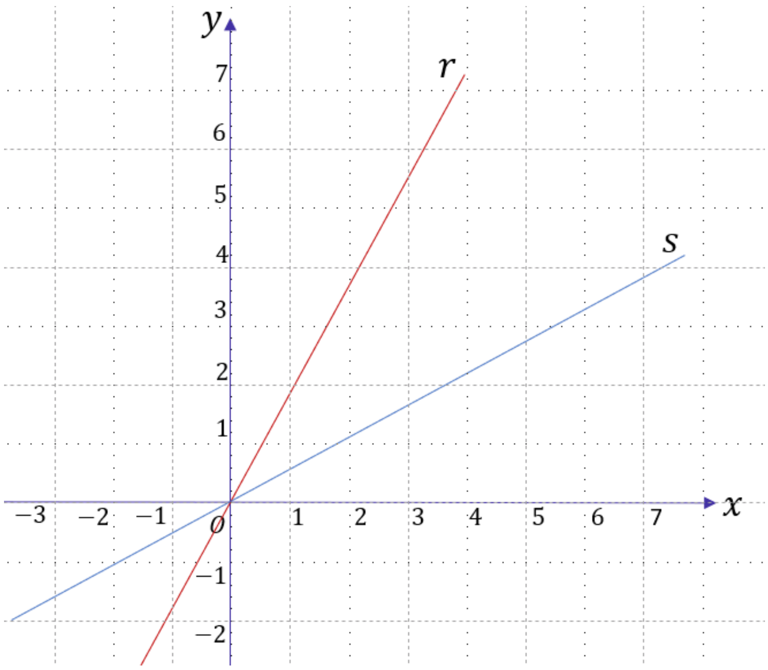
Normalmente, **vamos ter dois pontos e precisaremos encontrar a equação da reta que passa por eles**.

i) Lembre-se que uma reta pode ser escrita na forma $y = mx + n$.
ii) Se ela passa por $P\ (-1,-3)$, então temos que $-3 = -m + n$.
iii) Se ela passa por $Q\ (3,5)$, então temos que $5 = 3m + n$.
iv) Note que temos duas incógnitas e duas equações, podemos montar um sistema.

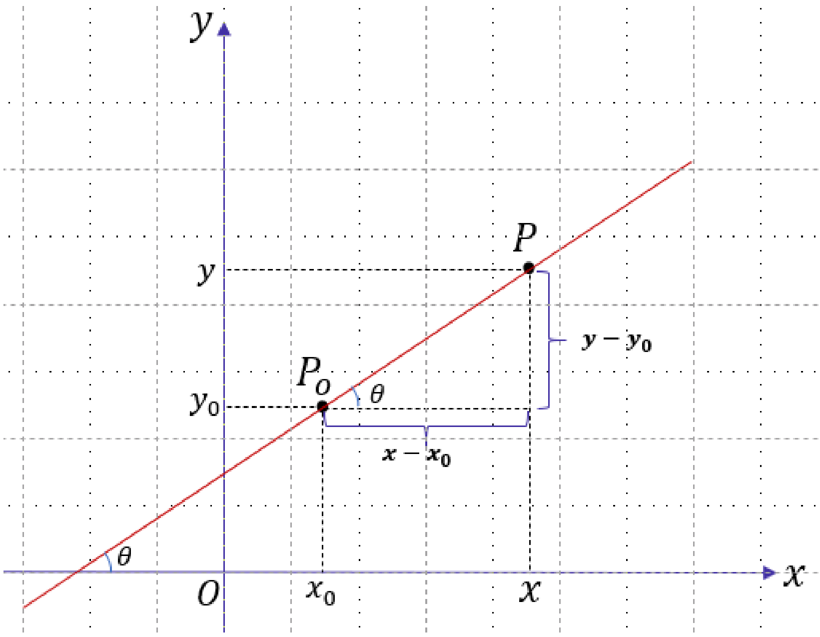
$$\begin{cases} -m + n = -3 \\ 3m + n = 5 \end{cases}$$

O sistema pode ser resolvido pelo método de sua preferência. Ao resolvê-lo, encontraremos que $m = 2$ e $n = -1$. Logo, a equação da reta que estamos procurando é $y = 2x - 1$. Quando colocamos no formato dado nas alternativas, obtemos $\boxed{\mathbf{2x - y - 1 = 0}}$. Resposta alternativa D!

Existem algumas considerações que devemos fazer sobre o coeficiente angular. **Ele está intimamente relacionado com a inclinação da reta.** Pequenos valores representam pequenas inclinações, são retas "mais horizontais". Grandes valores de coeficiente angular estão associados a reta "mais verticais".



Observe, por exemplo, que a reta r é mais inclinada do que a reta s. Apenas olhando o gráfico das duas, conseguimos deduzir que **o coeficiente angular de r é maior do que da reta s**. Mas por que isso ocorre? De onde vem essa relação entre coeficiente angular e inclinação? Imagine uma reta genérica que sabemos passar pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$ e ter inclinação θ, ambos conhecidos. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre essa reta.



Quando falamos de inclinação da reta, **estamos nos referindo ao ângulo que ela faz com a horizontal** (isto é, com o eixo Ox ou qualquer reta paralela a ele). Na figura acima, **chamamos esse ângulo de θ**. Note que podemos levá-lo para dentro do triângulo retângulo que desenhamos. Desse modo, podemos escrever que:

$$\tan\theta = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Agora, vamos manipular essa expressão um pouco para tentar deixá-la com o aspecto de equação de reta.

$$\tan\theta = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \Rightarrow \quad y - y_0 = \tan\theta \cdot (x - x_0)$$

$$y = \tan\theta \cdot x + (y_0 - \tan\theta \cdot x_0)$$

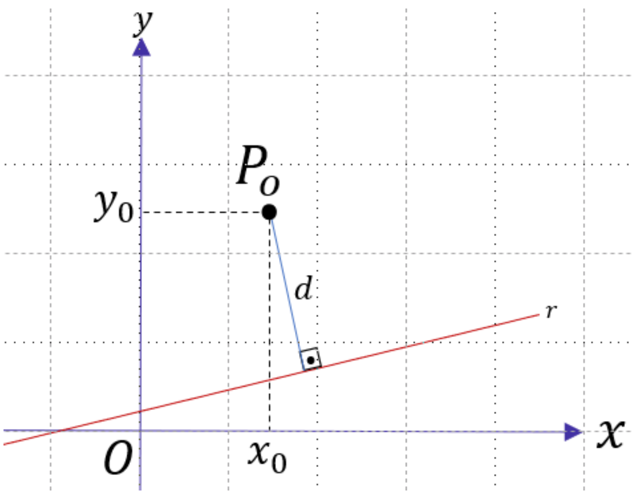
Chamando $m = \tan\theta$ e $n = y_0 - \tan\theta \cdot x_0$, obtemos que:

$$y = mx + n$$

Observe que **o coeficiente angular da reta é exatamente a tangente da inclinação**! Por esse motivo, temos uma estrita relação entre os dois. Esclarecido isso, vamos adiante!

Distância entre uma Reta e um Ponto

Precisaremos, algumas vezes, calcular a distância entre uma reta e um ponto. Dê uma olhada na figura:



A distância d equivale ao comprimento do segmento de reta que destacamos na imagem. Observe que ele **deve ser perpendicular à reta r**, pois assim garantimos que é a menor distância possível. Para calculá-la, é preciso ter em mente mais uma fórmula.

$$d_{r,P} = \frac{|\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{c}|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}}$$

x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto do qual queremos medir a distância até a reta. E o "a", o "b" e o "c"? Que quantidades são essas? Vamos lá! **Além de usarmos a forma $\boldsymbol{y = mx + n}$ para representar uma reta, frequentemente também utilizamos a forma $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$**. Ora, mas como assim? Calma, aluno! Vai fazer sentido logo!

Considere a equação de reta $y = 2x + 3$. Vamos trazer todos os termos para o esquerdo? Fazendo isso, ficamos com $-2x + y - 3 = 0$. Nessas condições, temos que $a = -2$, $b = 1$ e $c = -3$. Vamos fazer isso para mais algumas equações?

- $y = -x - 1 \quad \Rightarrow \quad x + y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1, b = 1$ e $c = 1$.
- $y = -5x + 2 \quad \Rightarrow \quad 5x + y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 5, b = 1$ e $c = -2$.
- $y = \frac{1}{2}x - 1 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1, b = 2$ e $c = 2$.
- $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3x + 2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3, b = 2$ e $c = 1$.

Agora que sabemos encontrar a, b e c, podemos tentar praticar um pouco, correto?

(EEAR/2021) Qual é a distância entre o ponto $A\ (-3,5)$ e a reta de equação $-4x + 2y - 2 = 0$?

A) 5.

B) 10.

C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{10}$

E) $\sqrt{20}$

Comentários:

Olha que beleza! O enunciado trouxe a equação na forma que precisamos. Assim, $a = -4$, $b = 2$ e $c = -2$. Basta aplicarmos a fórmula que acabamos de ver.

$$d_{r,P} = \frac{|\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{c}|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}}$$

$$d_{r,P} = \frac{|(\mathbf{-4})\cdot(-3) + \mathbf{2}\cdot 5 - 2|}{\sqrt{(\mathbf{-4})^2 + 2^2}}$$

$$d_{r,P} = \frac{|\mathbf{12} + \mathbf{10} - \mathbf{2}|}{\sqrt{16+4}}$$

$$d_{r,P} = \frac{|20|}{\sqrt{20}}$$

Racionalizando:

$$d_{r,P} = \frac{|20|}{\sqrt{20}} \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$$

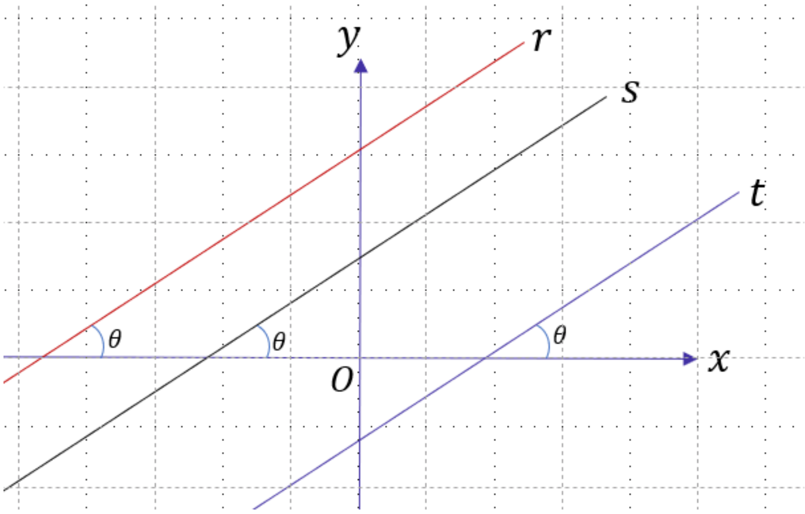
$$d_{r,P} = \frac{20\sqrt{20}}{20}$$

$$\boxed{d_{r,P} = \sqrt{20}}$$

Gabarito: LETRA E.

Retas Paralelas

Duas retas serão paralelas **quando elas não se encontrarem em nenhum momento**. Também podemos dizer que **elas possuem a mesma inclinação**.



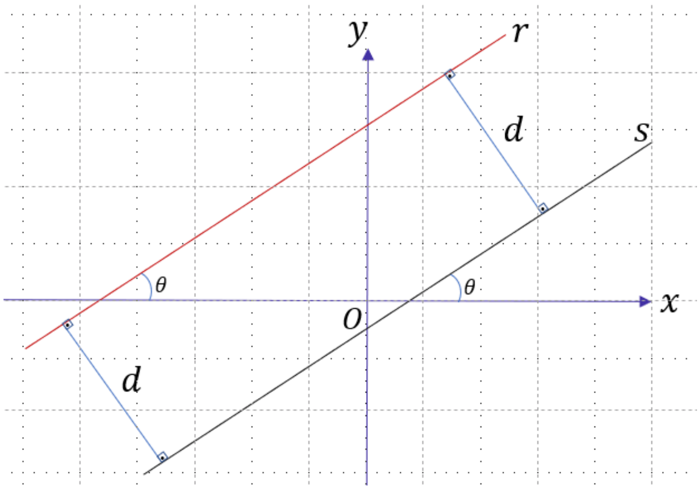
As retas r, s e t acima são paralelas. Observe que fiz questão de colocar a inclinação igual em todas. Por que saber disso importante? Pois **se retas paralelas possuem a mesma inclinação, então elas têm o mesmo coeficiente angular (m)**. Ora, se o coeficiente angular é o mesmo, será muito fácil identificá-las. Veja:

- As retas $y = 2x + 1$ e $y = 2x - 10$ **são paralelas** pois possuem o mesmo coeficiente angular $m = 2$.
- As retas $y = x - 1$ e $y = x - 4$ **são paralelas** pois possuem o mesmo coeficiente angular $m = 1$.
- As retas $y = -5x + 1$ e $y = 5x$ **não são paralelas** pois possuem coeficientes angulares distintos.

Consequentemente, nas situações em que as retas estiverem na forma $ax + by + c = 0$, **elas apresentarão o mesmo a e o mesmo b, diferenciando apenas no c**.

- As retas $5x + 2y - 3 = 0$ e $5x + 2y - 10 = 0$ são paralelas.
- As retas $x - 3y = 0$ e $x - 3y + 7 = 0$ são paralelas.
- As retas $2x + y + 2 = 0$ e $x + y + 2 = 0$ não são paralelas.

Perceba que **duas retas paralelas sempre vão estar afastadas de uma mesma distância d**.



Como fazemos para calcular essa distância? Imagine que você tem duas retas paralelas na forma:

- r: $ax + by + c = 0$
- s: $ax + by + c' = 0$

A distância entre as duas é dada por:

$$d_{r,s} = \frac{|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}'|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}}$$

Sei que você pode tá curioso (ou não) para saber de onde vem essas relações. Mais uma vez, ressalto que as demonstrações podem ser demasiadamente grandes de modo que **o custo-benefício é muuuuito pouco**. Minha sugestão é que você pegue uma folha de ofício A4, anote todas elas. Sempre que puder, dê uma olhada. Claro, não deixe de fazer exercícios, são eles que farão uma grande parte na hora da memorização.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. VIAMÃO/2022) A única alternativa em que constam duas retas paralelas é:

A) $x + 2 = y$ e $-x + 3 = -y$

B) $x + 4 = 2y$ e $-x + 4 = 2y$

C) $x - 2 = y$ e $x - 3 = -y$

D) $x + 2 = 2y$ e $-x + 3 = -y$

E) $2x + 2 = y$ e $2x + 3 = -y$

Comentários:

Para encontrar duas retas paralelas, basta olharmos para o coeficiente angular (m).

a) $x + 2 = y$ e $-x + 3 = -y$

Nosso gabarito! Observe que as duas possuem o mesmo coeficiente angular. O examinador tenta enganar trocando o sinal do "y". Com isso, devemos multiplicar toda a segunda equação por -1. Quando fazemos isso, percebemos que o "m" das duas equações é igual a 1. Logo, são retas paralelas.

b) $x + 4 = 2y$ e $-x + 4 = 2y$

Não são paralelas. A primeira tem coeficiente angular $m = 1/2$ e a segunda tem $m = -1/2$.

c) $x - 2 = y$ e $x - 3 = -y$

Não são paralelas. A primeira tem coeficiente angular $m = 1$ e a segunda tem $m = -1$.

d) $x + 2 = 2y$ e $-x + 3 = -y$

Não são paralelas. A primeira tem coeficiente angular $m = 1/2$ e a segunda tem $m = 1$.

e) $2x + 2 = y$ e $2x + 3 = -y$

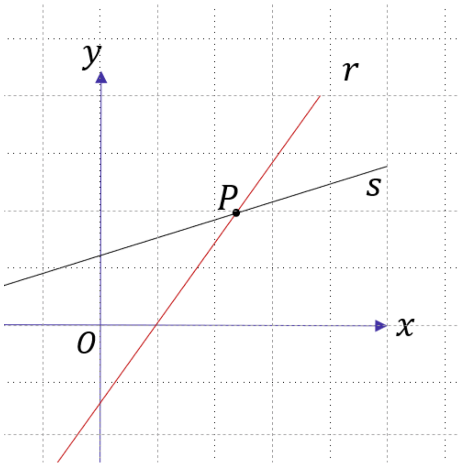
Não são paralelas. A primeira tem coeficiente angular $m = 2$ e a segunda tem $m = -2$.

Gabarito: LETRA D.

Intersecção entre Retas

Quando estamos em um plano e **duas retas não são paralelas**, então **em algum momento elas irão se tocar**. Nesse caso, dizemos que **as retas são concorrentes e que possuem um ponto em comum**, uma intersecção. Muitas vezes precisaremos encontrar esse ponto e não há dificuldade nisso, vamos aprender daqui a pouco. Além disso, vale destacar que elas se tocam em apenas um único ponto.

Não há como duas retas distintas tocarem em dois ou mais lugares.



As retas r e s acima são concorrentes. Veja que elas possuem apenas uma intersecção, que é o ponto P. Como fazemos para encontrá-lo? Imagine que temos as seguintes retas:

- $r: \quad y = x - 1$
- $s: \quad y = \frac{x}{3} + 1$

Queremos encontrar onde as duas se encontram! Para isso, **basta igualarmos as equações**.

$$x - 1 = \frac{x}{3} + 1 \quad \rightarrow \quad x - \frac{x}{3} = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{2x}{3} = 2 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

Substituindo $x = 3$ em qualquer uma das equações da reta, temos que:

$$y = 3 - 1 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

Logo, **as duas retas se encontram no ponto $(3, 2)$**. Tente substituir esse ponto nas duas equações e veja que elas são igualmente satisfeitas! Mais a frente, veremos como encontrar a intersecção entre a reta e uma circunferência e o procedimento será bastante parecido.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. LORENA/2024) Em que ponto do espaço as retas $y = -2x + 3$ e $y = -4x + 5$ se interceptam?

A) $(1; 0{,}5)$.

B) $(0{,}5; 1)$.

C) $(1; 2)$.

D) $(2; 1)$.

E) $(1; 1)$.

Comentários:

Para encontrar o ponto em que as duas retas se intersectam, devemos igualar os valores de "y"!

$$-2x + 3 = -4x + 5$$
$$4x - 2x = 5 - 3$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

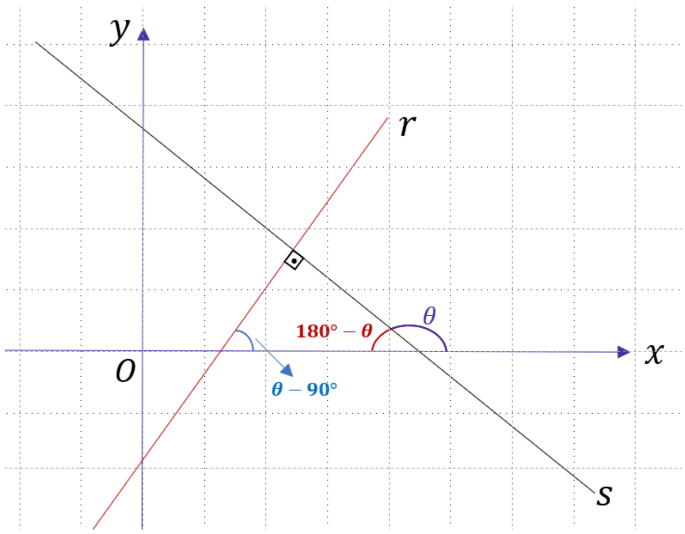
Pronto! Com o valor da abscissa, podemos **usá-lo em qualquer uma das equações** para encontrar y.

$$y = -2x + 3$$
$$y = -2 \cdot 1 + 3$$
$$y = -2 + 3$$
$$y = 1$$

Com isso, podemos concluir que as duas retas se encontram no **ponto (1,1). Gabarito:** LETRA E.

Retas Perpendiculares

Retas perpendiculares são um tipo de reta concorrente. Nesse caso, teremos duas retas que se encontrarão em uma condição especial: devem formar entre si um ângulo de 90°. *Beleza, professor! Nós conseguimos identificar duas retas perpendiculares apenas olhando para as equações?* Então! Não será tão imediato como fazíamos com as retas paralelas, pois precisaremos fazer **uma rápida continha**.



Observe que as retas r e s acima são perpendiculares. Em símbolos, podemos dizer que $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{s}$. Ademais, veja que a inclinação de s é θ e a inclinação de r é $\theta - 90°$. Queremos estabelecer uma relação entre r e s, de modo a verificar se duas retas são perpendiculares apenas a usando. A inclinação θ é um valor genérico para inclinação. Já **$\theta - 90°$ é uma consequência das duas serem perpendiculares**. Para encontrá-la, basta visualizar o triângulo retângulo cujo ângulos estão destacados na figura. Observe que:

$$\tan(\theta - 90°) = \frac{sen(\theta - 90°)}{\cos(\theta - 90°)}$$

$$\tan(\theta - 90°) = \frac{\text{sen}\,\theta \cdot \cos 90° - \text{sen}\,90° \cdot \cos\theta}{\cos\theta \cdot \cos 90° + \text{sen}\,\theta \cdot \text{sen}\,90°}$$

$$\tan(\theta - 90°) = \frac{-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\tan(\theta - 90°) = \frac{-1}{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}} \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta - 90°) = \frac{-1}{\tan\theta}$$

$$\tan(\theta - 90°) \cdot \tan\theta = -1$$

Lembre-se que **o coeficiente angular de uma reta é a tangente da sua inclinação**. Logo, $m_r = \tan(\theta - 90°)$ e $m_s = \tan\theta$. Dessa forma, conseguimos reescrever a expressão acima:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

Essa é a condição que devemos checar para que duas retas sejam perpendiculares. Pegamos os dois coeficientes angulares, se a multiplicação deles for igual a menos um, **então essas retas são perpendiculares**.

(CBM-PE/2024) Considere a reta r, cuja equação pode ser caracterizada por $3x - y = 2$, e a reta s, que sabemos ser perpendicular à reta r, passando pelo ponto (−1,5). Com tais características, a reta s interceptará o eixo das ordenadas no ponto

A) (0, 16/3)
B) (0, 14/3)
C) (16/3, 0)
D) (14/3, 0)
E) (0, 0).

Comentários:

Vamos lá! Inicialmente, sabemos que a reta r é dada pela equação $3x - y = 2$. Dessa equação, conseguimos retirar que o coeficiente angular da reta é $m_r = 3$. Como **r é perpendicular a s**, sabemos que vale:

$$\boldsymbol{m_r \cdot m_s = -1} \quad \rightarrow \quad 3m_s = -1 \quad \rightarrow \quad m_s = -\frac{1}{3}$$

Com o coeficiente angular m_s, podemos escrever que a equação de s tem o seguinte formato:

$$y = m_s x + n \quad \rightarrow \quad y = -\frac{x}{3} + n$$

Professor, como descobrimos o coeficiente linear "n"? Para determinarmos "n", vamos usar o ponto que ele deu! Note que a questão fala que ***s*** **passa pelo ponto (-1, 5).** Sendo assim:

$$5 = -\frac{(-1)}{3} + n \quad \rightarrow \quad 5 = \frac{1}{3} + n \quad \rightarrow \quad n = \frac{14}{3}$$

Pronto! Logo, a equação da reta s é dada por:

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{14}{3}$$

A questão pede **onde a reta toca o eixo das ordenadas**. Ora, no eixo das ordenadas, temos que $\boldsymbol{x = 0}$. Logo:

$$y = \frac{14}{3}$$

Com isso, o ponto que estamos procurando é $\left(0, \frac{14}{3}\right)$.

Gabarito: LETRA B.

INDO MAIS FUNDO!

Aprendemos anteriormente que quando duas retas são perpendiculares (fazem entre si um ângulo de 90°), seus coeficientes angulares estão relacionados por:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

Mas será que existe uma expressão que relaciona os coeficientes angulares de duas que fazem um ângulo qualquer α entre si? Existe sim! Anote aí.

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|$$

Dificilmente ela cai! Portanto, não fique tão preocupado com ela. Basta anotá-la no resumo e voltar a visualizá-la no dia da prova. Ademais, na nossa lista de exercícios, poderemos treiná-la! Ok?!

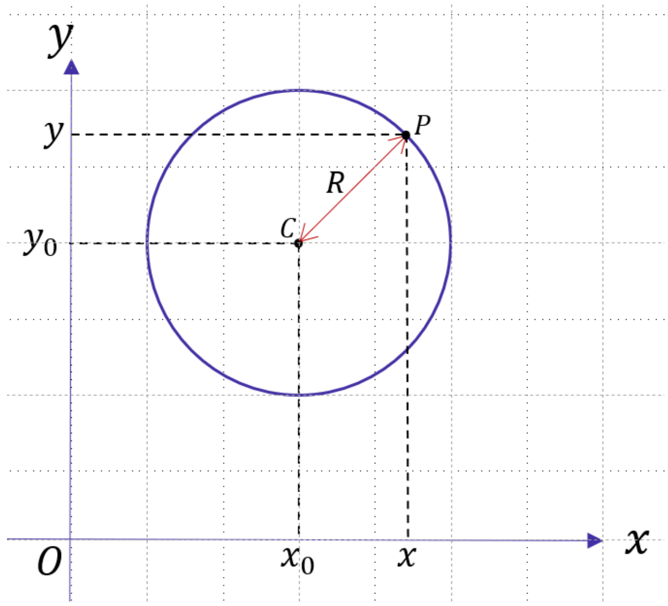
CIRCUNFERÊNCIA

Opa, vamos entrar agora no estudo da circunferência! Formalmente, podemos definir uma circunferência como **o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância R de um centro $C(x_0, y_0)$.** Vale ressaltar que estamos apenas considerando os **pontos que estão em um mesmo plano**. Se considerarmos qualquer ponto do espaço, com essa definição, teríamos uma esfera.

Caso tenha achado a definição um pouco difícil, não se preocupe! Vamos com calma e tenho certeza de que você entenderá tudo muito bem ao final.

Equação da Circunferência

Assim como as retas, as circunferências possuem uma equação bastante característica. Com o tempo, bastará você olhar para a equação e conseguirá identificar de cara se é uma circunferência ou não. Vamos tentar deduzi-la? Acompanhe a figura abaixo:



Alguns capítulos atrás, nós vimos a fórmula da distância entre dois pontos. Vamos utilizar ela aqui, pois sabemos que a distância do centro da circunferência $C = (x_0, y_0)$ é constante para qualquer ponto $P(x, y)$ que está sobre a circunferência.

$$d^2(A, B) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d^2(P, C) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Pronto, simples assim! Apenas usando a fórmula da distância entre dois pontos, obtemos a equação da circunferência. Um detalhe importante é que **do lado direito temos o raio ao quadrado!** A banca costuma dizer que é apenas o raio. Confira abaixo alguns exemplos.

- $(x-1)^2+(y-2)^2=4 \quad \Rightarrow \quad \text{Centro}=(1{,}2) \quad \text{e} \quad \text{Raio}=2$
- $(x+1)^2+(y+2)^2=2 \quad \Rightarrow \quad \text{Centro}=(-1,-2) \quad \text{e} \quad \text{Raio}=\sqrt{2}$
- $(x+1/2)^2+(y-4)^2=100 \quad \Rightarrow \quad \text{Centro}=\left(-\frac{1}{2},4\right) \quad \text{e} \quad \text{Raio}=10$
- $x^2+(y-2)^2=25 \quad \Rightarrow \quad \text{Centro}=(0,\ 2) \quad \text{e} \quad \text{Raio}=5$
- $(x-1)^2+y^2=81 \quad \Rightarrow \quad \text{Centro}=(1,0) \quad \text{e} \quad \text{Raio}=9$
- $x^2+y^2=4 \quad \Rightarrow \quad \text{Centro}=(0{,}0) \quad \text{e} \quad \text{Raio}=2$

Observe que sempre que tivermos uma circunferência centrada na origem, a equação fica bem simples.

(PREF. CANDIOTA/2023) Qual a equação da circunferência cujo centro está em C (2,1) e tem perímetro medindo 14π cm?

A) $(x-2)^2+(y-1)^2=49$
B) $(x+2)^2+(y+1)^2=49$
C) $(x-2)^2+(y-1)^2=7$
D) $(x+2)^2+(y+1)^2=7$
E) $(x+2)^2+(y+1)^2=0$

Comentários:

Sabemos que a equação da circunferência tem o seguinte formato:

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2$$

Como o enunciado fornece **as coordenadas do centro**, já podemos escrever:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=R^2$$

Para determinarmos o raio, **devemos usar o perímetro** também fornecido.

$$C=2\pi R \quad \rightarrow \quad 14\pi=2\pi R \quad \rightarrow \quad R=7$$

Pronto! Com o raio, podemos completar nossa equação:

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-1)^2 = 7^2 = 49}$$

Gabarito: LETRA A.

Assim como as retas, **às vezes a equação da circunferência pode vir de um outro modo**. Para explicar isso, considere a seguinte circunferência centrada em $(2,1)$ e com raio igual a 1.

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Observe que podemos desenvolver os quadrados e você deve lembrar que $(a \pm b)^2 = a \pm 2ab + b^2$. Assim,

$$(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) + (y^2 - 2 \cdot 1 \cdot y + 1^2) = 1$$
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - y + 1) = 1$$
$$x^2 - 4x + y^2 - y + 4 = 0$$

A equação acima, portanto, também é uma equação de circunferência. Perceba que quando ela aparece desse modo, **é muito mais difícil identificar quem é o centro e quem é o raio**. Minha sugestão é que, quando você se deparar com uma equação de circunferência nesse formato, você tente trazê-la para o formato que vimos inicialmente! **Você pode fazer isso completando quadrados**. Vamos entender na prática?

(PREF. MARICÁ/2024) Em um sistema de coordenadas cartesianas, dois pontos, A (2, -3) e B (8, 1), são extremidades de um diâmetro de uma circunferência. Mariana, uma aluna do ensino médio, foi desafiada a encontrar a equação dessa circunferência. Corretamente, obteve:

A) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$
B) $x^2 + y^2 + 5x - y - 11 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 5x + y - 11 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 23 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 23 = 0$

Comentários:

Inicialmente, vamos calcular **a distância entre esses dois pontos.** O motivo disso é que a distância entre esses dois pontos é igual ao diâmetro da circunferência. Logo, poderemos determinar o raio.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(8-2)^2 + (1-(-3)\,)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{6^2 + 4^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{36+16}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(A,B) = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}}}$$

Sabemos que **o raio é metade do diâmetro**:

$$R = \frac{2\sqrt{13}}{2} \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{13}$$

Pronto, temos o raio. Para saber a equação da circunferência, ainda falta determinar o centro. Ora, se A e B **são as extremidades de um diâmetro**, então **o ponto médio do segmento AB é o centro**.

$$C = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$C = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$$

$$C = (5,-1)$$

Com o centro e o raio, a equação da circunferência fica:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 13$$

Vamos desenvolver os quadrados.

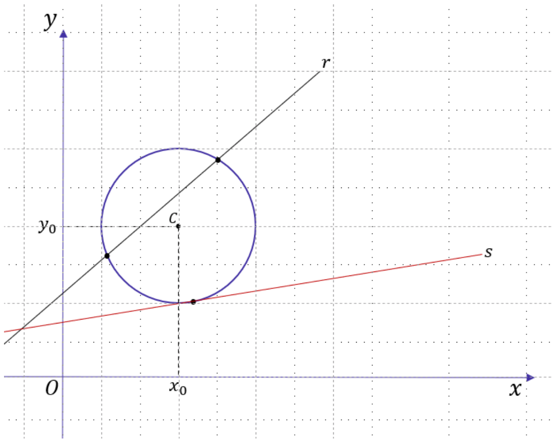
$$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 + 2y + 1) = 13$$

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0}}$$

Gabarito: LETRA A.

Intersecção da Reta com a Circunferência

Muitas vezes iremos encontrar problemas em que retas intersectam circunferências. Veja a figura abaixo.



A reta r, por exemplo, intersecta a circunferência da figura **em dois pontos** (e essa é a quantidade máxima de intersecções que uma reta por ter com uma mesma circunferência). Por sua vez, **a reta s intersecta a circunferência em apenas um ponto**. Nessa situação dizemos que **s é tangente à circunferência**. Como fazemos para encontrar esses pontos de contato?

EXEMPLIFICANDO

(PREF. ÁGUA BOA/2024) No plano cartesiano ortogonal, a reta $y = x + m$ tangencia a circunferência de equação $(x-1)^2 + y^2 = 4$. A soma dos possíveis valores reais de m é igual a:

A) 1

B) 2

C) -1

D) -2

Comentários:

Se a reta dada tangencia a circunferência, então sabemos que eles possuem apenas um ponto em comum. Para determiná-lo, devemos **substituir a equação da reta na equação da circunferência**.

$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$

Substituindo $\boldsymbol{y = x + m}$:

$$(x-1)^2+(x+m)^2=4$$

Desenvolvendo os quadrados:

$$(x^2-2x+1)+(x^2+2mx+m^2)=4$$

$$2x^2+(2m-2)x+(m^2-3)=0$$

Vamos calcular o discriminante (delta) dessa equação?

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(2m-2)^2-4\cdot 2\cdot(m^2-3)$$
$$\Delta=4m^2-8m+4-8m^2+24$$
$$\Delta=-4m^2-8m+28$$

Para que haja apenas uma raiz e a reta **apenas tangencie** a circunferência, devemos ter que $\boldsymbol{\Delta=0}$.

$$-4m^2-8m+28=0$$

Dividindo por (-4):

$$m^2+2m-7=0$$

Ora, como a questão pede **a soma dos possíveis valores de m** (que são as raízes da equação acima), podemos usar as **relações de Girard**:

$$m'+m''=-\frac{b}{a} \quad\rightarrow\quad m'+m''=-\frac{2}{1} \quad\rightarrow\quad \boxed{\boldsymbol{m'+m''=-2}}$$

Gabarito: LETRA D.

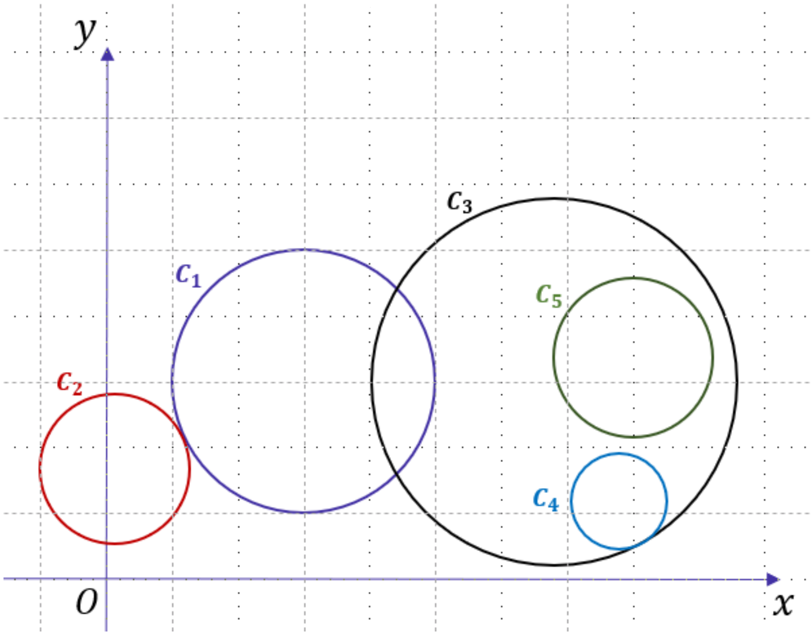
Galera, veja que para encontrarmos os pontos de intersecção, **basta resolvermos um sistema com duas equações: a da reta e a da circunferência.** Se um ponto é comum aos dois, ele vai ser solução desse sistema.

Você pode ter percebido que, às vezes, **poderá ser que apareça uma conta mais chata**. Posso te tranquilizar afirmando que esse tipo de questão não é tão comum. Bora para nosso último tópico em circunferências!

Posição Relativa entre Circunferências

Duas circunferências podem estar dispostas no plano em diferentes posições. Conhecer **essas posições pode ser fundamental para a análise de um problema**. De modo direto, duas circunferências podem assumir as seguintes posições relativas:

- Exteriores;
- Tangentes Externas;
- Secantes;
- Tangentes Internas;
- Internas.



Na figura acima, temos várias circunferências dispostas de maneiras distintas.

- Perceba que as circunferências C_1 e C_5 **não se tocam**, como nenhuma está dentro da outra, dizemos apenas que **elas são externas**. Bem intuitivo, né?

- Por sua vez, as circunferências C_5 e C_3 também **não se tocam**, mas C_5 está dentro de C_3. Nesse caso, dizemos que essas circunferências **são interiores**.

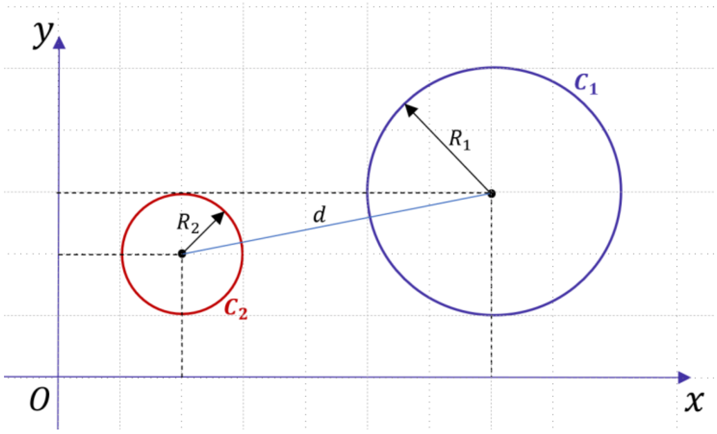
- C_1 e C_2 **se tocam em um único ponto** e ninguém está dentro de ninguém. Nessa situação, dizemos que as circunferências **são tangentes externas**.

- C_4 e C_3 **se tocam em um único ponto**, mas C_4 está dentro de C_3. Nessa situação, dizemos que as circunferências **são tangentes internas**.

- C_1 e C_3 **se tocam em dois pontos**. Quando isso ocorre, dizemos que as circunferências **são secantes**.

Esse nosso papo inicial é apenas para fornecer **uma noção intuitiva**. Veremos agora uma maneira quantitativa de determinar qual é a posição relativa de duas circunferências, agora vai ficar ainda mais claro! Bora nessa!

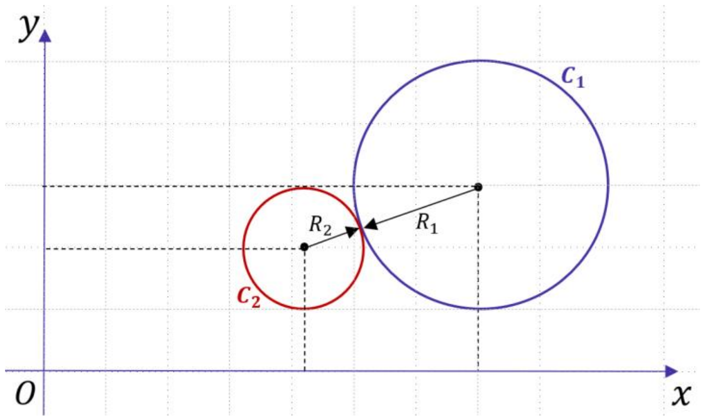
- **Circunferências Externas**



A coisa mais importante que devemos perceber de circunferências que são externas é que **seus centros estão bem distantes**. É exatamente essa distância que vamos usar para definir as posições relativas entre duas circunferências.

Nessa situação, veja que $\boldsymbol{d > R_1 + R_2}$. Ou seja, sempre que você calcular a distância entre os centros de duas circunferências e **esse resultado for maior do que a soma dos raios**, então essas circunferências serão externas!

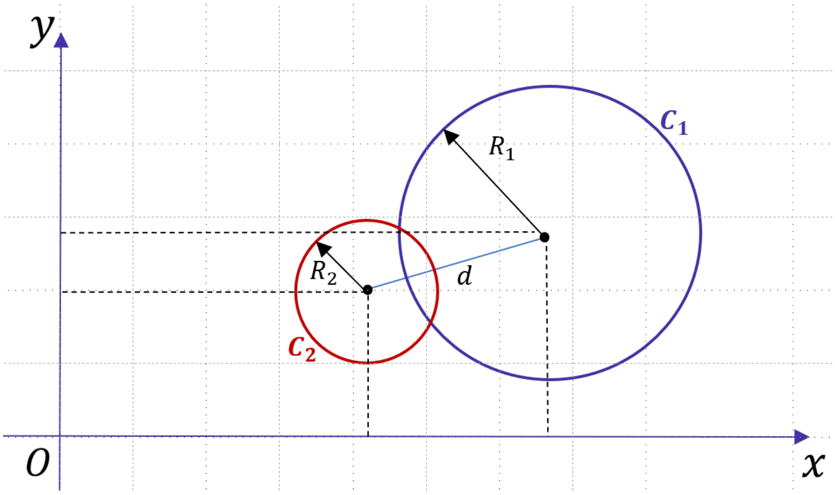
- **Tangentes Externas**



Pessoal, aqui nas tangentes externas, perceba que **a distância entre os centros é igual à soma dos raios das circunferências**. Portanto, para que as duas estejam nessa posição relativa, devemos ter:

$$d = R_1 + R_2$$

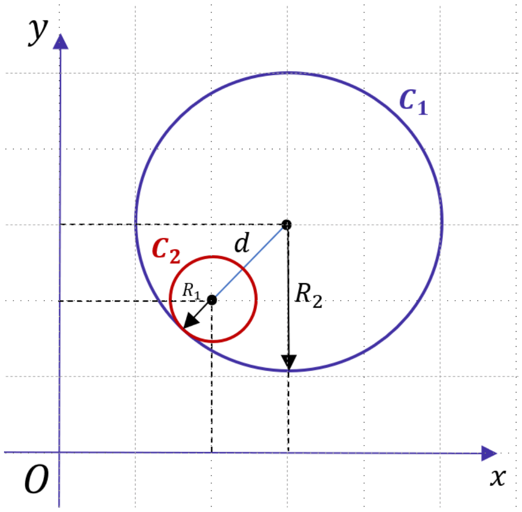
- **Secantes**



Observe que nas retas secantes, **as duas circunferências vão se encontrar em exatos dois pontos**. Para que isso aconteça, **a distância entre os centros deve ser menor do que a soma dos raios de cada uma**.

$$d < R_1 + R_2$$

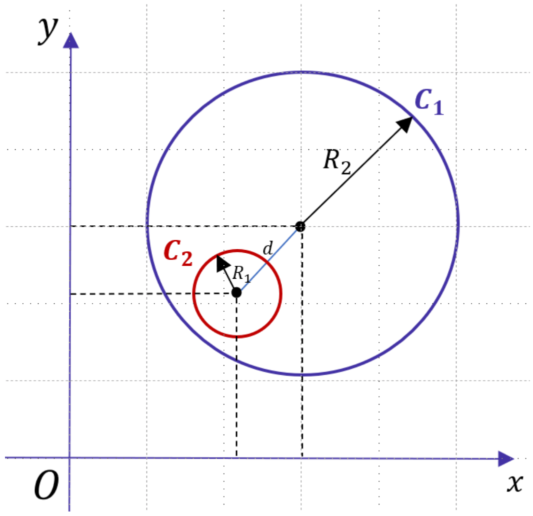
- **Tangentes Internas**



Quando temos circunferências tangentes internas, então **a distância entre os centros é igual a subtração entre o raio maior pelo raio menor**, conseguimos perceber isso da figura acima.

$$d = R_2 - R_1$$

- **Circunferências Internas**



Nas circunferências internas **não há ponto de contanto**. Além disso, como uma está dentro de outra, **a distância entre os centros vai ser menor do que a subtração dos raios**. Dessa forma,

$$d < R_2 - R_1$$

(EsPCEx/2023) Considere as circunferências $\lambda_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ e $\lambda_2: x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$. Qual a posição relativa de λ_1 e λ_2?

A) Uma interior à outra.

B) Tangentes interiormente.

C) Exteriores.

D) Tangentes exteriormente.

E) Secantes.

Comentários:

Para determinar a posição relativa entre duas circunferências, é fundamental conhecer **o centro e o raio de cada uma delas**. Para isso, vamos **completar quadrados** para que possamos escrever λ_1 e λ_2 naquele formato mais simples.

λ_1:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) = -1$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = -1 + 1 + 4$$

$$\boxed{\boldsymbol{(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4}}$$

λ_2:

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$$

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 10y) = -13$$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 10y + 25) = -13 + 4 + 25$$

$$\boxed{\boldsymbol{(x+2)^2 + (y-5)^2 = 16}}$$

Pronto! Temos que $\boldsymbol{\lambda_1}$ **está centrada em (1, 2) e tem raio igual a 2**. Por sua vez, $\boldsymbol{\lambda_2}$ **está centrada em (-2, 5) e tem raio igual a** 4. Vamos calcular a **distância entre os centros**.

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (2 - 5\,)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{3^2 + (-3)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{9 + 9}$$

$$\boxed{d = 3\sqrt{2} \cong 4{,}24}$$

Como $R_2 + R_1 = 6 > d = 4{,}24$, temos que **as circunferências são <u>secantes</u>**.

Gabarito: LETRA E.

Cônicas

Chegamos ao último tópico do nosso estudo de Geometria Analítica. Sem dúvidas, quando estudados com profundidade, cônicas é o assunto mais difícil. No entanto, para sua felicidade, **não iremos esgotar esse conteúdo, pois fugiria do escopo do curso.** Ao final desse capítulo, quero que você saiba apenas o seguinte:

- Conhecer quem são as cônicas;
- Conhecer e identificar cada uma das cônicas pela sua equação.
- Conhecer seus elementos e identificá-los nas equações.

Vamos adiantar a primeira pergunta. As cônicas são **figuras geométricas obtidas pela intersecção de um plano com um cone duplo**. Esse plano pode cortar o cone de diversas maneiras que podem originar até quatro figuras distintas**: a circunferência, a elipse, a parábola e a hipérbole.**

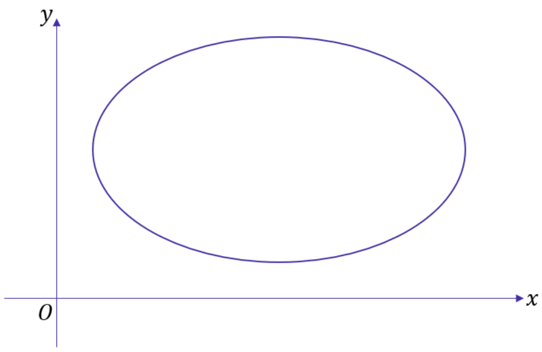
Isso mesmo, a circunferência é uma cônica, mas dedicamos um capítulo à parte para ela **devido a sua maior importância**. Não esqueça disso, ok? Então, quem são as cônicas?

- Circunferência;
- Elipse;
- Parábola;
- Hipérbole.

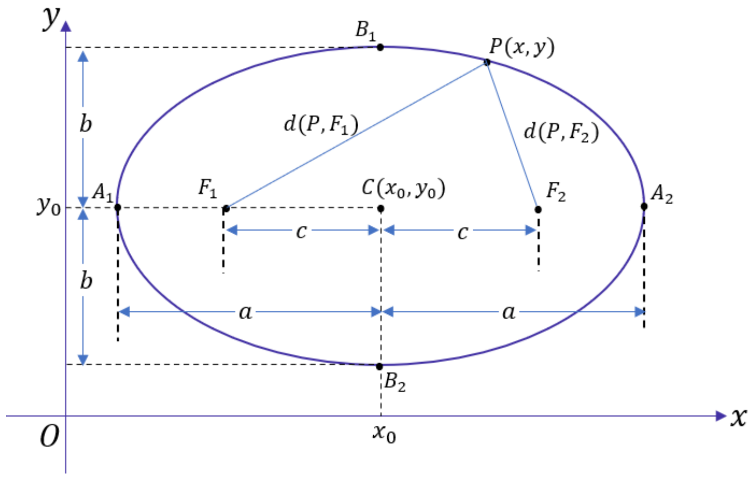
Vamos começar vendo cada uma com detalhes?

Elipse

Primeiramente, essa **não é a elipse que vocês estudaram em português!** Você pode estar dando uma rápida cochilada, mas para orientá-lo, nós estamos estudando matemática, ok?! Tome um café! Deixa-me apresentar para vocês a cara da elipse que vamos estudar:



Ela não precisa estar nessa posição. Sem deixar de ser uma elipse, ela pode estar na vertical, na diagonal... **Essa é a posição mais comum, com o eixo maior paralelo ao eixo Ox**. Veja que, usando essa figura inicial, não conseguimos falar dos elementos da elipse. **Precisamos de uma elipse mais detalhada**.



Vamos destrinchar cada um desses elementos. Primeiro, observe que a elipse, assim como a circunferência, **está centrada em um ponto $C(x_0, y_0)$**. Observe que, distante "c" desse centro, temos dois pontos: F_1 e F_2. **Esses pontos são chamados de focos da elipse** (não é à toa que colocamos a letra F para representá-los*). E o que esses focos têm de importante?* Saiba que **a soma das distâncias dos focos até um ponto qualquer sobre a elipse é constante**. Matematicamente,

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = CONSTANTE = 2a$$

Mais uma vez, veja que cada foco dista "c" do centro da elipse. Logo, **os focos distam "$2c$" um do outro**. A distância $2c$ é conhecida como **distância focal**. É a distância entre os focos! Agora, veja que o centro está a uma distância "a" de A_1 e de A_2. Esse é o nosso semieixo maior, **exatamente a metade do comprimento do maior eixo da elipse**. Analogamente, "b" será nosso semieixo menor. Vamos organizar essas informações?

- $d(P,F_1)$: distância de um ponto $P(x,y)$ sobre a elipse até o foco F_1;
- $d(P,F_2)$: distância de um ponto $P(x,y)$ sobre a elipse até o foco F_2;
- $2c$: distância focal; c: semi-distância focal
- $2a$: eixo maior; a: semieixo maior;
- $2b$: eixo menor; b: semieixo menor;
- (x_0, y_0): coordenadas do centro.

Destrinchamos a figura, não foi? Antes de entrarmos na equação da elipse, quero que vocês guardem uma relação entre os parâmetros a, b e c.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Pessoal, para uma elipse que tem seu eixo maior paralelo ao eixo Ox, temos a seguinte equação:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Veja que ela é **bastante parecida com a equação da circunferência**. No entanto, não vamos ter um raio mas sim as medidas dos semieixos maior (a) e menor (b). Caso a elipse fosse "vertical", ou seja, eixo maior paralelo ao eixo Oy, a equação resultante seria:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

Vamos olhar para algumas equações de elipse para obter seus elementos?

- $\frac{(x-1)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

  Temos uma elipse centrada em $(1,2)$. Seu semieixo maior mede $a=\sqrt{64}=8$. Já o semieixo menor mede $b=\sqrt{25}=5$.

- $\frac{(x+5)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{81}=1$

  Temos uma elipse centrada em $(-5,-3)$. Seu semieixo maior mede $a=\sqrt{100}=10$. Já o semieixo menor mede $b=\sqrt{81}=9$.

- $\frac{x^2}{49}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

  Temos uma elipse centrada em $(0,1)$. Seu semieixo maior mede $a=\sqrt{49}=7$. Já o semieixo menor mede $b=\sqrt{16}=4$.

- $\frac{(x+3)^2}{9}+y^2=1$

  Temos uma elipse centrada em $(-3,0)$. Seu semieixo maior mede $a=\sqrt{9}=3$. Já o semieixo menor mede $b=\sqrt{1}=1$.

(PREF. SJC/2023) O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que satisfazem $9x^2 + 25y^2 = 9$ é uma elipse, cuja distância entre os focos, em unidades de comprimento, vale

A) 0,6.
B) 0,8.
C) 1,2.
D) 1,6.
E) 1,8.

Comentários:

Coloquei essa questão para mostrar que algumas vezes a equação da elipse não vem "bonitinha". Temos:

$$9x^2 + 25y^2 = 9$$

Observe que do lado direito temos o número 9. Na forma que estudamos, o lado direito deve ter 1. Para isso, basta dividirmos tudo por.

$$\frac{9x^2 \ + \ 25y^2}{9} = \frac{9}{9} \qquad \rightarrow \qquad \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\left(\frac{9}{25}\right)} = 1$$

Pronto, agora temos a elipse no formato que conseguimos avaliar melhor seus elementos. Note que ela está centrada na origem $(0,0)$. Além disso, temos que $a^2 = 1$ e $b^2 = 9/25$. Queremos, no entanto, a distância focal. Lembre-se da relação que vimos brevemente na teoria:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Substituindo:

$$1 = \frac{9}{25} + c^2$$

$$c^2 = 1 - \frac{9}{25} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{16}{25}} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad 2c = \frac{8}{5} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{2c = 1,6}}$$

Gabarito: LETRA E.

Pessoal, **apesar de raro**, algumas questões podem acabar perguntando a área da elipse. Para nos resguardar, vamos conhecê-la! Anote aí no seu resumo! Com sorte, a fórmula não é tão complicada.

$$A_{elipse} = \pi ab$$

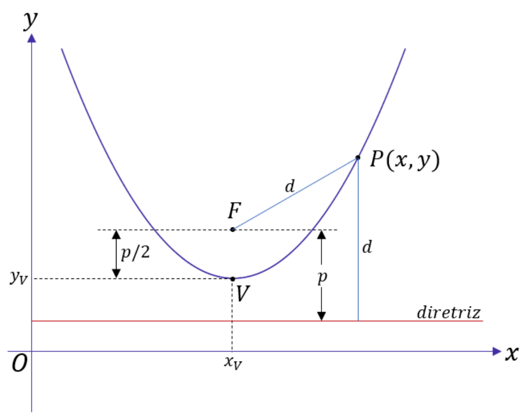
"a" é o semieixo maior, "b" é o semieixo menor e $\pi \approx 3{,}1415$ ....

Parábola

A parábola, assim como a reta, deve ser bastante familiar para você, **principalmente se estudou bem a função de segundo grau**. Portanto, uma primeira forma de apresentar a equação da parábola seria:

$$y = qx^2 + rx + t, \quad com\ q \neq 0$$

No entanto, essa não é a única maneira de se representar uma parábola e estudaremos aqui seus detalhes.



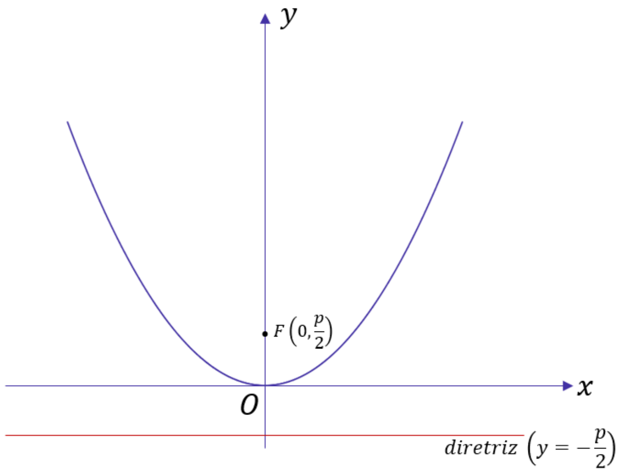
Formalmente, podemos definir a parábola como sendo **o lugar geométrico dos pontos que estão a uma igual distância do foco e de uma reta que chamamos de diretriz**. Note que, na parábola, temos apenas um **único foco enquanto na elipse temos dois**. Além disso, aparece mais uma reta na jogada: **a diretriz**.

Chamamos **a distância do foco até a diretriz de parâmetro (p)**. Ademais, **o ponto da parábola mais próximo da diretriz é denominado de vértice (V)**. Por fim, vale a pena dizer que **a distância do vértice ao foco é $p/2$**. Isso ocorre diretamente da definição.

Ok! Agora que comentamos um pouco sobre cada elemento, vamos ver algumas outras equações que também expressam uma parábola. Se o eixo de simetria da parábola (reta imaginária que contém o segmento $\overline{VF}$) é paralelo ao eixo Oy, como na figura acima, temos que:

$$(x - x_v)^2 = 2p(y - y_v)$$

Observe a seguinte parábola:



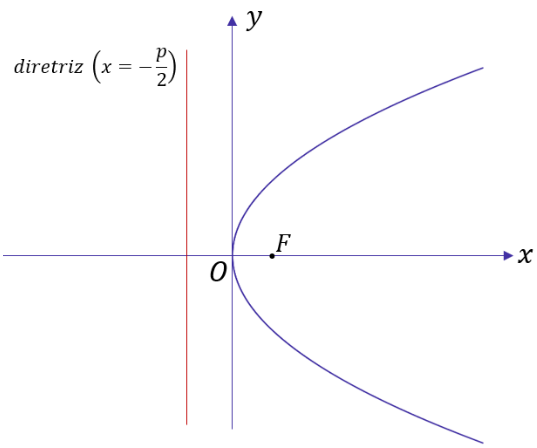
Note que o eixo de simetria dela é paralelo ao eixo Oy (na verdade, coincide com o Oy!!) e o vértice da parábola é a própria origem. Com isso, $x_v = 0$ e $y_v = 0$. A equação da parábola acima fica:

$$x^2 = 2py$$

Analogamente, caso o eixo de simetria da parábola seja paralelo ao eixo Ox (a parábola estaria deitada), a equação fica:

$$(y - y_v)^2 = 2p(x - x_v)$$

Veja um exemplo:



Nessa situação, o eixo de simetria está coincidindo com o próprio eixo das abscissas e o vértice é a própria origem do sistema, resultando em $x_v = 0$ e $y_v = 0$. Logo,

$$y^2 = 2px$$

Vamos ver como essa teoria é cobrada?

(INPE/2024) Relacione as formas geométricas a seguir, às suas equações.

1. Círculo
2. Elipse
3. Hipérbole
4. Parábola

( ) $y = ax^2 + bx + c$
( ) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
( ) $x^2 + y^2 = r^2$
( ) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Assinale a opção que indica a relação correta, segundo a ordem apresentada.

A) 4 – 3 – 1 – 2.
B) 4 – 2 – 1 – 3.
C) 4 – 3 – 2 – 1.
D) 3 – 2 – 1 – 4.
E) 3 – 1 – 2 – 4.

Comentários:

Pessoal, apesar de ainda não conhecermos a parábola, podemos marcar a alternativa correta conhecendo as outras três formas geométricas e suas respectivas equações! Vamos lá?

( ) $y = ax^2 + bx + c$
Essa é a **equação da parábola** que acabamos de ver! Com isso, relacionamos com o número 4.

( ) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
Essa aqui é novidade para gente! É a **equação da hipérbole**. Ela parece bastante com a equação da elipse, com a novidade de que temos um sinal de "-". Relacionamos com o número 3.

( ) $x^2 + y^2 = r^2$
Essa é a **equação da circunferência**! Vimos no tópico anterior. Relacionamos com o número 1.

( ) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
Por fim, essa é a **equação da elipse**! Relacionamos com o número 2.

Gabarito: LETRA A.

Galera, também conseguimos calcular as coordenadas do vértice de uma parábola! Para isso, considere a seguinte equação da parábola:

$$y = ax^2 + bx + c$$

As coordenadas do vértice são dadas por:

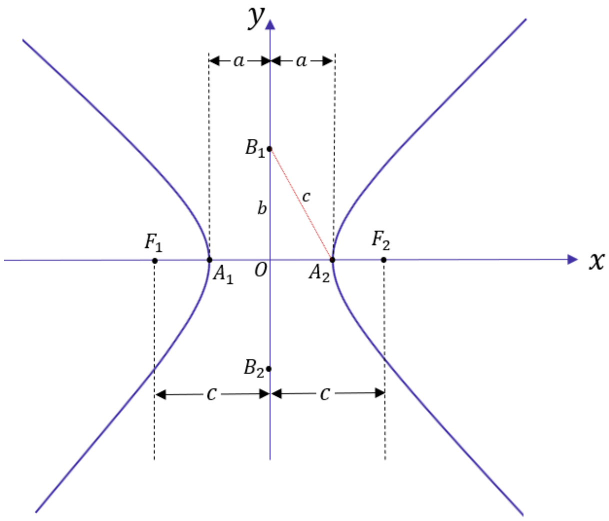
$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad e \quad y_v = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$$

Hipérbole

Chegamos a nossa última secção cônica! Mais uma vez, se você cochilou, nós **não estamos estudando português e a hipérbole que veremos aqui não é a figura de linguagem**. A hipérbole que veremos aqui é formada pelos **pontos que possuem a diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos igual a uma constante (igual a $2a$).**

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Perceba que a definição acima é muito similar com a da elipse, no entanto, ao invés da soma, temos uma diferença de distâncias. Assim como a elipse, **também teremos dois focos e suas equações em muito se parecerão.**



A hipérbole que desenhamos acima **é bastante particular**. Note que o**s eixos de simetria estão coincidindo com os eixos Ox e Oy**. Além disso, **o centro está coincidindo com a origem** do nosso sistema de coordenadas. Fizemos isso para facilitar a análise dos elementos.

A primeira coisa que devemos levar em consideração é que a distância de um foco até o centro da hipérbole é "c". Assim como na elipse, a distância focal (distância entre os focos) é dada por "2c". Aqui, não vamos ter eixo maior ou eixo menor, como acontece na elipse. Dessa vez, chamamos **a distância $\overline{A_1A_2}$ de eixo transverso ou real da elipse**, ele mede "2a". Já a distância **$\overline{B_1B_2}$ chamamos de eixo imaginário ou não transverso**. Vamos resumir abaixo:

- F_1 e F_2 são os focos da hipérbole;
- "c" é a semi-distância focal e "2c" é a distância focal;
- "a" é o semieixo real (transverso) e "2a" é o eixo real (transverso);
- "b" é o semieixo imaginário (não transverso) e "2b" é o eixo imaginário (não transverso);

Podemos encontrar o semieixo imaginário por meio da seguinte relação:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Uma coisa bastante importante que temos que perceber no caso da hipérbole, é que **a distância focal é maior do que a medida do eixo transverso, isto é, $2c > 2a$**. Dito isso, vamos ver a equação! Uma hipérbole centrada em $C(x_0, y_0)$ pode ser representada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

A diferença para a equação da elipse é apenas um sinal de menos que apareceu. Caso a hipérbole tenha seu eixo transverso paralelo ao eixo Oy, a equação vira:

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

HORA DE PRATICAR!

(ESFCEX/2019) Considere um plano α e nele dois pontos distintos, F1 e F2, e que 2c seja a distância entre F1 e F2. Nessas condições, é correto afirmar:

a) ao conjunto formado por todos os pontos do plano α cuja soma das distâncias a F1 e F2 é a constante 2a, em que 2a < 2c, dá-se o nome de hipérbole.

b) ao conjunto formado por todos os pontos do plano α cuja soma das distâncias a F1 e F2 é a constante 2a, em que 2a < 2c, dá-se o nome de elipse.

c) ao conjunto formado por todos os pontos do plano α cujo módulo da diferença das distâncias a F1 e F2 é a constante 2a, em que 0 < 2a < 2c, dá-se o nome de elipse.
d) ao conjunto formado por todos os pontos do plano α cujo módulo da diferença das distâncias a F1 e F2 é a constante 2a, em que 0 < 2a < 2c, dá-se o nome de hipérbole.
e) ao conjunto formado por todos os pontos do plano α cuja soma das distâncias a F1 e F2 é a constante 2a, em que 2a > 2c, dá-se o nome de parábola.

Comentários:
Questão que cobra a definição propriamente dita. Vamos analisar cada uma das alternativas.

a) ao conjunto formado por todos os pontos do plano α cuja soma das distâncias a F1 e F2 é a constante 2a, em que 2a < 2c, dá-se o nome de hipérbole.
ERRADO. Moçada, a alternativa pecou somente porque falou em "soma", na verdade, deveria ser "subtração". Não esqueça, que o valor dessa diferença é considerado em módulo.

b) ao conjunto formado por todos os pontos do plano α cuja soma das distâncias a F1 e F2 é a constante 2a, em que 2a < 2c, dá-se o nome de elipse.
ERRADO. A questão erra ao afirmar que na elipse temos 2a < 2c! Isso é só na hipérbole! Para a elipse, o eixo maior é maior do que a distância focal!

c) ao conjunto formado por todos os pontos do plano α cujo módulo da diferença das distâncias a F1 e F2 é a constante 2a, em que 0 < 2a < 2c, dá-se o nome de elipse.
ERRADO. Quem tem essa definição é a hipérbole, não a elipse.

d) ao conjunto formado por todos os pontos do plano α cujo módulo da diferença das distâncias a F1 e F2 é a constante 2a, em que 0 < 2a < 2c, dá-se o nome de hipérbole.
CERTO. É exatamente essa a definição de hipérbole.

e) ao conjunto formado por todos os pontos do plano α cuja soma das distâncias a F1 e F2 é a constante 2a, em que 2a > 2c, dá-se o nome de parábola.
ERRADO. Essa é a definição de elipse, não de parábola.

Gabarito: LETRA D.

Excentricidade

Para encerrar nossa aula, gostaria de comentar brevemente com vocês sobre um parâmetro no mundo das cônicas bastante especial! Ele se chama excentricidade e o representamos pela letra "e". Podemos calculá-lo por meio da seguinte equação:

$$e = \frac{c}{a}$$

Cada uma das cônicas **ou possui um valor específico para excentricidade** (como a circunferência e a parábola) **ou admite um intervalo** (como a elipse e a hipérbole). A tabela abaixo mostra esses valores:

Circunferência	$e = 0$
Elipse	$0 < e < 1$
Parábola	$e = 1$
Hipérbole	$e > 1$

Um último recado para finalizar, pessoal! É sempre importante destacar que, conforme comentamos e mostramos na teoria, as equações podem sofrer variações. A depender do centro e do eixo de simetria de cada uma das formas geométricas estudadas, a equação sofre mudanças. Além disso, as mesmas equações podem ser apresentadas com os quadrados desenvolvidos. Nessas situações, é recomendado completar quadrados para deixá-la no formato que estamos habituados. Vamos ver um exemplo!

(MARINHA/2023) Considere as equações $x^2 - 9y^2 - 6x - 18y - 9 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ e $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Analise e assinale a opção que apresenta, respectivamente, as representações geométricas das equações.

A) Hipérbole, elipse, parábola.

B) Hipérbole, circunferência, reta.

C) Hipérbole, circunferência, parábola.

D) Elipse, circunferência, parábola.

E) Elipse, circunferência, reta.

Comentários:

As equações do enunciado foram dadas em sua forma desenvolvida. Com isso, vamos **completar quadrados**!

$$x^2 - 9y^2 - 6x - 18y - 9 = 0$$

$$(x^2 - 6x) - 9(y^2 + 2y) = 9$$

$$(x^2 - 6x + 9) - 9(y^2 + 2y + 1) = 9 + 9 - 9$$

$$(x-3)^2 - 9(y+1)^2 = 9$$

$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{1} = 1}$$

Essa é a **equação de uma hipérbole**.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 1$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 1 + 1 + 4$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 6}$$

Essa é uma **equação de uma circunferência**.

$$x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$$

$$4y = x^2 - 4x + 8$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4} - 4x + 8}$$

Nessa última, foi necessário apenas reorganizar a equação! É uma **equação de parábola**.

Gabarito: LETRA C.

QUESTÕES COMENTADAS

Ponto

FGV

1. (FGV/CBM-RJ/2024) No plano cartesiano, o triângulo cujos vértices são (0, 0), (a, b) e (c, d) tem área dada pelo valor absoluto da expressão:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

A área do triângulo cujos vértices são (0, 0), (5, −1) e (8, 6) é

A) 11.
B) 13.
C) 15.
D) 17.
E) 19.

Comentários:

Pessoal, aqui temos uma versão simplificada da fórmula da área de um triângulo. Essa simplificação pode ser feita **quando um dos vértices for a origem (0,0)**. Sendo assim, basta substituirmos as outras coordenadas na expressão destacada no enunciado.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\big(5 \cdot 6 - 8 \cdot (-1)\big)$$

$$A = \frac{1}{2}(30 + 8)$$

$$A = \frac{38}{2}$$

$$\boxed{A = 19}$$

Gabarito: LETRA E.

2. (FGV/ALEP-PR/2024) Três dos vértices de um retângulo estão nos pontos (4,3), (4,5) e (6,3) do plano cartesiano. Assinale a opção que indica as coordenadas do quarto vértice do retângulo.

A) (3,5)

B) (3,4)

C) (4,6)

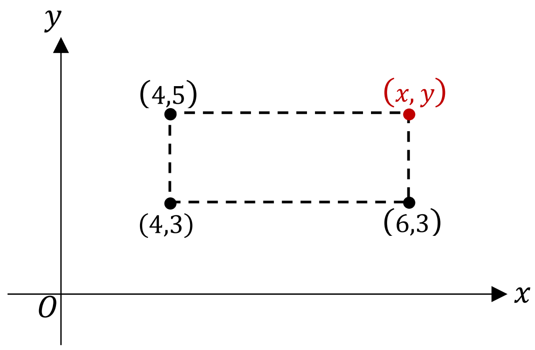
D) (6,5)

E) (4,4)

Comentários:

Para resolver este problema, vamos traçar um esboço.

Como **os vértices dados são (4,3), (4,5) e (6,3)**, temos algo assim:



Observe que a abscissa "x" é igual a abscissa do ponto (6,3). Logo, $x = 6$.

Por sua vez, a ordenada "y" é igual a ordenada do ponto (4,5). Logo, $y = 5$.

Com isso, **o ponto procurado é (6,5)**.

Gabarito: LETRA D.

3. (FGV/ALEP-PR/2024) Um triângulo isósceles tem os vértices da base nos pontos de coordenadas (3,0) e (7,0) no plano cartesiano. Sabendo-se que a medida da área do triângulo é de 20, determine as coordenadas de seu terceiro vértice.

A) (5,10)

B) (5,5)

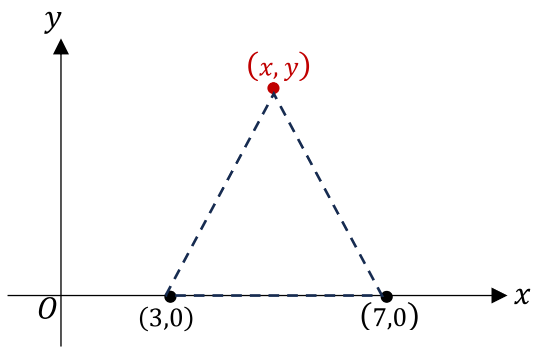
C) (7,3)

D) (3,7)

E) (10,5)

Comentários:

Inicialmente, vamos esboçar a situação.



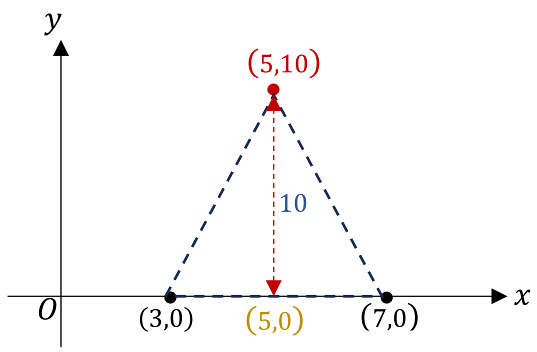
Agora, podemos usar **a fórmula da área do triângulo isósceles** para determinar a sua altura:

$$A = \frac{bh}{2}$$

Sabemos que a base tem medida igual a 7 - 3 = **4**, pois é a distância entre os pontos (3,0) e (7,0). Também sabemos que **a área é igual a 20**. Substituindo esses valores na fórmula, temos:

$$20 = \frac{4h}{2} \quad \rightarrow \quad 20 = 2h \quad \rightarrow \quad h = 10$$

Isso significa que a altura do triângulo é 10 unidades. Como o triângulo é isósceles, sabemos que **o terceiro vértice está sobre a mediana relativa à base**, que é o segmento que une **o ponto médio da base com o vértice oposto**. O ponto médio da base tem coordenadas **(5,0),** pois é a média aritmética das coordenadas dos vértices da base. Vamos esboçar.



Portanto, o terceiro vértice tem coordenada **x igual a 5** e coordenada **y igual a 10**, pois está a uma distância de 10 unidades acima do ponto médio da base. Assim, as coordenadas do terceiro vértice são **(5,10).**

Gabarito: LETRA A.

4. (FGV/CM-SP/2024) Considere uma sequência de pontos do plano cartesiano tal que para cada ponto (x,y) da sequência, o próximo ponto é obtido de acordo com a seguinte regra:

Se x é ímpar, então o próximo ponto será (x + 3, y − 1);
Se x é par, então o próximo ponto será (x/2, 2y).

Começando com o ponto (2024,0), a soma das coordenadas do 10º ponto da sequência é
A) 24.
B) 12.
C) 0.
D) −12.
E) −24.

Comentários:
Pessoal, o jeito mais direto é ir um por um.

O ponto de partida (primeiro ponto) é o **(2024, 0).** Sendo assim, o próximo ponto é:

$$\left(\frac{x}{2}, 2y\right) \quad = \quad \left(\frac{2024}{2}, 2 \cdot 0\right) \quad = \quad (1012, 0) \qquad\qquad \text{(segundo ponto)}$$

Observe que "x" continua **par**, sendo assim, o próximo ponto é:

$$\left(\frac{x}{2}, 2y\right) \quad = \quad \left(\frac{1012}{2}, 2 \cdot 0\right) \quad = \quad (506, 0) \qquad\qquad \text{(terceiro ponto)}$$

"x" continua **par**, sendo assim, o próximo ponto é:

$$\left(\frac{x}{2}, 2y\right) \quad = \quad \left(\frac{506}{2}, 2 \cdot 0\right) \quad = \quad (253, 0) \qquad\qquad \text{(quarto ponto)}$$

Opa! Agora "x" é **ímpar**. Sendo assim, o próximo ponto é:

$$(x + 3, y - 1) \quad = \quad (253 + 3, 0 - 1) \quad = \quad (256, -1) \qquad\qquad \text{(quinto ponto)}$$

"x" voltou a ser **par**, sendo assim, o próximo ponto é:

$$\left(\frac{x}{2}, 2y\right) \quad = \quad \left(\frac{256}{2}, 2 \cdot (-1)\right) \quad = \quad (128, -2) \qquad\qquad \text{(sexto ponto)}$$

"x" continua **par**, sendo assim, o próximo ponto é:

$$\left(\frac{x}{2}, 2y\right) \quad = \quad \left(\frac{128}{2}, 2 \cdot (-2)\right) \quad = \quad (64, -4) \qquad\qquad \text{(sétimo ponto)}$$

"x" continua **par**, sendo assim, o próximo ponto é:

$$\left(\frac{x}{2}, 2y\right) = \left(\frac{64}{2}, 2 \cdot (-4)\right) = (32, -8) \qquad \text{(oitavo ponto)}$$

"x" continua **par**, sendo assim, o próximo ponto é:

$$\left(\frac{x}{2}, 2y\right) = \left(\frac{32}{2}, 2 \cdot (-8)\right) = (16, -16) \qquad \text{(nono ponto)}$$

"x" continua **par**, sendo assim, o próximo ponto é:

$$\left(\frac{x}{2}, 2y\right) = \left(\frac{16}{2}, 2 \cdot (-16)\right) = (8, -32) \qquad \text{(décimo ponto)}$$

A questão pede **a soma das coordenadas do 10º ponto**, ou seja:

$$8 - 32 = \mathbf{-24}$$

Gabarito: LETRA E.

5. (FGV/TCE-BA/2023) Considere o ponto P(4, 1) do plano cartesiano. Dos pontos abaixo, o mais distante do ponto P é:

A) (5, 2);
B) (2, 2);
C) (6, –1);
D) (1, 0);
E) (7, 1).

Comentários:

Vamos usar a fórmula da distância entre pontos para cada uma das alternativas e o ponto P.

$$d(P, X) = \sqrt{(x_P - x_x)^2 + (y_P - y_x)^2}$$

$$d(P, X) = \sqrt{(4 - x_x)^2 + (1 - y_x)^2}$$

A) (5, 2);

$$d(P, A) = \sqrt{(4 - x_A)^2 + (1 - y_A)^2}$$

$$d(P, A) = \sqrt{(4 - 5)^2 + (1 - 2)^2}$$

$$d(P, A) = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$$

$$\boldsymbol{d(P, A) = \sqrt{2}}$$

B) (2, 2);

$$d(P, B) = \sqrt{(4 - x_B)^2 + (1 - y_B)^2}$$

$$d(P, B) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - 2)^2}$$

$$d(P, B) = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$$

$$\boldsymbol{d(P, B) = \sqrt{5}}$$

C) (6, −1);

$$d(P, C) = \sqrt{(4 - x_C)^2 + (1 - y_C)^2}$$

$$d(P, C) = \sqrt{(4 - 6)^2 + (1 - (-1))^2}$$

$$d(P, C) = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$$

$$\boldsymbol{d(P, C) = \sqrt{8}}$$

D) (1, 0);

$$d(P, D) = \sqrt{(4 - x_D)^2 + (1 - y_D)^2}$$

$$d(P, D) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 0)^2}$$

$$d(P, D) = \sqrt{(3)^2 + (1)^2}$$

$$\boldsymbol{d(P, D) = \sqrt{10}}$$

E) (7, 1).

$$d(P, E) = \sqrt{(4 - x_E)^2 + (1 - y_E)^2}$$

$$d(P,E) = \sqrt{(4-7)^2 + (1-1)^2}$$

$$d(P,E) = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2}$$

$$\boldsymbol{d(P,E) = \sqrt{9}}$$

Observe que **a maior distância é entre o ponto P e o D**.

Sendo assim, marcamos a alternativa D.

Gabarito: LETRA D.

CEBRASPE

6. (CEBRASPE/PETROBRAS/2024) A 200 km da costa do estado do Rio de Janeiro está localizada a plataforma P-71, que atingiu em novembro de 2021 o topo de extração de óleo do pré-sal: 150 mil barris por dia. A plataforma pode estocar até 1,6 milhão de barris de óleo. A comunicação entre a plataforma e os navios próximos é feita via rádio, cujo transmissor tem alcance máximo de 63 km. A potência do sinal de rádio, P, decai com a distância d, em quilômetros, de acordo com a função $\boldsymbol{P(d) = P_o 2^{-d/9}}$, sendo $\boldsymbol{P_o}$ a potência de transmissão.

Além disso, um robô submarino que auxilia a plataforma experimenta, quando está dentro da água, uma pressão $\boldsymbol{p}$, em atmosferas, dada pela equação $\boldsymbol{p(h) = kh + 1}$, na qual k é uma constante e h é a profundidade do robô, em metros. Com base nas informações precedentes, julgue o item a seguir.

Considerando um plano cartesiano em que as coordenadas estejam em quilômetros, se a plataforma estiver na posição (0, 0), então um navio que estiver localizado em (50, 35) não será capaz de receber uma mensagem transmitida da plataforma.

Comentários:
Nessa questão, precisamos **calcular a distância entre os pontos (0,0) e (50, 35)**.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(50-0)^2 + (35-0)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{50^2 + 35^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{2500 + 1225}$$

$$d(A,B) = \sqrt{3725}$$

$$\boxed{d(A,B) \cong 61 \text{ km}}$$

Como o transmissor tem alcance máximo de 63 km, **o navio ainda será capaz de receber a mensagem**.

Gabarito: ERRADO.

7. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item seguinte, referente a geometria analítica, geometria plana e geometria espacial.

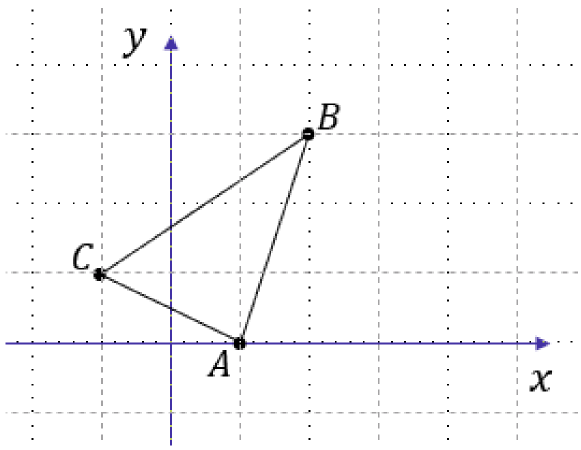
Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o triângulo de vértices nos pontos de coordenadas $A = (1, 0)$, $B = (2, 3)$ e $C = (-1, 1)$ é um triângulo retângulo.

Comentários:

Uma das maneiras para checar se um triângulo é um triângulo retângulo, é verificar **se seus lados satisfazem o Teorema de Pitágoras**.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Colocando os pontos do enunciado em um plano cartesiano, teríamos algo semelhante a:



Com o intuito de verificar se o teorema de Pitágoras é observado, devemos calcular o comprimento de cada um dos lados desse triângulo, por meio da fórmula da distância entre dois pontos.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 - 3)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{1^2 + 3^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{1 + 9}$$

$$d(A, B) = \sqrt{10}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(1 - (-1)\ )^2 + (0 - 1)^2}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(1 + 1)^2 + (-1)^2}$$

$$d(A,C) = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$d(A,C) = \sqrt{4 + 1}$$

$$d(A,C) = \sqrt{5}$$

$$d(C,B) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$d(C,B) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - 3)^2}$$

$$d(C,B) = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2}$$

$$d(C,B) = \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$d(C,B) = \sqrt{9 + 4}$$

$$d(C,B) = \sqrt{13}$$

Note que $d(C,B)$ é nosso maior lado e deveria, portanto, funcionar como a hipotenusa. Mas, veja:

$$d^2(C,B) = 13 \ \neq 15 = d^2(A,B) + d^2(A,C)$$

Logo, **o triângulo ABC não é retângulo**.

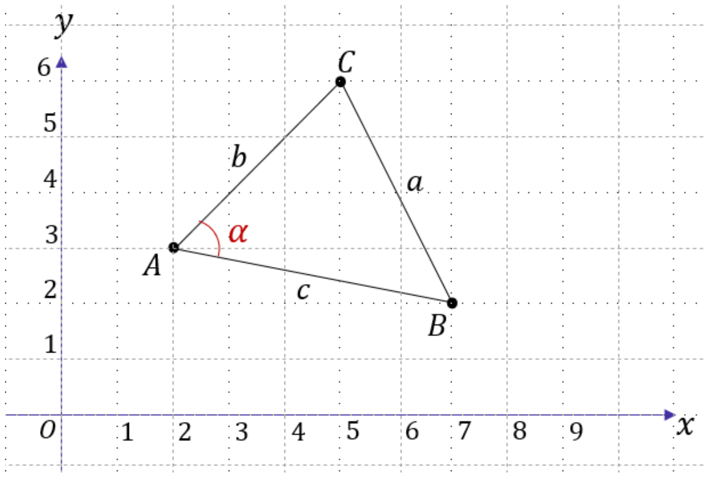
Gabarito: ERRADO.

8. (CESPE/ABIN/2018) O relatório de inteligência elaborado por um agente registra que o suspeito investigado, quando frequenta determinado restaurante, sempre ocupa uma de três mesas, localizadas, segundo um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais imaginário, nos pontos $A = (2,3)$, $B = (7,2)$ e $C = (5,6)$. Para aumentar as chances de capturar as conversas do investigado, independentemente da mesa por ele escolhida entre essas três, será colocado um ponto eletrônico de escuta em um ponto $P = (x,y)$, de modo que a soma dos quadrados das distâncias de P às mesas A, B e C seja mínima. A partir dessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Considerando-se 7,2 como valor aproximado para $\sqrt{52}$, é correto afirmar que, no triângulo ABC, o ângulo correspondente ao vértice A é menor que 60°.

Comentários:

Se colocarmos os pontos do enunciado no plano cartesiano, obtemos a seguinte configuração:



Queremos **determinar se α é maior ou menor do que 60°,** para conseguir julgar o item. Nesse intuito, usaremos a fórmula da distância entre dois pontos, pois **precisamos descobrir o comprimento de cada um dos lados do triângulo**. Em seguida, pegaremos emprestado a lei dos cossenos da geometria plana. Acompanhe:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{(2-7)^2 + (3-2)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{5^2 + 1^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{25+1}$$
$$c = d(A,B) = \sqrt{26}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$
$$d(A,C) = \sqrt{(2-5\,)^2 + (3-6)^2}$$
$$d(A,C) = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$$
$$d(A,C) = \sqrt{3^2 + 3^2}$$
$$d(A,C) = \sqrt{9+9}$$
$$b = d(A,C) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$d(C,B) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$
$$d(C,B) = \sqrt{(5-7)^2 + (6-2)^2}$$
$$d(C,B) = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2}$$

$$d(C,B) = \sqrt{2^2 + 4^2}$$
$$d(C,B) = \sqrt{4 + 16}$$
$$a = d(C,B) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Da lei dos cossenos, podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Substituindo o que encontramos:

$$20 = 18 + 26 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos\alpha$$
$$20 = 44 - 6\sqrt{52} \cdot \cos\alpha$$
$$-24 = -6 \cdot 7{,}2 \cdot \cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{7{,}2}$$
$$\cos\alpha = 0{,}5555\ldots$$

Como $\cos\alpha > \cos 60°$, então $\alpha < 60°$.

Gabarito: CERTO.

CESGRANRIO

9. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Os vértices de um triângulo ABC são os pontos $A(0,2)$, $B(4,6)$ e $C(8,-10)$. As coordenadas (x, y) do ponto médio do maior lado do triângulo ABC são

A) (−4, 8)
B) (−4, 6)
C) (6, −2)
D) (4, −4)
E) (2, 4)

Comentários:

O primeiro passo nessa questão é descobrir **qual o maior lado desse triângulo**. Para isso, vamos calcular quais as distâncias entre os seus vértices.

- Distância entre $A(0{,}2)$ e $B(4{,}6)$

$$d(A,B) = \sqrt{(0-4)^2 + (2-6)^2} \quad \rightarrow \quad d(A,B) = \sqrt{4^2 + 4^2} \quad \rightarrow \quad d(A,B) = \sqrt{32}$$

- Distância entre $A(0{,}2)$ e $C(8,-10)$

$$d(A,C)=\sqrt{(0-8)^2+(2-(-10))^2} \quad\rightarrow\quad d(A,C)=\sqrt{8^2+12^2} \quad\rightarrow\quad d(A,C)=\sqrt{208}$$

- Distância entre $B(4{,}6)$ e $C(8,-10)$

$$d(B,C)=\sqrt{(4-8)^2+(6-(-10)\,)^2} \quad\rightarrow\quad d(B,C)=\sqrt{4^2+16^2} \quad\rightarrow\quad d(B,C)=\sqrt{272}$$

Note que **o maior lado desse triângulo é o lado BC**. Agora, podemos achar o ponto médio. Da nossa aula, lembre-se que as coordenadas do ponto médio de um segmento são dadas por:

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad e \qquad y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$$

Com isso, vamos substituir as coordenados dos pontos B e C:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2} \quad\rightarrow\quad x_M=\frac{4+8}{2} \quad\rightarrow\quad x_M=\frac{12}{2} \quad\rightarrow\quad x_M=6$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{2} \quad\rightarrow\quad y_M=\frac{6-10}{2} \quad\rightarrow\quad y_M=\frac{-4}{2} \quad\rightarrow\quad y_M=-2$$

Logo, **o ponto médio procurado é $(6,-2)$**.

Gabarito: LETRA C.

Outras Bancas

10. (OMNI/PREF. SERTÃOZINHO/2021) Sendo o ponto $Q(q,1)$ equidistante dos pontos $P(1,2)$ e $R(3,1)$, o valor de q é:

A) $4/7$
B) $7/4$
C) $17/4$
D) $4/17$

Comentários:

Quando o enunciado fala que **o ponto Q é equidistante dos pontos P e R**, ele está nos dizendo que a distância entre Q e P é igual a distância entre Q e R. Matematicamente, podemos escrever:

$$d(Q,P)=d(Q,R) \qquad (1)$$

Lembre-se que **a distância entre dois pontos** (x_a,y_a) e (x_b,y_b) é dada por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Sendo assim, usando as coordenadas dos pontos do enunciado em (1):

$$\sqrt{(q-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(q-3)^2 + (1-1)^2}$$

Elevando ao quadrado para tirarmos essa raiz:

$$(q-1)^2 + (-1)^2 = (q-3)^2 + 0^2$$

Agora, vamos **desenvolver a expressão** para encontrarmos o "q".

$$(q-1)^2 + 1 = (q-3)^2$$

$$q^2 - 2q + 1 + 1 = q^2 - 6q + 9$$

$$4q = 7 \quad \rightarrow \quad \boxed{q = \frac{7}{4}}$$

Gabarito: LETRA B.

11. (COTEC/PREF SJP/2021) Considere $A(-m, 2m)$ e $B(3m, -2m)$ dois pontos do plano cartesiano, em que m é um número real negativo. Assinale a alternativa cuja expressão representa a distância d do ponto A ao ponto B em função de m.

A) $d = 4\sqrt{2}m$

B) $d = -4\sqrt{2}m$

C) $d = -2\sqrt{5}m$

D) $d = 2\sqrt{5}m$

E) $d = 2\sqrt{10}m$

Comentários:

Lembre-se que **a distância entre dois pontos** (x_a, y_a) e (x_b, y_b) é dada por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Vamos **usar as coordenadas** dos pontos fornecidos no enunciado.

$$d = \sqrt{(-m-3m)^2 + \big(2m - (-2m)\big)^2}$$

$$d = \sqrt{(-4m)^2 + (4m)^2}$$

$$d = \sqrt{16m^2 + 16m^2} \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{32m^2} \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{16 \cdot 2} \cdot \sqrt{m^2} \quad \rightarrow \quad d = 4\sqrt{2}|m|$$

Pessoal, o detalhe está aqui. Era preciso lembrarmos algumas coisas sobre módulo.

A primeira coisa é que:

$$\sqrt{m^2} = |m|$$

Além disso, da definição, temos que:

$$|m| = \begin{cases} m, se\ m \geq 0 \\ \mathbf{-m, se\ m < 0} \end{cases}$$

Note que **"m" é um valor negativo** (de acordo com o enunciado), logo caímos na hipótese destacada em vermelho acima. Com isso:

$$\boxed{d = -4\sqrt{2}m}$$

Gabarito: LETRA B.

12. (QUADRIX/SEDF/2021) Dados os pontos $A(4,11)$, $B(4,4)$ e $C(28,4)$, julgue o item.

Os lados do triângulo ABC são números inteiros.

Comentários:
Para verificar isso, devemos calcular três distâncias (que correspondem aos lados).

1) Cálculo da distância entre os pontos **A(4,11) e B(4,4).**

$$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(4-4)^2 + (11-4)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{0^2 + 7^2} \quad \rightarrow \quad d(A,B) = \sqrt{49} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{d(A,B) = 7}}$$

2) Cálculo da distância entre os pontos **A(4,11) e C(28,4)**.

$$d(A,C) = \sqrt{(x_a - x_C)^2 + (y_a - y_C)^2}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(4-28)^2 + (11-4)^2}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(-24)^2 + 7^2} \quad \rightarrow \quad d(A,C) = \sqrt{625} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{d(A,C) = 25}}$$

3) Cálculo da distância entre os pontos **B(4,4) e C(28,4)**.

$$d(B,C) = \sqrt{(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(4-28)^2 + (4-4)^2}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(-24)^2 + 0^2} \quad \rightarrow \quad d(B,C) = \sqrt{576} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{d(B,C) = 24}}$$

Portanto, confirmamos que todos os lados desse triângulo **são números inteiros**.

Gabarito: CERTO.

13. (CONSULPLAN/PREF. JF/2022) Considere que Jonas está verificando sua posição geométrica em um plano cartesiano no mapa de seu celular que apresenta inicialmente a posição (300 m, 200 m). Jonas insere como destino a escola em que estuda, localizada na posição (–100 m, 250 m) nesse mesmo plano cartesiano. Com base nessas informações, qual o valor mais próximo do deslocamento necessário, para que Jonas chegue até a escola em que estuda, considerando o seu movimento em linha reta?

A) 200 metros.

B) 250 metros.

C) 300 metros.

D) 400 metros.

E) 450 metros.

Comentários:

Temos que calcular a distância entre os dois pontos.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(300-(-100))^2 + (200-250)^2}$$

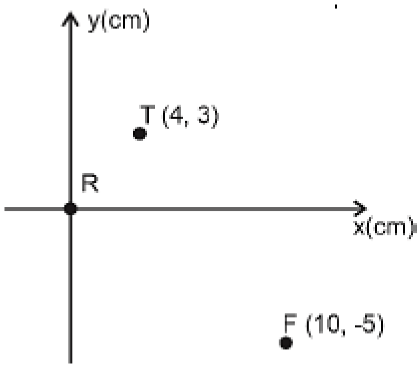
$$d(A,B) = \sqrt{400^2 + 50^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{162500}$$

$$\boxed{d(A,B) \cong 403{,}11}$$

Gabarito: LETRA D.

14. (INST. CONSULPLAN/CM AMPARO/2020) Um estudante de matemática criou um mapa personalizado com a localização de lugares considerados importantes, utilizando um plano cartesiano para dar as coordenadas dos pontos desses lugares. Na origem, ele colocou sua casa e, conforme figura, representou alguns pontos de seu interesse e utilizou uma escala em que 1 cm no mapa representa 1 km na vida real. Observe.



Considerando que todos os deslocamentos feitos pelo estudante são em linha reta, qual será a distância, em quilômetros, percorrida por esse estudante, caso saia de casa (ponto R), caminhe até o trabalho (ponto T) e, do trabalho, vá direto para a faculdade (ponto F)?

A) 10 km

B) 12 km

C) 15 km

D) 18 km

Comentários:

Nessa questão, vamos calcular a distância entre dois pontos duas vezes.

De R até T:

$$d(R,T) = \sqrt{(x_R - x_T)^2 + (y_R - y_T)^2}$$

$$d(R,T) = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2}$$

$$d(R,T) = \sqrt{16+9}$$

$$d(R,T) = \sqrt{25}$$

$$d(R,T) = 5$$

De T até F:

$$d(T,F) = \sqrt{(x_T - x_F)^2 + (y_T - y_F)^2}$$

$$d(T,F) = \sqrt{(10-4)^2 + (-5-3)^2}$$

$$d(T,F) = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$d(T,F) = \sqrt{100}$$

$$d(T,F) = 10$$

Sendo assim, **a distância <u>total</u>** será:

$$D = d(R,T) + d(T,F) \quad \rightarrow \quad D = 5 + 10$$

$$\boxed{\boldsymbol{D = 15}}$$

Gabarito: LETRA C.

15. (DIRENS/EEAR/2020) A área do triângulo de vértices $A(1;2)$, $B(-1;-2)$ e $C(-2;-1)$ é:

A) 3

B) 6

C) 20

D) 2/3

Comentários:

Questão para treinarmos **a fórmula da área de um triângulo** quando temos os três vértices.

$$A = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|$$

Usando os pontos $A(1;2)$, $B(-1;-2)$ e $C(-2;-1)$:

$$A = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$A = \frac{1}{2}|-2 - 4 + 1 - 4 + 1 + 2|$$

$$A = \frac{1}{2}|-6|$$

$$\boxed{\boldsymbol{A = 3}}$$

Gabarito: LETRA A.

16. (FUNDATEC/PREF. P DAS MISSÕES/2019) A distância entre o ponto $A = (3;4)$ e a origem do sistema de eixos cartesianos é:

A) 3.
B) 4.
C) 5.
D) 6.
E) 7.

Comentários:

Na prática, queremos a distância entre o ponto $A = (3,4)$ e a origem de sistema $O = (0,0)$.

$$d(A,O) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

$$d(A,O) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$

$$d(A,O) = \sqrt{3^2 + (4)^2}$$

$$d(A,O) = \sqrt{9+16}$$

$$d(A,O) = \sqrt{25}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(A,O) = 5}}$$

Gabarito: LETRA C.

17. (IBFC/CBM-SE/2018) A distância entre os pontos $A(-3,4)$ e $B(2,-1)$ é igual a:

A) $2\sqrt{5}$
B) $3\sqrt{2}$
C) $5\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{2}$

Comentários:

Mais uma questão para treinarmos as fórmulas.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-(-1))^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{25+25}$$

$$d(A,B) = \sqrt{50}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(A,B) = 5\sqrt{2}}}$$

Gabarito: LETRA D.

18. (IBFC/PCIENT. PR/2017) Dados os pontos distintos $Q(5,2)$ e $R(1,3)$ do plano cartesiano, assinale a alternativa que apresenta a distância entre eles.

A) 17

B) $\sqrt{18}$

C) 16

D) $\sqrt{17}$

E) $\sqrt{15}$

Comentários:

Nessa questão, vamos calcular a distância entre dois pontos.

$$d(Q,R) = \sqrt{\left(x_Q - x_R\right)^2 + \left(y_Q - y_R\right)^2}$$

$$d(Q,R) = \sqrt{(5-1)^2 + (2-3)^2}$$

$$d(Q,R) = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}$$

$$d(Q,R) = \sqrt{16+1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(Q,R) = \sqrt{17}}}$$

Gabarito: LETRA D.

Vunesp

19. (VUNESP/PM-SP/2018) Sobre um mapa de uma região, foi aplicado um sistema de coordenadas cartesianas, em que cada segmento de medida unitária, nesse sistema, correspondia a 1,5 quilômetros reais e, nesse sistema, duas praças foram identificadas com as coordenadas (1, –3) e (4, 1). A distância real, em linha reta, em quilômetros, entre essas praças é de

A) 5,0.
B) 5,5.
C) 6,0.
D) 7,5.
E) 8,0.

Comentários:

Primeiramente, devemos **calcular a distância entre os dois pontos**: $(1,-3)$ e $(4,1)$.

$$d=\sqrt{(1-4)^2+(-3-1)^2} \quad \rightarrow \quad d=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$$

$$d=\sqrt{25} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{d=5}$$

Como cada unidade nesse sistema **corresponde a 1,5 km reais**, então:

$$\mathrm{d_{real}}=5\cdot 1{,}5 \quad \rightarrow \quad \mathrm{d_{real}}=7{,}5\ \mathrm{km}$$

Gabarito: LETRA D.

20. (VUNESP/PM-SP/2017) Considere a elaboração, pelo Centro de Inteligência da Polícia Militar (CIPM), de um planejamento estratégico para a deflagração de uma operação policial ostensiva em uma região R, com alta incidência do tráfico de drogas. A questão abaixo tem como referência essa proposição. O mapa da região R foi representado em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, no qual foram assinalados os pontos $\boldsymbol{M\,(-3,-2)}$, $\boldsymbol{N\,(7,8)}$ e $\boldsymbol{P\,(x,3)}$, que são colineares e correspondem a alvos estratégicos. A distância entre os pontos N e P, na referida representação, é, em unidades de comprimento, igual a

A) $5\sqrt{2}$
B) $3\sqrt{5}$
C) $1\sqrt{10}$
D) $2\sqrt{5}$
E) $\sqrt{10}$

Comentários:

Para determinar a distância entre os pontos N e P, **primeiro precisamos encontrar "x"**. Nesse intuito, vamos usar o fato de que **os três pontos dados são colineares**.

$$\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Substituindo as coordenadas dos pontos:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \\ \mathrm{x} & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad -24 - 2\mathrm{x} - 21 - 8\mathrm{x} + 9 + 14 = 0$$

Reorganizando,

$$-2x - 3 + 23 - 8x = 0 \quad \rightarrow \quad -10x + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Com o "x" encontrado, o ponto P fica definido: $\boldsymbol{P = (2, 3)}$. A distância entre N (7,8) e P (2,3) fica:

$$d(P, N) = \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} \quad \rightarrow$$

$$d(P, N) = \sqrt{(7 - 2)^2 + (8 - 3)^2}$$

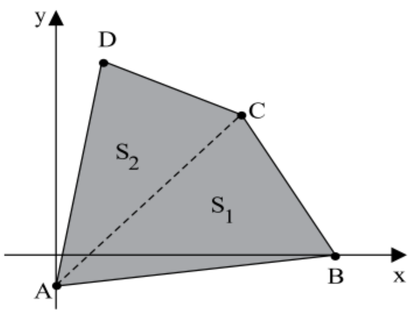
$$d(P, N) = \sqrt{5^2 + 5^2} \quad \rightarrow$$

$$d(P, N) = \sqrt{2 \cdot 25} \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{d(P, N) = 5\sqrt{2}}$$

Gabarito: LETRA A.

21. (VUNESP/PC-SP/2014) O quadrilátero ABCD, representado num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, foi dividido em duas regiões triangulares, S1 e S2, pelo segmento AC, conforme mostra a figura.



Dados $A(0, -1)$ e $C(4, 5)$, pode-se afirmar que a distância, em u.c., entre os pontos A e C, é igual a

A) $2\sqrt{13}$
B) $2\sqrt{15}$
C) $4\sqrt{13}$
D) $2\sqrt{2}$
E) $3\sqrt{10}$

Comentários:
Para calcularmos **a distância entre A e C**, aplicamos a seguinte fórmula que discutimos na teoria:

$$d(A,C) = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

Substituindo as coordenadas,

$$d(A,C) = \sqrt{(0-4)^2 + (-1-5)^2}$$

$$d(A,C) = \sqrt{4^2 + 6^2} \quad \rightarrow \quad d(A,C) = \sqrt{52} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{d(A,C) = 2\sqrt{13}}$$

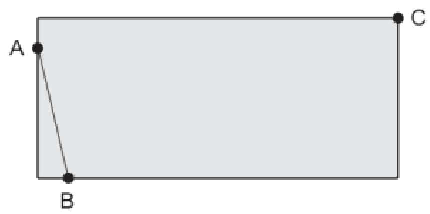
Gabarito: LETRA A.

QUESTÕES COMENTADAS

Reta

FGV

1. (FGV/FEMPAR/2022) A figura a seguir ilustra uma parede retangular de 6,0 m de largura e 3,0 m de altura.

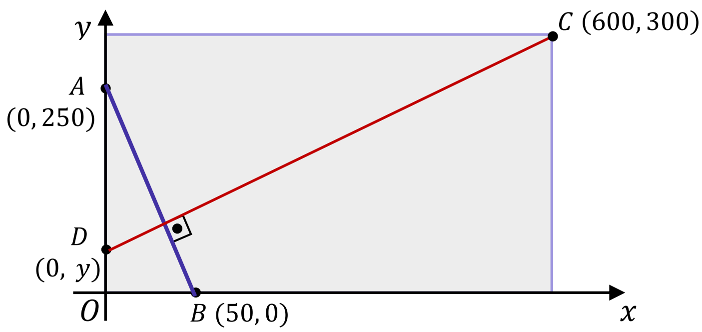


Um cabo de energia elétrica retilíneo liga duas tomadas localizadas nos pontos A e B, estando A sobre a borda esquerda da parede, a 50 cm da borda superior. O ponto B está na base da parede, a 50 cm da sua borda esquerda. Deseja-se passar um outro cabo retilíneo que ligue o ponto C, na quina da parede, a um ponto D na mesma borda que contém o ponto A. Sendo esse um cabo de internet, é fundamental que passe pelo cabo AB perpendicularmente. Uma das formas de se determinar a posição do ponto D é imaginar eixos cartesianos $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$ colocados, respectivamente, sobre as bordas inferior e esquerda e tratar os cabos como segmentos de retas perpendiculares. A distância do ponto D à base inferior da parede é igual a

a) 1,70 m.
b) 1,75 m.
c) 1,80 m.
d) 1,85 m.
e) 2,00 m.

Comentários:

Note que a própria questão nos orienta a imaginar os eixos cartesianos e nos diz onde colocá-los!



Observe que todas as medidas estão em centímetros (cm). Antes de começar os cálculos, já quero adiantar para vocês **o passo a passo** que seguiremos até encontrar a resposta:

1) Determinar o coeficiente angular de $\overrightarrow{AB}$;
2) Com o coeficiente angular de $\overrightarrow{AB}$, determinar o coeficiente angular de $\overrightarrow{CD}$;
3) Com o coeficiente angular de $\overrightarrow{CD}$ e o ponto C, determinar a equação da reta de $\overrightarrow{CD}$;
4) Com a equação da reta de $\overrightarrow{CD}$, encontramos D ao impor que $x = 0$.

Com isso, fica mais fácil você entender onde queremos chegar quando realizarmos alguns cálculos.

Vamos começar!

Para determinar **o coeficiente angular da reta** que passa pelos pontos A e B, fazemos:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Substituindo os valores das coordenadas:

$$m_{AB} = \frac{0 - 250}{50 - 0} \quad \rightarrow \quad m_{AB} = -\frac{250}{50} \quad \rightarrow \quad m_{AB} = -5$$

Agora, note que a reta que liga os pontos C e D (destacada em vermelho) **deve ser perpendicular** a reta que liga A e B. Com isso, podemos escrever:

$$m_{AB} \cdot m_{CD} = -1$$

Assim:

$$(-5) \cdot m_{CD} = -1 \quad \rightarrow \quad m_{CD} = \frac{1}{5}$$

Nesse momento, observe que **temos o coeficiente angular m_{CD} e o ponto C**. Com eles, podemos determinar a equação da reta.

$$y - y_C = m_{CD}(x - x_c)$$

Substituindo o que temos:

$$y - 300 = \frac{1}{5}(x - 600)$$

Essa é a **equação da reta** que liga os pontos C e D. Para encontrarmos o ponto D, basta impormos que $x = 0$, uma vez que esse ponto se encontra na borda esquerda.

$$y - 300 = \frac{1}{5}(0 - 600)$$

$$y - 300 = \frac{-600}{5}$$

$$y = 300 - 120$$

$$\boxed{y = 180}$$

Opa! Observe que "y" é exatamente a distância procurada pela questão, pois representa a distância do ponto D à base inferior. Além disso, lembre-se que **nossas medidas estão em centímetros**. Para convertê-las para metros, devemos **dividi-la por 100**.

$$\boxed{\mathrm{y = 180\ cm = 1{,}8\ m}}$$

Gabarito: LETRA C.

2. (FGV/AL-RO/2018) Considere a reta r de equação 2x + 3y + 7 = 0 e a reta s, perpendicular à reta r e que passa pelo ponto (1, 3). A interseção da reta s com o eixo X é

A) (3, 0)
B) (-1, 0)
C) (-2, 0)
D) (-3, 0)
E) (4, 0)

Comentários:

Pessoal, temos a seguinte equação de reta:

$$2x + 3y + 7 = 0$$

Vamos **isolar o y** para identificarmos o coeficiente angular de r.

$$3y = -2x - 7 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{2x}{3} - \frac{7}{3} \quad (1)$$

Quando comparamos (1) com a expressão $y = mx + n$, podemos tirar que **o coeficiente angular de r** é:

$$m_r = -\frac{2}{3}$$

A reta s **perpendicular** a r tem coeficiente angular tal que $\boldsymbol{m_s \cdot m_r = -1}$. Substituindo o valor de m_r:

$$m_s \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \quad \rightarrow \quad m_s = \frac{3}{2}$$

Como **a reta passa por um ponto conhecido**, podemos usar a seguinte expressão para determinar a equação da reta s:

$$y - y_o = m_s \cdot (x - x_o)$$

Substituindo as coordenadas do ponto **(1, 3)** e o coeficiente angular m_s, ficamos com:

$$y - 3 = \frac{3}{2} \cdot (x - 1) \quad \rightarrow \quad y - 3 = \frac{3x}{2} - \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} \quad (2)$$

A expressão (2) é a equação da reta s. Para determinar o ponto em que essa reta toca o eixo Ox, **devemos fazer $\boldsymbol{y = 0}$**. Assim,

$$0 = \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{3x}{2} = -\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad x = -1$$

Assim, o ponto em que a reta s toca o eixo Ox é o **ponto $\boldsymbol{(-1, 0)}$.**

Gabarito: LETRA B.

3. (FGV/PREF. PAULÍNIA/2016) As retas cujas equações são $\boldsymbol{y = ax + b}$ e $\boldsymbol{y = cx + d}$ são tais que

$$\boldsymbol{b > 0, d < 0 \text{ e } a > c > 0}$$

O ponto de interseção dessas retas está
A) no primeiro quadrante.
B) no segundo quadrante.
C) no terceiro quadrante.
D) no quarto quadrante.
E) sobre um dos eixos.

Comentários:
Considere que essas duas retas se encontrem no ponto (x_0, y_0). Com isso,

$$y_0 = ax_0 + b \qquad (1)$$

$$y_0 = cx_0 + d \qquad (2)$$

Vamos escrever x_0 **e** y_0 **em função de a, b, c e d**. Para isso, podemos começar igualando (1) e (2).

$$ax_0 + b = cx_0 + d$$

Agora, trabalharemos para isolar x_0.

$$ax_0 - cx_0 = d - b \quad \rightarrow \quad x_0(a - c) = d - b \quad \rightarrow \quad x_0 = \frac{d - b}{a - c}$$

Como **"a" é maior que "c" ($a > c$)**, podemos concluir que **o denominador da razão acima é positivo**. Por sua vez, sabemos que "d" é um número negativo enquanto "b" é um número positivo. Quando fazemos a subtração de um número negativo por um positivo, **o resultante disso continuará sendo um número negativo**, de forma que o numerador da razão acima é negativo. Com isso, podemos concluir que x_0 **é um número negativo** já que o numerador e denominador apresentam sinais trocados.

$$x_0 < 0$$

Agora, vamos pegar a expressão de x_0 e aplicar na equação (1) para determinarmos y_0.

$$y_0 = \frac{a \cdot (d - b)}{a - c} + b \quad \rightarrow \quad y_0 = \frac{ad - ab + ab - bc}{a - c} \rightarrow \quad y_0 = \frac{ad - bc}{a - c}$$

Já sabemos que o denominador é positivo da análise que fizemos para o x_0. Vamos observar o numerador.

De acordo com o enunciado, **"a" é um número positivo** ($a > 0$) e **"d" é um número negativo** ($d < 0$). Dessa forma, o produto desses dois números **"ad" é um número negativo**.

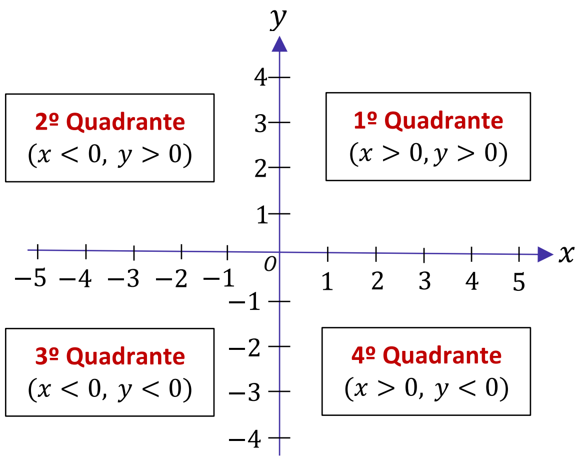
Por sua vez, como **"b" e "c" são números positivos**, o produto "**bc" também será positivo**. Portanto, podemos concluir que $ad - bc < 0$.

Para visualizar esse fato, considere um número negativo qualquer, vamos dizer o "-5". Agora, considere um positivo, tal como "10". Quando você fizer a subtração "$-5 - 10$" obterá um número negativo "-15".

Com isso, para o y_0 também teremos **denominador e numerador com sinais trocados**, indicando que se trata de um número negativo.

$$y_0 < 0$$

Como **as duas coordenadas desse ponto são negativas**, podemos concluir que o ponto está no 3º quadrante.



Gabarito: LETRA C.

4. (FGV/PREF. JOÃO PESSOA/2014) As retas de equações $y = 2x + m$ e $y = 3x + k$ se interceptam no ponto (2,-5). O valor de $m - k$ é

A) -20.

B) -2.

C) 0.

D) 2.

E) 20.

Comentários:

Como **as retas se interceptam no ponto (2, -5)**, essas coordenadas satisfazem as duas equações.

$$y = 2x + m \quad \rightarrow \quad -5 = 2 \cdot 2 + m \quad \rightarrow \quad m = -9$$

$$y = 3x + k \quad \rightarrow \quad -5 = 3 \cdot 2 + k \quad \rightarrow \quad k = -11$$

Sendo assim,

$$m - k = -9 - (-11) \quad \rightarrow \quad m - k = -9 + 11 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m - k = 2}$$

Gabarito: LETRA D.

5. (FGV/ALE-RO/2018) Uma reta com coeficiente angular 3 intersecta uma reta com coeficiente angular 5 no ponto (5, 23). A área do triângulo que essas retas formam com o eixo das ordenadas é

A) 22.

B) 23.

C) 24.

D) 25.

E) 26.

Comentários:

Temos duas retas que se intersectam no ponto (5, 23). **Uma tem coeficiente angular 3 e a outra 5**.

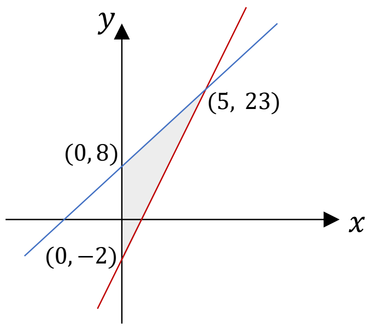
r: $y = 3x + b_1$
s: $y = 5x + b_2$

Note que se **as duas se intersectam em (5, 23)**, então esse ponto pertence as duas retas simultaneamente. Vamos substituí-lo em cada uma das equações de reta para determinarmos os coeficientes lineares b_1 e b_2.

$$23 = 3 \cdot 5 + b_1 \quad \rightarrow \quad 23 = 15 + b_1 \quad \rightarrow \quad b_1 = 8$$

$$23 = 5 \cdot 5 + b_2 \quad \rightarrow \quad 23 = 25 + b_2 \quad \rightarrow \quad b_2 = -2$$

Pronto, com esses coeficientes, **sabemos onde cada uma das retas toca o eixo Oy**. Vamos para o desenho!



Observe que temos todos os **pontos dos vértices do triângulo formado**. Com isso, vamos calcular sua área.

Lembre-se:

$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix}\right\|$$

Substituindo os pontos.

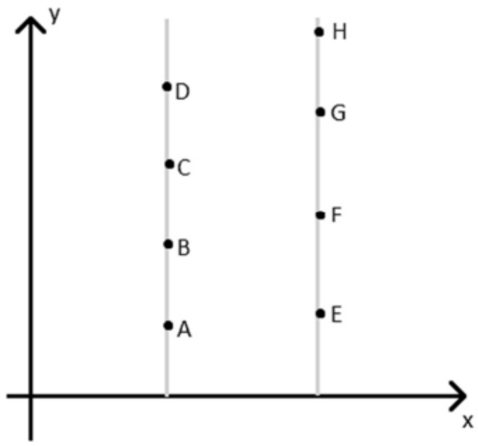
$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 5 & 23 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 8 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 \cdot 5) \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \cdot (40 + 10) \quad \rightarrow \quad A = \frac{50}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 25}$$

Gabarito: LETRA D.

CEBRASPE

6. (CESPE/PETROBRAS/2022)



No plano cartesiano Oxy da figura precedente, estão marcados 8 pontos distintos no primeiro quadrante, cujas coordenadas são:

$$\boldsymbol{A = (1, a);\quad B = (1, b);\quad C = (1, c);\quad D = (1, d);}$$

$$\boldsymbol{E = (2, e);\quad F = (2, f);\quad G = (2, g);\quad H = (2, h)}$$

A partir dos dados apresentados, julgue o item subsequente.

A reta que contém os pontos A e E possui equação $y = (e - a)x - e + 2a$.

Comentários:

Uma das maneiras de encontrar a equação de uma reta que passa por dois pontos (x_a, y_a) e (x_b, y_b) é fazer:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Essa expressão vem da **condição de colinearidade** (abordada na teoria) entre os pontos.

Agora, como queremos **a equação da reta** que passa por $\boldsymbol{A = (1, a)}$ e $\boldsymbol{E = (2, e)}$, ficamos com o seguinte:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & e & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(xa + 2y + e) - (2a + ex + y) = 0$$

$$xa + 2y + e - 2a - ex - y = 0$$

$$y + ax - ex + e - 2a = 0$$

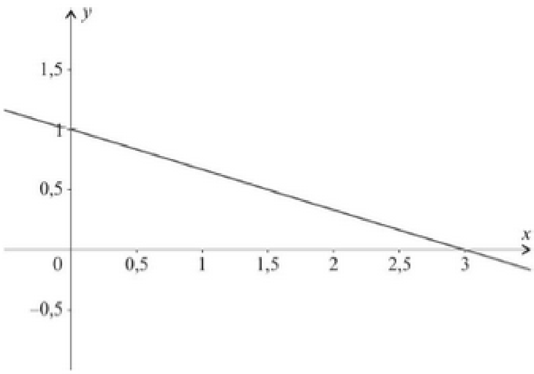
$$\boxed{\boldsymbol{y = (e - a)x - e + 2a}}$$

Note que é exatamente a expressão do item. Logo, item correto.

Gabarito: CERTO.

7. (CESPE/FUB/2022) Com relação a equações lineares e quadráticas, sistemas lineares e funções, julgue o item a seguir.

A representação gráfica da equação $x + 3y - 3 = 0$ é dada pela reta apresentada a seguir.



Comentários:

Da representação gráfica, vemos que **a reta está passando pelos pontos (0,1) e (3,0)**. Uma das maneiras de encontrar a equação de reta é **calculando o coeficiente angular** da reta por meio da expressão:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Usando os pontos do gráfico:

$$m = \frac{1 - 0}{0 - 3} \quad \rightarrow \quad m = -\frac{1}{3}$$

Agora, com o coeficiente angular, podemos usar:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

x_o e y_o são as coordenadas de **um ponto pelo qual a reta passa**. Podemos usar tanto o (0,1) quanto o (3,0). Vamos optar pelo (0,1).

$$y - 1 = \left(-\frac{1}{3}\right)(x - 0) \quad \rightarrow \quad y - 1 = -\frac{x}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{3y + x - 3 = 0}}$$

Gabarito: CERTO.

CESGRANRIO

8. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Considere R1 a reta representada pela equação: $2y - x - 1 = 0$ e o ponto P1 dado pelo par ordenado $(x, y) = (2, 4)$, ambos no plano xy. Seja R2 a reta perpendicular a R1 passando pelo ponto P1. O ponto P2, interseção entre as retas R1 e R2, é representado pelo par ordenado (x, y) igual a

A) (5,3)
B) (–1,0)
C) (3,2)
D) (–3, –1)
E) (1,1)

Comentários:

Temos a equação da reta R_1:

$$2y - x - 1 = 0$$

Vamos isolar o y para ficar melhor de visualizar **o coeficiente angular** da reta.

$$2y = x + 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \quad (1)$$

De (1), conseguimos tirar que $m_1 = \frac{1}{2}$. Como **a reta R_2 é perpendicular a R_1**, podemos escrever:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Substituindo o valor de m_1:

$$\frac{1}{2} \cdot m_2 = -1 \quad \rightarrow \quad m_2 = -2$$

Esse é o coeficiente angular de reta R_2. Como sabemos que R_2 **passa pelo ponto $P_1 = (2, 4)$**, podemos usar o seguinte para determinar a equação da reta:

$$y - y_0 = m_2(x - x_0)$$

Substituindo o coeficiente angular e as coordenadas do ponto P_1:

$$y - 4 = -2 \cdot (x - 2) \quad \rightarrow \quad y - 4 = -2x + 4 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 8 \quad (2)$$

Queremos saber em que ponto R_1 e R_2 vão concorrer (P_2). Para isso, **basta igualarmos (1) e (2).**

$$-2x + 8 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -4x + 16 = x + 1 \quad \rightarrow \quad 5x = 15 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

Portanto, **a abscissa de P_2 é 3**. Para determinar a ordenada y, podemos substituir $x = 3$ valor em (2):

$$y = -2 \cdot 3 + 8 \quad \rightarrow \quad y = -6 + 8 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

Sendo assim, $\boldsymbol{P_2 = (3, 2)}$.

Gabarito: LETRA C.

9. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Um sistema cartesiano de coordenadas (xy) foi disposto sobre um grande terreno plano. Nesse terreno, passam os trilhos da rede ferroviária, que foram modelados pela reta cuja equação é dada por $2x + y = 3$. O ponto $P(1, 3)$ será utilizado como base de realização de uma importante medição, o que exigirá dos engenheiros a determinação de um ponto, sobre os trilhos, que esteja mais próximo do ponto P. Qual é o ponto da reta $2x + y = 3$ que está mais próximo do ponto P (1,3)?

A) $\left(\frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right)$

B) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

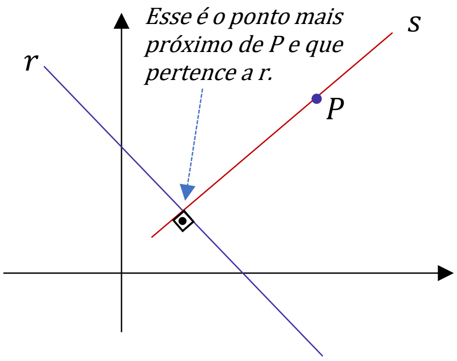
C) $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$

D) $(1, 1)$

E) $(3, -3)$

Comentários:

O ponto da reta $2x + y = 3$ que está mais próximo de $P(1,3)$ é o ponto que também pertence a uma reta perpendicular que também passa por ele. Vamos desenhar para facilitar o entendimento.



Portanto, para encontrar esse ponto mais próximo, primeiro devemos **determinar a reta s**, que é **perpendicular a r e passa por P**. Com isso, vamos **isolar y** na reta dada no enunciado para conseguimos identificar o coeficiente angular.

$$2x + y = 3 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 3 \quad (1)$$

Com isso, conseguimos tirar que $\boldsymbol{m_r = -2}$. Se **r é perpendicular a s**, então vale:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

Substituindo o valor de m_r:

$$-2 \cdot m_s = -1 \quad \rightarrow \quad m_s = \frac{1}{2}$$

Sabemos um ponto da reta e seu coeficiente angular. A melhor forma de encontrar sua equação é por meio da seguinte expressão que deduzimos na teoria:

$$y - y_0 = m_s(x - x_0)$$

Substituindo **o coeficiente angular** e **as coordenadas do ponto P**:

$$y - 3 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \quad \rightarrow \quad y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \quad (2)$$

Pronto, **temos as equações das duas retas**! Para encontrar o ponto em que elas se encontram, igualamos (1) e (2).

$$\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = -2x + 3 \quad \rightarrow \quad x + 5 = -4x + 6 \quad \rightarrow \quad 5x = 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{5}$$

Com o valor da abscissa do ponto, podemos substituir tanto em (1) como (2) para encontrar a ordenada.

$$y = -2x + 3 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{2}{5} + 3 \quad \rightarrow \quad y = \frac{13}{5}$$

´Logo, podemos marcar que **o ponto procurado é o $\boldsymbol{\left(\frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right)}$.**

Gabarito: LETRA A.

10. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Uma equação da reta r que passa pelo ponto de interseção entre as retas s: x – 2y = 4 e t: x – y = 4 e forma com a reta u: 9x – 5y = 12 um ângulo de 45° é dada por

A) r: 2x – 7y = 8

B) r: 3x – 7y = 12
C) r: 5x – 7y = 20
D) r: x – 7y = 4
E) r: 2x + 7y = 8

Comentários:

Primeiro, vamos determinar **o ponto de intersecção entre as retas s e t**.

$r: \quad x - 2y = 4 \qquad (1)$

$t: \quad x - y = 4 \qquad (2)$

Isolando o "x" em (2):

$$x = 4 + y \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1)

$$4 + y - 2y = 4 \quad \rightarrow \quad y = 0$$

A ordenada do ponto de intersecção é 0. Para determinar sua abscissa, basta substituir esse valor em qualquer uma das equações.

$$x = 4 + 0 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

Portanto, **as retas r e t se tocam no ponto $(4, 0)$.** A reta u por sua vez é dada por:

$$9x - 5y = 12$$

Isolando o "y":

$$5y = 9x - 12 \quad \rightarrow \quad y = \frac{9x}{5} - \frac{12}{5}$$

Olhando para a expressão acima, conseguimos tirar que o coeficiente angular da reta u é:

$$m_u = \frac{9}{5}$$

Como estamos procurando uma **reta r que faz 45° com a reta u**, devemos lembrar que seus coeficientes angulares devem obedecer a seguinte relação:

$$\tan 45° = \left|\frac{m_u - m_r}{1 + m_u \cdot m_r}\right|$$

Substituindo as informações que temos,

$$1 = \left|\frac{\frac{9}{5} - m_r}{1 + \frac{9m_r}{5}}\right| \quad \rightarrow \quad |9 - 5m_r| = |5 + 9m_r|$$

Temos **duas possibilidades** para a equação modular acima.

(i) $9 - 5m_r = 5 + 9m_r$

$$9 - 5m_r = 5 + 9m_r \quad \rightarrow \quad 14m_r = 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m_r = \frac{2}{7}}$$

(ii) $-(9 - 5m_r) = 5 + 9m_r$

$$-(9 - 5m_r) = 5 + 9m_r \quad \rightarrow \quad -9 + 5m_r = 5 + 9m_r \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m_r = -\frac{7}{2}}$$

Olhando para as alternativas, vemos que existem **duas com o coeficiente angular $\boldsymbol{m_r}$** $= \frac{2}{7}$ e nenhuma com o coeficiente angular $-\frac{7}{2}$. Por esse motivo, **vamos escolher a primeira solução**. Com o coeficiente angular e um ponto, obtemos a equação da reta da seguinte maneira:

$$(y - y_0) = m_r \cdot (x - x_0)$$

Substituindo $m_r = \frac{2}{7}$ e $(x_0, y_0) = (4{,}0)$:

$$y - 0 = \frac{2}{7} \cdot (x - 4) \quad \rightarrow \quad 7y = 2x - 8 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{2x - 7y = 8}$$

Gabarito: LETRA A.

Outras Bancas

11. (AOCP/SED-MS/2022) Considere r a reta que passa pelo ponto $(2, 0)$ e intersecta o eixo Oy no ponto $(0, k)$; s a reta perpendicular à r e que passa pelo ponto $(1, 2)$. Sabendo-se que a área do triângulo que tem vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, k)$ é igual a 4 cm² e considerando que as unidades nos eixos cartesianos estão em centímetros, a equação da reta s é dada por

A) $y = (x + 7)/4$.
B) $y = (x + 3)/2$.
C) $y = 2 \cdot (x + 2)/3$.
D) $y = 3x - 1$.
E) $y = x + 1$.

Comentários:

A primeira informação do enunciado que vamos utilizar é a da área de 4 cm².

Note que como já temos a área, **conseguiremos determinar o valor de "k"**.

A área do triângulo com vértices nos pontos (x_A, y_A), (x_B, y_B) e (x_C, y_C) é dada por:

$$A = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|$$

De acordo com o enunciado, temos que **a área do triângulo que tem vértices $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{2}, \mathbf{0})$ e $(\mathbf{0}, \boldsymbol{k})$** é igual a 4 cm². Assim,

$$4 = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{matrix} \right\| \quad \rightarrow \quad 2k = 8 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{k = 4}}$$

Com o valor de "k", vamos o coeficiente angular da reta r que passa pelos pontos $(2{,}0)$ e $(0, k)$.

$$m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad m_r = \frac{4-0}{0-2} \quad \rightarrow \quad m_r = \frac{4}{-2} \quad \rightarrow \quad m_r = -2$$

Com o coeficiente angular da reta r, podemos encontrar **o coeficiente angular da reta s**, pois sabemos que **r é perpendicular à s**.

$$m_r \cdot m_s = -1 \quad \rightarrow \quad m_s = \frac{-1}{-2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m_s = \frac{1}{2}}$$

Note que o coeficiente angular é 1/2. A única alternativa que apresenta um coeficiente angular igual a 1/2 é a alternativa B. Portanto, já poderíamos marcá-la.
De qualquer forma, vamos obter a equação!

Já sabemos o coeficiente angular da reta s e que **ela passa pelo ponto (1,2)**. Assim, podemos usar:

$$y - y_o = m_s(x - x_o)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x-1) \quad \rightarrow \quad y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{y = \frac{x+3}{2}}}$$

Gabarito: LETRA B.

12. (CEV URCA/PREF. CRATO/2021) O ponto da reta $3x - 4y + 8 = 0$ que está mais próximo do ponto $(2, 1)$ é:

A) $\left(\frac{4}{7}, \frac{13}{5}\right)$
B) $\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{5}\right)$
C) $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$
D) $\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{5}\right)$
E) $\left(\frac{4}{5}, \frac{25}{11}\right)$

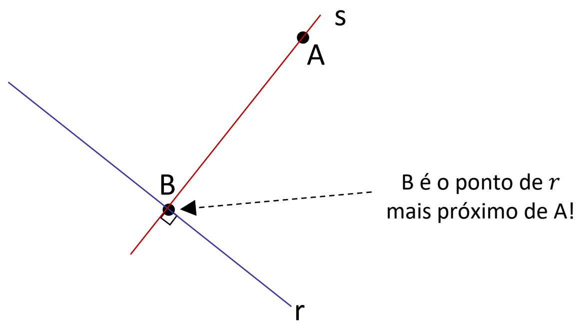
Comentários:

Primeiramente, vamos reescrever a equação do enunciado de uma forma melhor, isolando o "y".

$$3x - 4y + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad 4y = 3x + 8 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = \frac{3x}{4} + 2} \quad (1)$$

Vamos chamar essa reta de "r".

O ponto de "r' que está mais próximo de (2,1) será a intersecção de "r" com uma reta "s", perpendicular a "r" e que contém o ponto (2,1). Calma! Observe a figura abaixo para entender melhor!



Sendo assim, nossa estratégia será descobrir "s" e fazer a intersecção dela com "r".

Nesse intuito, note que o coeficiente angular da reta "r" é $m_r = \frac{3}{4}$.
Sabemos que se **duas retas são perpendiculares**, então seus coeficientes angulares obedecem a relação:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

Usando $m_r = \frac{3}{4}$, podemos determinar m_s.

$$\left(\frac{3}{4}\right) \cdot m_s = -1 \quad \rightarrow \quad m_s = -\frac{4}{3}$$

Sabemos **o coeficiente angular de "s" e que ela passa por (2,1)**. Agora, podemos usar:

$$y - y_o = m_s(x - x_o)$$

$$y - 1 = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot (x - 2) \quad \rightarrow \quad y - 1 = -\frac{4x}{3} + \frac{8}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{4x}{3} + \frac{11}{3}} \qquad (2)$$

Vamos igualar (1) e (2) para descobrir a abscissa do ponto procurado.

$$\frac{3x}{4} + 2 = -\frac{4x}{3} + \frac{11}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{3x}{4} + \frac{4x}{3} = \frac{11}{3} - 2 \quad \rightarrow \quad \frac{9x + 16x}{12} = \frac{5}{3}$$

$$\rightarrow \quad \frac{25x}{12} = \frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad 5x = 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{4}{5}}$$

Pronto, temos "x". Agora podemos substitui-lo tanto em (1) como em (2) para determinar "y".

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + 2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{5} + 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = \frac{13}{5}}$$

Com isso, temos que **o ponto procurado é $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$**.

Gabarito: LETRA C.

13. (QUADRIX/SEDF/2021) Dados os pontos $A(4, 11)$, $B(4, 4)$ e $C(28, 4)$, julgue o item.

A distância do ponto B até a reta definida pelos pontos A e C é igual a 6,72.

Comentários:
O primeiro passo é encontrar a reta que passa pelos pontos A e C.

Para isso, devemos **calcular o coeficiente angular m_{AC}.**

$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad m_{AC} = \frac{11 - 4}{4 - 28} \quad \rightarrow \quad \boxed{m_{AC} = -\frac{7}{24}}$$

Com o coeficiente angular e sabendo que a reta passa por A e C, podemos escrever:

$$y - y_A = m_{AC}(x - x_A)$$

$$y - 11 = \left(-\frac{7}{24}\right)(x - 4) \quad \rightarrow \quad 24y - 264 = -7x + 28 \quad \rightarrow \quad \boxed{7x + 24y - 292 = 0}$$

Essa é a equação da reta que passa por AC!

Ademais, na teoria, vimos que a distância entre um ponto $P(x_o, y_o)$ e uma reta $ax + by + c = 0$ é dada por:

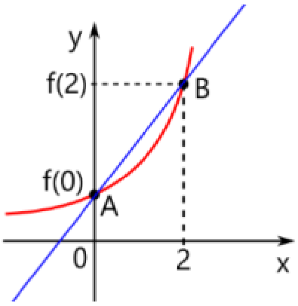
$$d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Queremos **a distância do ponto $\boldsymbol{B(4,4)}$ a reta $\boldsymbol{7x + 24y - 292 = 0}$**. Assim,

$$d = \frac{|7 \cdot 4 + 24 \cdot 4 - 292|}{\sqrt{7^2 + 24^2}} \quad \rightarrow \quad d = \frac{|168|}{25} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{d = 6,72}}$$

Gabarito: CERTO.

14. (IBFC/SEC-BA/2023) A equação geral da reta que passa pelos pontos A e B, sendo considerado a função $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$, é igual a:



A) $2x - 3y - 2 = 0$
B) $2y - 3x - 2 = 0$
C) $-2x + 3y + 2 = 0$
D) $3y - 3x + 4 = 0$
E) $2x - 3y - 7 = 0$

Comentários:
Observe que o ponto A é onde a função $f(x) = 2^x$ toca o eixo Oy, ou seja, quando $x = 0$.

$$f(0) = 2^0 = 1$$

Sendo assim, **o ponto A é $\boldsymbol{(0,1)}$.**

Por sua vez, o ponto B acontece quando $x = 2$.

$$f(2) = 2^2 = 4$$

Assim, **o ponto B é $(2, 4)$.**

Queremos a reta que passa por A e por B. Para isso, vamos encontrar o seu coeficiente angular.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \rightarrow \quad m = \frac{4-1}{2-0} \quad \rightarrow \quad m = \frac{3}{2}$$

Com o valor de m, podemos usar:

$$y - y_a = m(x - x_a)$$

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 0)$$

$$y - 1 = \frac{3x}{2}$$

Reorganizando:

$$\boxed{\mathbf{2y - 3x - 2 = 0}}$$

Gabarito: LETRA B.

15. (AOCP/SED-MS/2022) Considere r a reta que passa pelo ponto $(2, 0)$ e intersecta o eixo Oy no ponto (0, k); s a reta perpendicular à r e que passa pelo ponto $(1, 2)$. Sabendo-se que a área do triângulo que tem vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, k)$ é igual a 4 cm² e considerando que as unidades nos eixos cartesianos estão em centímetros, a equação da reta s é dada por

A) $y = (x + 7)/4$
B) $y = (x + 3)/2$
C) $y = 2(x + 2)/3$
D) $y = 3x - 1$
E) $y = x + 1$

Comentários:

Inicialmente, vamos usar a área do triângulo para determinar o valor de k.

$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix}\right\|$$

Vamos usar os pontos $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, k)$:

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & k & 1\end{vmatrix}\right\| \quad \rightarrow \quad A=\frac{1}{2}|2k| \quad \rightarrow \quad |k|=4$$

Perceba que k pode ser dois valores: -4 ou 4. Vamos **usar o valor positivo**. Com o valor de k, sabemos que a reta r passa pelos pontos $(2,0)$ e $(0,4)$. Podemos calcular o coeficiente angular de r.

$$m_r=\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad m_r=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \quad \rightarrow \quad m_r=\frac{4-0}{0-2} \quad \rightarrow \quad m_r=-2$$

Como ***r* é perpendicular a *s***, podemos encontrar o coeficiente angular de s por meio da relação:

$$m_r\cdot m_s=-1$$

$$(-2)\cdot m_s=-1$$

$$m_s=\frac{1}{2}$$

Com o coeficiente angular e um dos pontos pelo qual a reta s passa, podemos determinar sua equação.

$$y-y_a=m_s(x-x_a)$$

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$2y-4=x-1$$

$$\boxed{y=\frac{x+3}{2}}$$

Gabarito: LETRA B.

16. (DIRENS/EEAR/2022) A reta $2x-y-6=0$ intercepta os eixos coordenados nos pontos A e B. Determine a equação da mediatriz do segmento AB e assinale a resposta certa.

A) y = (7/2)x + (9/5).

B) y = (-9/4)x - (1/2).

C) y = (-7/2)x + (5/2).

D) y = (-1/2)x - (9/4).

Comentários:

O enunciado nos forneceu a seguinte reta r:

$$2x - y - 6 = 0$$

Vamos organizá-la para explicitar o seu coeficiente angular:

$$y = 2x - 6$$

Com isso, podemos concluir que $m_r = 2$.

Lembre-se que **a mediatriz é perpendicular à reta suporte**. Logo, ela possui coeficiente angular m_m tal que:

$$m_r \cdot m_m = -1 \quad \rightarrow \quad m_m = -\frac{1}{2}$$

Sabemos que **A e B são os pontos onde a reta r intercepta os eixos coordenados**.

- No eixo Oy $(x = 0)$:

$$y = 2 \cdot 0 - 6 \quad \rightarrow \quad y = -6$$

Assim, $\boxed{A = (0, -6)}$.

- No eixo Ox $(y = 0)$:

$$0 = 2x - 6 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

Assim, $\boxed{B = (3, 0)}$.

Com os pontos A e B, podemos determinar **o ponto médio** do segmento.

$$M = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{0 + 3}{2}, \frac{-6 + 0}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{3}{2}, -3\right)$$

Sabemos que **a mediatriz passa pelo ponto médio (M) e é perpendicular a r**. Sendo assim:

$$y - y_M = m_m(x - x_m)$$

$$y-(-3)=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-3$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{2}x-\frac{9}{4}}$$

Gabarito: LETRA D.

17. (FUNDATEC/SBC/2021) Assinale a alternativa que apresenta o ângulo formado entre a reta $2x-y-12=0$ e a reta $3x+y+3=0$.

A) 0°.
B) 15°.
C) 30°.
D) 45°.
E) 60°.

Comentários:

Para determinar o ângulo entre as retas, devemos buscar os **coeficientes angulares** de cada uma.

- Reta r:

$$\mathbf{2x-y-12=0}$$

$$y=2x-12$$

Com isso, $\boldsymbol{m_r=2}$.

- Reta s:

$$\mathbf{3x+y+3=0}$$

$$y=-3x-3$$

Com isso, $\boldsymbol{m_s=-3}$.

Com os dois coeficientes, podemos usar:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\right|$$

Em que α **é o ângulo formado entre as retas**. Vamos substituir os coeficientes.

$$\tan\alpha = \left|\frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}\right| \quad \rightarrow \quad \tan\alpha = \left|\frac{5}{-5}\right| \quad \rightarrow \quad \boxed{\tan\alpha = 1}$$

Qual ângulo agudo que possui tangente igual a 1?

Só pode ser o 45°!!

Logo, podemos marcar a alternativa D.

Gabarito: LETRA D.

18. (INST. CONSULPLAN/SEED-PR/2022) Sejam duas retas definidas no plano cartesiano por:

r: $\boldsymbol{y + 2x - 1 = 0}$
s: $\boldsymbol{2x - 3y + 4 = 0}$

Se P é o ponto de intersecção entre essas duas retas, qual alternativa apresenta uma afirmação verdadeira?

A) P está localizado em um quadrante ímpar.
B) P não existe, pois as retas não se interceptam.
C) O módulo da ordenada de P é 10 vezes o módulo de sua abscissa.
D) O módulo da abscissa de P é 10 vezes o módulo de sua ordenada.

Comentários:

Para encontrar o ponto de intersecção entre as retas, devemos resolver o sistema formado pelas duas equações de reta. Isolando o y em r, ficamos:

$$y = -2x + 1$$

Substituindo em s:

$$2x - 3\cdot(-2x+1) + 4 = 0$$

$$2x + 6x - 3 + 4 = 0$$

$$8x = -1$$

$$x = -\frac{1}{8}$$

Substituindo em r:

$$y = -2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{4} + 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{5}{4}$$

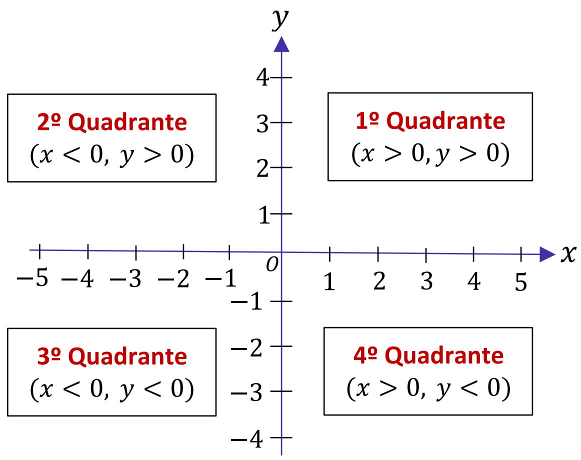
Portanto, o ponto de intersecção entre as duas retas é:

$$P = \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{4}\right)$$

Agora, vamos analisar as alternativas.

A) P está localizado em um quadrante ímpar.

Errado. Observe que $x_P < 0$ e $y_P > 0$. Essa é uma característica de pontos que estão no segundo quadrante.



B) P não existe, pois as retas não se interceptam.

Errado. Encontramos uma solução para o sistema. Logo, P existe.

C) O módulo da ordenada de P é 10 vezes o módulo de sua abscissa.

Correto. Note que o módulo da ordenada de P é 5/4, enquanto da abscissa é 1/8. Sendo assim, o módulo da ordenada de P é 10 vezes o módulo de sua abscissa.

$$10 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$$

D) O módulo da abscissa de P é 10 vezes o módulo de sua ordenada.

Errado. Conforme justificativa do item C.

Gabarito: LETRA C.

19. (FUNDATEC/PREF. VIAMÃO/2022) A única alternativa em que constam duas retas paralelas é:

A) $x + 2 = y$ e $-x + 3 = -y$

B) $x + 4 = 2y$ e $-x + 4 = 2y$

C) $x - 2 = y$ e $x - 3 = -y$

D) $x + 2 = 2y$ e $-x + 3 = -y$

E) $2x + 2 = y$ e $2x + 3 = -y$

Comentários:

Para identificar retas paralelas, devemos observar os coeficientes angulares. **Se eles forem iguais**, então teremos aí **retas paralelas**. Vamos organizar cada uma das equações de modo a facilitar a identificação dos coeficientes angulares.

A) $x + 2 = y$ e $-x + 3 = -y$

$$y = x + 2$$

$$y = x - 3$$

As duas retas **possuem coeficiente angular igual a 1**. Sendo assim, **são retas paralelas** e já podemos marcar a alternativa A como nosso gabarito.

B) $x + 4 = 2y$ e $-x + 4 = 2y$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Observe que um coeficiente angular é positivo e o outro é negativo. Logo, **não são iguais.** Diante disso, podemos concluir que essas retas não são paralelas.

C) $x - 2 = y$ e $x - 3 = -y$

$$y = x - 2$$

$$y = -x + 3$$

É o caso da alternativa anterior. Coeficientes angulares com os **sinais trocados**! Não são retas paralelas.

D) $x + 2 = 2y$ e $-x + 3 = -y$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$y = x - 3$$

Coeficientes angulares bem diferentes! **Não são retas paralelas**.

E) $2x + 2 = y$ e $2x + 3 = -y$

$$y = 2x + 2$$

$$y = -2x - 3$$

Coeficientes angulares diferentes (sinais trocados)! **Não são retas paralelas**.

Gabarito: LETRA A.

20. (Inst AOCP/ITEP-RN/2021) Considere as retas r e s de equações $kx + y + 5 = 0$ e $2x + (k+1)y - 9 = 0$, respectivamente. A razão entre o valor de k, tal que r seja perpendicular a s, e o valor de k, tal que r seja paralela a s, é

A) 3 ou -6.
B) −1/3 ou −1/6.
C) 1/3 ou −1/6.
D) 1/3 ou 1/6.
E) −1/3 ou 1/6

Comentários:

Para que r **seja perpendicular a** s, devemos ter:

$$m_r m_s = -1$$

Sendo assim, precisamos determinar o **coeficiente angular** de cada uma das retas.

- Reta r:

$$kx + y + 5 = 0$$

$$y = -kx - 5$$

Com isso, temos que $m_r = -k$

- Reta s:

$$2x + (k+1)y - 9 = 0$$

$$y = -\frac{2}{k+1}x - \frac{9}{k+1}$$

Com isso, temos $m_s = -2/(k+1)$.

Vamos usar esses dois coeficientes na **condição de perpendicularidade**:

$$m_r m_s = -1$$

$$(-k) \cdot \left(-\frac{2}{k+1}\right) = -1$$

$$2k = -k - 1$$

$$3k = -1$$

$$k_{perp} = -\frac{1}{3}$$

Esse é o k necessário para que as duas retas sejam **perpendiculares**.

Para que elas sejam **paralelas**, precisamos ter $m_r = m_s$. Assim:

$$-k = \frac{-2}{k+1}$$

$$k^2 + k = 2$$

$$k^2 + k - 2 = 0$$

Opa! Uma equação de segundo grau que possui como **raízes o 1 e o -2**.

Sendo assim, temos **duas possibilidades** para k:

$$k'_{par} = 1 \qquad ou \qquad k''_{par} = -2$$

As razões procuradas são:

$$r_1 = \frac{k_{perp}}{k'_{par}} \quad \rightarrow \quad r_1 = \frac{-\frac{1}{3}}{1} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r_1 = -\frac{1}{3}}}$$

$$r_2 = \frac{k_{perp}}{k''_{par}} \quad \rightarrow \quad r_2 = \frac{-\frac{1}{3}}{-2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r_2 = \frac{1}{6}}}$$

Gabarito: LETRA E.

Vunesp

21. (VUNESP/PM-SP/2013) As retas das equações

$$\boldsymbol{x + 2y - 4 = 0}$$

$$\boldsymbol{2x + y + 7 = 0}$$

$$\boldsymbol{x + y + k = 0}$$

concorrem em P. O valor de k na equação $\boldsymbol{x + y + k = 0}$ é

A) -2.

B) -1.

C) 1.

D) 2.

E) 3.

Comentários:

Considere o ponto $P(x_0, y_0)$. Como **todas as retas concorrem nele**, podemos escrever:

$$x_0 + 2y_0 - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$2x_0 + y_0 + 7 = 0 \qquad (2)$$

$$x_0 + y_0 + k = 0 \qquad (3)$$

Vamos usar (1) e (2) para **determinar as coordenadas $\boldsymbol{x_0}$ e $\boldsymbol{y_0}$**. Isolando o "x_0" em (1),

$$x_0 = 4 - 2y_0 \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (2),

$$2 \cdot (4 - 2y_0) + y_0 + 7 = 0$$

$$8 - 4y_0 + y_0 + 7 = 0$$

$$-3y_0 = -15 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y_0 = 5}$$

Com o valor de y_0, podemos usá-lo em (4) para determinar x_0.

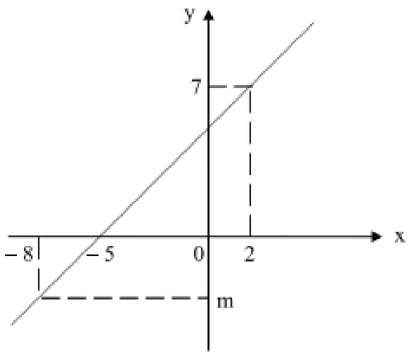
$$x_0 = 4 - 2 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad x_0 = 4 - 10 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_0 = -6}$$

Pronto! O ponto P em que **as três retas concorrem é $(-6, 5)$**. Para determinar k, devemos usar esses valores em (3).

$$-6 + 5 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = 1$$

Gabarito: LETRA C.

22. (VUNESP/PM-SP/2010) Se o gráfico indicado na figura representa uma reta, m é igual a



A) -4.
B) -3.
C) -5/2.
D) -2.
E) -3/2.

Comentários:

Perceba que temos **três pontos que estão alinhados**, $A(2,7)$, $B(-5,0)$ e $C(-8, m)$. Sabemos que quando três pontos estão alinhados assim (**colineares**), podemos usar:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

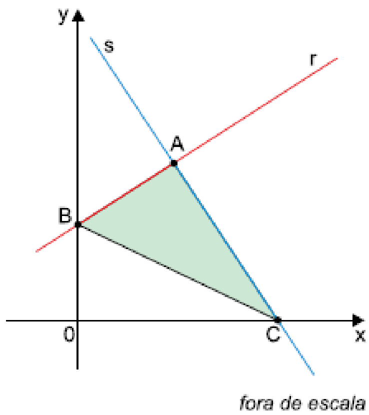
Substituindo as coordenadas dos pontos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ -8 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 0 - 56 - 5m + 0 - 2m + 35 = 0$$

$$-7m - 21 = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m = -3}$$

Gabarito: LETRA B.

23. (VUNESP/FAMEMA/2018) A reta r de equação $y = \frac{3x+4}{2}$ e a reta s de equação $y = \frac{-5x+25}{3}$ se intersectam no ponto A, conforme mostra o gráfico.



Sabendo que o ponto B é a intersecção da reta r com o eixo das ordenadas e que o ponto C é a intersecção da reta s com o eixo das abscissas, a área do triângulo ABC, em unidades de área, é

A) 9,5.

B) 11,5.

C) 13,0.

D) 16,5.

E) 19,0.

Comentários:

O primeiro passo é encontrar **o ponto de intersecção A**. Para isso, podemos igualar as equações.

$$\frac{3x+4}{2} = \frac{-5x+25}{3} \quad \rightarrow \quad 9x + 12 = -10x + 50 \quad \rightarrow \quad 19x = 38 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Já sabemos que a abscissa de A é 2. Para encontrar a ordenada, basta substituirmos $x = 2$ em qualquer uma das equações de reta. Escolhendo a reta r:

$$y = \frac{3 \cdot 2 + 4}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{10}{2} \quad \rightarrow \quad y = 5$$

Pronto! Encontramos nosso primeiro ponto, $A = (2, 5)$.

Como **B é a intersecção de r com o eixo das ordenadas**, então nesse ponto temos $x = 0$. Sendo assim,

$$y = \frac{3 \cdot 0 + 4}{2} \quad \rightarrow \quad y = 2$$

Portanto, temos que $B = (0, 2)$. Por fim, como **C é a intersecção de s com o eixo das abscissas**, então nesse ponto temos $y = 0$. Logo,

$$\frac{-5x + 25}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad 5x = 25 \quad \rightarrow \quad x = 5$$

Com isso, $C = (5, 0)$.

Temos todos os três pontos!! Para encontrar a **área do triângulo** em que tais pontos são os vértices, nós usamos a seguinte expressão:

$$A = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|$$

Substituindo cada um,

$$A = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 1) \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \cdot 19 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 9,5}$$

Gabarito: LETRA A.

QUESTÕES COMENTADAS

Circunferência

FGV

1. (FGV/CBM-RJ/2024) Considere a circunferência de equação:

$$(x-4)^2 + (y+5)^2 = 4$$

O ponto pertencente a essa circunferência que está mais próximo do eixo y é

A) (−4; 5).

B) (−4; 3).

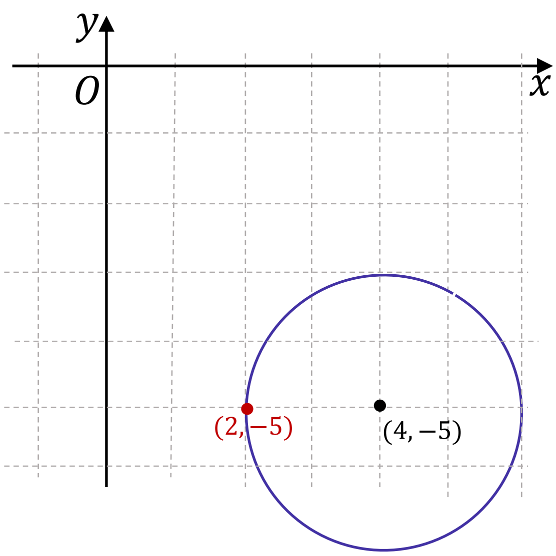
C) (4; −3).

D) (−2; 5).

E) (2; −5).

Comentários:

A circunferência da questão tem centro em (4, -5) e raio igual a 2. Vamos desenhá-la!



Com o desenho, é possível observar que **o ponto mais próximo do eixo Oy é o ponto (2, -5).**

Gabarito: LETRA E.

2. (FGV/PREF. PAULÍNIA/2021) A reta de equação $3x + 4y - 13 = 0$ determina sobre a circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 36$ uma corda de comprimento igual a:

A) 8

B) $8\sqrt{2}$

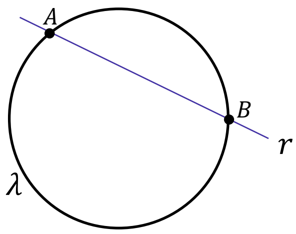
C) 6

D) $6\sqrt{2}$

E) 4

Comentários:

Vou desenhar a situação para conseguirmos enxergar melhor o que está acontecendo.



Note que **o comprimento da corda é exatamente a distância entre os pontos A e B**.

Para calcular a distância entre esses dois pontos, precisamos primeiro encontrá-los.

Já adianto para vocês que não será uma tarefa fácil! (rsrsrs)

Vamos precisar resolver um sistema formado pela equação da reta e pela equação da circunferência.

1) Isolando "y" na equação da reta:

$$4y = -3x + 13 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{1}{4} \cdot (-3x + 13)$$

2) Substituindo "y" na equação da circunferência:

$$(x-1)^2 + y^2 = 36$$

$$(x-1)^2 + \left(\frac{1}{4} \cdot (-3x + 13)\right)^2 = 36$$

$$(x^2 - 2x + 1) + \frac{9x^2 - 78x + 169}{16} = 36$$

$$16x^2 - 32x + 16 + 9x^2 - 78x + 169 = 576$$

$$\boldsymbol{25x^2 - 110x - 391 = 0}$$

Note que essa é uma **equação de segundo grau**, precisaremos usar **Bhaskara** para resolvê-la.

- Cálculo do Discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (-110)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-391) \quad \rightarrow \quad \Delta = 51200$$

- Cálculo das Raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-(-110) \pm \sqrt{51200}}{2 \cdot 25} \quad \rightarrow \quad x = \frac{110 \pm 160\sqrt{2}}{50}$$

$$x_1 = \frac{11 + 16\sqrt{2}}{5} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{11 - 16\sqrt{2}}{5}$$

Essas são as abscissas dos pontos A e B. Para encontrar as ordenadas, podemos usar a equação da reta.

$$y = \frac{1}{4} \cdot (-3x + 13)$$

1) Para $x_1 = \frac{11+16\sqrt{2}}{5}$:

$$y_1 = \frac{1}{4} \cdot \left(-3 \cdot \left(\frac{11 + 16\sqrt{2}}{5}\right) + 13\right) \quad \rightarrow \quad y_1 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{32 - 48\sqrt{2}}{5}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y_1 = \frac{8 - 12\sqrt{2}}{5}}$$

Pronto, temos o primeiro ponto!

$$\boxed{A = \left(\frac{11 + 16\sqrt{2}}{5}, \frac{8 - 12\sqrt{2}}{5}\right)}$$

2) Para $x_2 = \frac{11-16\sqrt{2}}{5}$:

$$y_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(-3 \cdot \left(\frac{11 - 16\sqrt{2}}{5}\right) + 13\right) \quad \rightarrow \quad y_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{32 + 48\sqrt{2}}{5}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y_2 = \frac{8 + 12\sqrt{2}}{5}}$$

Pronto, o segundo ponto fica:

$$\boxed{B = \left(\frac{11 - 16\sqrt{2}}{5}, \frac{8 + 12\sqrt{2}}{5}\right)}$$

Queremos a distância desses dois pontos! Lembre-se que: $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$$d(A,B) = \sqrt{\left(\frac{11 + 16\sqrt{2}}{5} - \frac{\left(11 - 16\sqrt{2}\right)}{5}\right)^2 + \left(\frac{8 - 12\sqrt{2}}{5} - \frac{\left(8 + 12\sqrt{2}\right)}{5}\right)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{\frac{\left(32\sqrt{2}\right)^2}{25} + \frac{\left(-24\sqrt{2}\right)^2}{25}} \quad \rightarrow \quad d(A,B) = \frac{\sqrt{1600 \cdot 2}}{5} \quad \rightarrow \quad d(A,B) = \frac{40}{5} \cdot \sqrt{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(A,B) = 8\sqrt{2}}}$$

Gabarito: LETRA B.

3. (FGV/AL-RO/2018) O segmento de reta com extremidades no ponto $P(5,0)$ e no centro da circunferência $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ intersecta a circunferência no ponto Q. A distância de P até Q mede

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

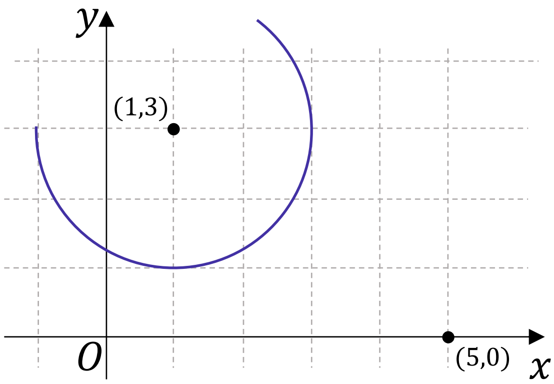
E) 5.

Comentários:

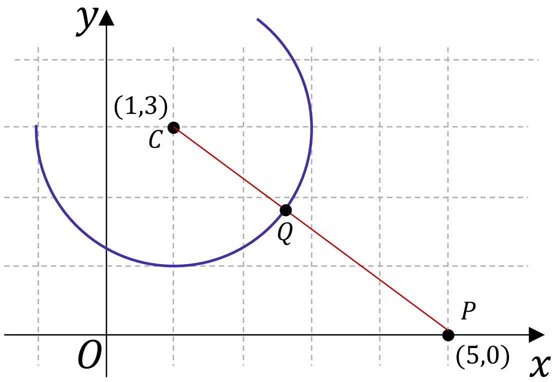
Lembre-se da equação de uma circunferência.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

A expressão acima representa uma circunferência de **centro em (x_0, y_0) e raio R**. Portanto, a circunferência do enunciado está centrada em $(1,3)$ e tem raio $R = 2$. Vamos desenhá-la.



O enunciado fala de um **segmento de reta com extremidades no centro da circunferência e no ponto (5,0)**.



Observe que a distância de Q até P é a distância entre o centro da circunferência C e o ponto P **menos** o raio da circunferência.

$$d(P,Q) = d(P,C) - R$$

Podemos calcular a distância entre os pontos P e C da seguinte forma:

$$d(P,C) = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} \quad \rightarrow \quad d(P,C) = \sqrt{(5-1)^2 + (0-3)^2}$$

$$d(P,C) = \sqrt{4^2 + 3^2} \quad \rightarrow \quad d(P,C) = \sqrt{25} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{d(P,C) = 5}$$

Como já sabemos que **o raio da circunferência é 2**, temos que:

$$d(Q,P) = 5 - 2 \quad \rightarrow \quad d(Q,P) = 3$$

Gabarito: LETRA C.

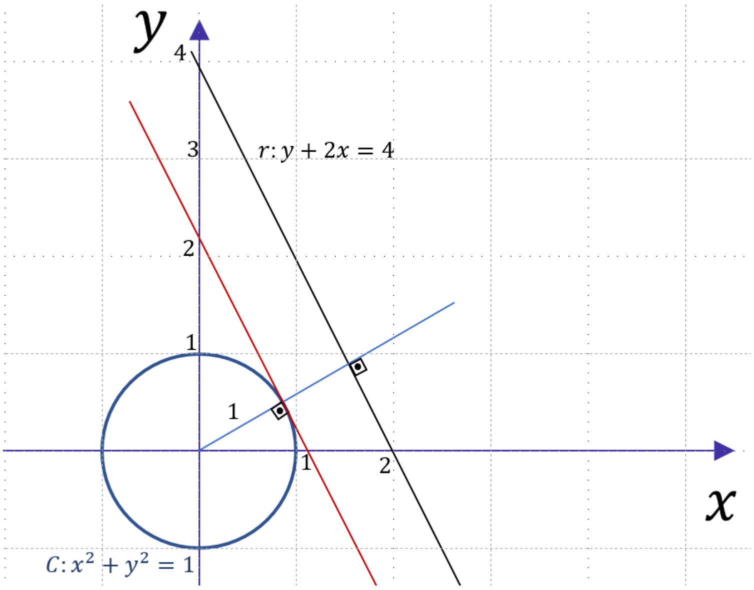
CEBRASPE

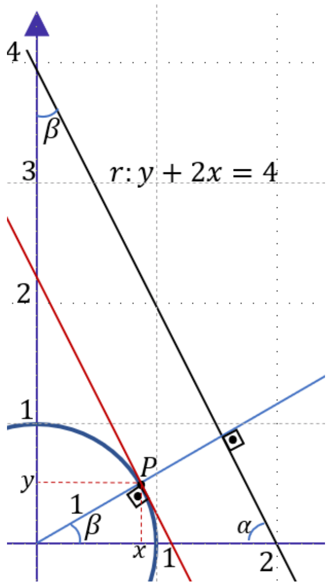
4. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item seguinte, referente a geometria analítica, geometria plana e geometria espacial.

Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, o ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ que está mais próximo da reta $y + 2x = 4$ é o ponto $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Comentários:

Um bom jeito de começar essa questão seria desenhar a circunferência e a reta no plano cartesiano.





Observe que $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$ **é uma circunferência centrada na origem e de raio 1**. Além disso, a reta $y + 2x = 4$ toca os eixos coordenados em $(2{,}0)$ e $(4{,}0)$. Queremos o ponto da circunferência que está mais próximo da reta. Basicamente, queremos o ponto de intersecção entre a reta vermelha e a circunferência.

Note que a reta preta e a reta vermelha são paralelas e, portanto, **possuem o mesmo coeficiente angular**. Vamos dar um zoom na nossa figura para um estudo mais minucioso.

Veja que, com um pouco de geometria plana, conseguimos desenhar alguns ângulos de modo as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ é tal que:

$$\tan\beta = \frac{y}{x} \qquad (1)$$

Do triângulo maior, formado pela reta r e os eixos coordenados, tiramos que:

$$\tan\beta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Igualando as duas expressões, temos:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2y \qquad (3)$$

Como o ponto também está sobre a circunferência, é coerente dizer que ele obedece a equação:

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (4)$$

Substituindo (3) em (4):

$$(2y)^2 + y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 4y^2 + y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 5y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{1}{5}$$

Como $y > 0$, consideraremos apenas o valor positivo.

$$y = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Se $x = 2y$, então

$$x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Logo, o ponto mais próximo da reta r e que pertence a circunferência é $P = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Gabarito: ERRADO.

5. (CESPE/IFF/2018) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, as retas $3x - 4y + 9 = 0$ e $3x - 4y - 11 = 0$ são tangentes a uma mesma circunferência. Nessa situação, o raio dessa circunferência é igual a

a) 1.

b) 2.

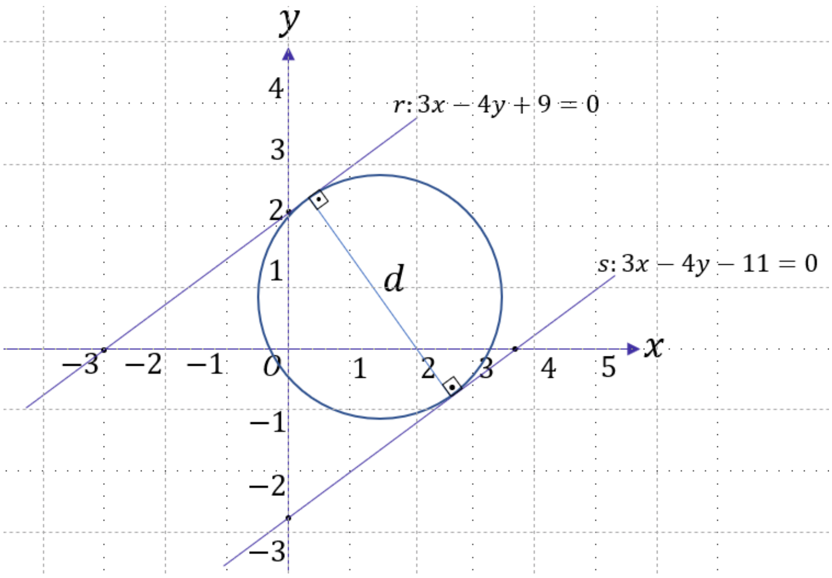
c) 4.

d) 5.

e) 10.

Comentários:

O melhor jeito de resolver esse exercício é desenhando tudo no plano cartesiano.



Para chegar nele, você deve primeiro notar que **as duas retas fornecidas são paralelas entre si**. Isso ocorre, pois as duas possuem o mesmo coeficiente angular $m = 3/4$. O jeito mais simples de encontrá-lo, é isolar o y na equação da reta e olhar para o número que está multiplicando o x.

Para a reta r:

$$3x - 4y + 9 = 0$$
$$4y = 3x + 9$$
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

Para a reta s:

$$3x - 4y - 11 = 0$$
$$4y = 3x - 11$$
$$y = \frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$$

Note que, nas duas, de fato, $m = 3/4$. Logo, as retas são paralelas. **Se uma circunferência é tangente às duas retas, então a corda d destacada no desenhado é exatamente o diâmetro da circunferência**. Veja que é exatamente a distância entre as duas retas paralelas. Da teoria, vimos que a fórmula que calcula a distância entre duas retas paralelas é:

$$d_{r,s} = \frac{|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}'|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}}$$

Para aplicá-la, nós consideramos as equações da reta na forma $ax + bx + c = 0$ e $ax + bx + c' = 0$.

$$d_{r,s} = \frac{|9-(-11)|}{\sqrt{3^2+4^2}} \quad \rightarrow \quad d_{r,s} = \frac{|9+11|}{\sqrt{9+16}} \quad \rightarrow \quad d_{r,s} = \frac{|20|}{\sqrt{25}} \quad \rightarrow \quad d_{r,s} = \frac{20}{5} \quad \rightarrow \quad d_{r,s} = 4$$

Como sabemos que a distância entre as retas será o diâmetro do círculo tangente às duas e sabendo que o diâmetro é o dobro do raio, chegamos a:

$$R = \frac{d}{2} \quad \rightarrow \quad R = \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad R = 2$$

Gabarito: LETRA B.

6. (CESPE/CPRM/2013) Considerando que, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, os pontos de coordenadas (x, y) que satisfazem à equação $2x^2 - 12x + 2y^2 + 4y + 2 = 0$ estão sobre uma circunferência, é correto afirmar que

O raio da circunferência é igual a 3.

Comentários:

A equação da circunferência do enunciado é $2x^2 - 12x + 2y^2 + 4y + 2 = 0$. Note que ela não está naquela forma normal que trabalhamos na teoria e que **é fácil identificar quem é o raio e o centro**. Para ajeitá-la, precisamos completar quadrados. O primeiro passo é perceber que podemos dividir toda a equação por 2.

$$2x^2 - 12x + 2y^2 + 4y + 2 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + 1 = 0$$

Para completar quadrados, você deve lembrar que $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Observe que já temos algo assim na expressão $x^2 - 6x + (y^2 + 2y + 1) = 0$. Ficamos com:

$$x^2 - 6x + (y+1)^2 = 0$$

A parte relativa ao y já está ok, falta completarmos o x. Note que $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$. Portanto, está faltando apenas um 9 na expressão acima para conseguir completar o quadrado. Vamos somar 9 dos dois lados da equação:

$$x^2 - 6x + \mathbf{9} + (y+1)^2 = \mathbf{9}$$

Quando somamos um mesmo valor dos dois lados da equação, **não mudamos o resultado da expressão**. Agora, transformando em um quadrado:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$$

Agora temos uma equação em que conseguimos identificar o centro e o raio. Sabemos que o número que fica à direita, isolado, é o raio ao quadrado. Logo,

$$R^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad R = 3$$

Gabarito: CERTO.

CESGRANRIO

7. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Considere uma reta r, de equação $x + y = k$, sendo k uma constante real, e uma circunferência λ, de equação $x^2 + y^2 = 4$, ambas representadas em um mesmo sistema de coordenadas retangulares. O menor valor real do parâmetro k, que faz a reta r intersectar a circunferência λ em apenas um ponto, é igual a

A) $-2\sqrt{2}$
B) $-2\sqrt{3}$
C) $-\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{3}$
E) $4\sqrt{2}$

Comentários:

Temos a reta:

$$x + y = k \quad (1)$$

E a circunferência:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (2)$$

Para determinar as intersecções entre a reta e a circunferência, **devemos isolar o "x" ou o "y"** na equação da reta e **substituir na equação da circunferência**. Isolando o "y" de (1):

$$y = k - x \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2):

$$x^2 + (k - x)^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 + k^2 - 2kx + x^2 = 4$$

Quando organizamos,

$$2x^2 - 2kx + (k^2 - 4) = 0$$

Note que é uma **equação do segundo grau** em que temos:

$$\mathrm{a} = 2, \mathrm{b} = -2\mathrm{k} \text{ e } \mathrm{c} = \mathrm{k}^2 - 4$$

Como queremos que **a reta toque a circunferência em apenas um único ponto**, a equação acima deve ter uma única solução real, isto é, seu **discriminante é nulo**! Sendo assim,

$$\Delta = 0$$

Com isso,

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \rightarrow \quad (-2k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 4) = 0$$

$$4k^2 - 8k^2 + 32 = 0 \quad \rightarrow \quad -4k^2 + 32 = 0 \quad \rightarrow \quad k^2 = 8$$

$$k = \pm 2\sqrt{2}$$

Como estamos procurando **o menor valor de k**, temos que $\boldsymbol{k = -2\sqrt{2}}$.

Gabarito: LETRA A.

8. (CESGRANRIO/FINEP/2011) Uma circunferência corta os eixos do sistema cartesiano nos quatro pontos distintos $(-2,0)$, $(6,0)$, $(0,-3)$ e $(0,p)$. A ordenada p é igual a

A) $\sqrt{65}/2$
B) $1/2$
C) 1
D) 2
E) 4

Comentários:

Pessoal, a questão nos deu **quatro pontos que pertencem a uma circunferência**. Sabemos que,

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Em que $(\boldsymbol{x_c}, \boldsymbol{y_c})$ **são as coordenadas** do centro e **R é o raio da circunferência**.

Como os quatro pontos estão na mesma circunferência, podemos **substituir suas coordenadas** na equação acima! Vamos lá?

Começando com o ponto $(-2,0)$:

$$(-2 - x_c)^2 + (0 - y_c)^2 = R^2$$

$$(x_c + 2)^2 + y_c^2 = R^2 \qquad (1)$$

Agora, vamos usar o ponto $(6{,}0)$:

$$(6 - x_c)^2 + (0 - y_c)^2 = R^2$$

$$(x_c - 6)^2 + y_c^2 = R^2 \qquad (2)$$

Por fim, usando o ponto $(0, -3)$:

$$(0 - x_c)^2 + (-3 - y_c)^2 = R^2$$

$$x_c^2 + (y_c + 3)^2 = R^2 \qquad (3)$$

Note que temos **três incógnitas e três equações**, vamos tentar resolver esse sistema

Primeiramente, vamos subtrair (2) de (1) **membro a membro**.

$$(x_c + 2)^2 + y_c^2 - (x_c - 6)^2 - y_c^2 = R^2 - R^2$$

Fazendo alguns cortes,

$$(x_c + 2)^2 = (x_c - 6)^2$$

Tirando **a raiz quadrada dos dois lados**,

$$x_c + 2 = \pm(x_c - 6)$$

Aparentemente, temos duas possibilidades. No entanto, perceba que quando usamos o "+", acaba resultando em $2 = -6$, **o que é um absurdo**. Sendo assim,

$$x_c + 2 = -x_c + 6 \quad \rightarrow \quad 2x_c = 4 \quad \rightarrow \quad x_c = 2$$

Show! Encontramos a abscissa do centro da circunferência. Para encontrarmos a ordenada, vamos substituir x_c em (2) e em (3).

$$(2 - 6)^2 + y_c^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad 16 + y_c^2 = R^2 \qquad (2)$$

$$x_c^2 + (y_c + 3)^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad 4 + (y_c + 3)^2 = R^2 \quad (3)$$

Note que **(2) e (3) são expressões para R^2**. Dessa forma, **podemos igualá-las**.

$$16 + y_c^2 = 4 + (y_C + 3)^2$$

Desenvolvendo o quadrado,

$$16 + y_c^2 = 4 + y_c^2 + 6y_c + 9 \quad \rightarrow \quad 6y_c = 3 \quad \rightarrow \quad y_c = \frac{1}{2}$$

Show! Estamos quase com tudo pronto. Falta apenas determinarmos o raio. Para isso, basta substituirmos x_C e y_c em qualquer uma das equações (1), (2) ou (3). Vamos usar a (1).

$$(2+2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad 16 + \frac{1}{4} = R^2 \quad \rightarrow \quad R^2 = \frac{65}{4}$$

Pronto! Com isso **já conseguimos escrever a equação da circunferência**!

$$(x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$$

Essa aí é a danada!! Agora, como sabemos que $(\mathbf{0}, \boldsymbol{p})$ **está na nessa equação** podemos usar esse ponto na equação acima e **determinar o valor de p**.

$$(0-2)^2 + \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4} \quad \rightarrow \quad \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4} - 4 = \frac{65-16}{4} = \frac{49}{4}$$

Assim,

$$\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \quad \rightarrow \quad p - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \quad \rightarrow \quad p = \frac{8}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p = 4}$$

Gabarito: LETRA E.

9. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) A reta de equação $3x - 4y - 12 = 0$ determina sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 16$ uma corda que tem A e B como extremidades. A equação da reta que passa pelo centro da circunferência dada e divide a corda AB ao meio é

A) $y = -3x$

B) $3x - 4y = 0$

C) $3x + 4y = 0$

D) $4x - 3y = 0$

E) $4x + 3y = 0$

Comentários:

Temos uma reta e uma circunferência, vamos escrever as equações abaixo:

$$3x - 4y - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad 4y = 3x - 12 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3x}{4} - 3$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

O nosso primeiro passo será **determinar os pontos A e B**. Para isso, vamos usar a equação da reta na equação de circunferência.

$$x^2 + \left(\frac{3x}{4} - 3\right)^2 = 16$$

$$x^2 + \frac{9x^2}{16} - \frac{18x}{4} + 9 = 16 \quad \rightarrow \quad \frac{25x^2}{16} - \frac{18x}{4} - 7 = 0$$

Vamos **multiplicar tudo por 16**, para sumir com os denominadores.

$$25x^2 - 72x - 112 = 0$$

Temos uma equação de segundo grau. Para resolvê-la, vamos usar **Bhaskara**.

- **Cálculo do discriminante**

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-72)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-112) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 5184 + 11200 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 16384$$

- **Cálculo das raízes**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-(-72) \pm \sqrt{16384}}{2 \cdot 25} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{72 \pm 128}{50} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 \quad e \quad x_2 = -\frac{28}{25}$$

Beleza, t**emos as abscissas dos dois pontos, A e B**. Para determinar as ordenadas, vamos substituir esses valores de "x" na equação da reta!

1) Para $x = 4$:

$$y = \frac{3x}{4} - 3 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3 \cdot 4}{4} - 3 \quad \rightarrow \quad y = 0$$

1) Para $x = -\frac{28}{25}$:

$$y = \frac{3x}{4} - 3 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{28}{25}\right) - 3 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{21}{25} - 3 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{96}{25}$$

Ok! Com isso, podemos concluir que os pontos os pontos A e B são:

$$(4, 0) \quad e \quad \left(-\frac{28}{25}, -\frac{96}{25}\right)$$

Agora, vamos **determinar a equação da reta que contém esses dois pontos**.

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad m_{AB} = \frac{\left(-\frac{96}{25} - 0\right)}{\left(-\frac{28}{25} - 4\right)} \quad \rightarrow \quad m_{AB} = \frac{-96}{-128} \quad \rightarrow \quad m_{AB} = \frac{3}{4}$$

Galera, esse coeficiente angular que encontramos é **o coeficiente angular da reta que contém a corda AB**. Como estamos procurando uma reta que corta essa corda ao meio, então e**ssa reta deve ser perpendicular a reta que contém a corda**, de forma que seu coeficiente angular vai obedecer:

$$m_{AB} \cdot m = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{4} \cdot m = -1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m = -\frac{4}{3}}$$

Pronto! Esse é o coeficiente da reta que corta a corda AB ao meio. Quando olhamos para as alternativas, **a única reta que possui esse coeficiente angular é a destacada na letra E**, nosso gabarito.

Gabarito: LETRA E.

Outras Bancas

10. (AOCP/SED-MS/2022) O raio da circunferência de centro em (8, 4) e que tangencia exteriormente a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ é, em unidades de comprimento, igual a

A) 8.

B) 6.

C) 4.

D) $\sqrt{6}$.

E) $2\sqrt{3}$.

Comentários:

Primeiramente, temos que **descobrir o centro e o raio** da circunferência de equação:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0}$$

Para isso, devemos completar quadrados. Acompanhe!

1) Organizar a expressão

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 8y) = 16$$

2) Somar 4 e 16 em cada um dos lados

$$(x^2 - 4x + \mathbf{4}) + (y^2 + 8y + \mathbf{16}) = 16 + \mathbf{4} + \mathbf{16}$$

3) Escrever os quadrados

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

Portanto, **a circunferência está centrada em (2, -4) e tem raio igual a 6**.

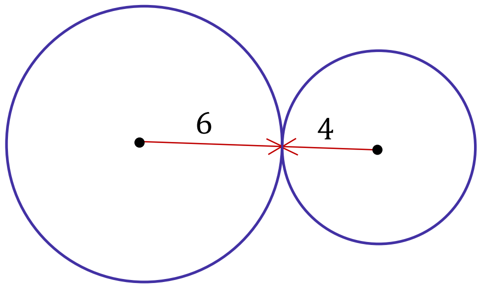
Agora, vamos calcular a distância entre os centros dessas circunferências: $(2, -4)$ e $(8, 4)$.

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(2 - 8)^2 + (4 - (-4)\ )^2}$$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} \quad \rightarrow \quad d(C_1, C_2) = \sqrt{100} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{d(C_1, C_2) = 10}}$$

Observe, portanto, que **a distância entre os centros é 10**. Como uma das circunferências tem raio igual a 6, para que a outra circunferência tangencie externamente, **ela deve ter raio igual a 4**. Vou esquematizar a situação para facilitar o entendimento!



Observe que para as duas circunferências se tangenciarem externamente, **a soma dos dois raios deve ser exatamente a distância entre os centros**.

Gabarito: LETRA C.

11. (DECEx/EsPCEx/2021) A circunferência que tem seu centro no ponto $(1, -1)$ e é tangente à reta de equação $y = \left(\frac{3}{4}\right) x + 2$ tem equação dada por

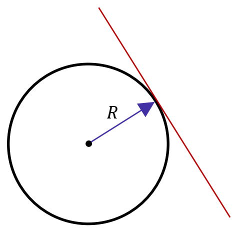
A) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$.

B) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$.

C) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 7 = 0.$
D) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 7 = 0.$
E) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0.$

Comentários:

Se a reta é tangente a circunferência, então **a distância do centro até essa reta deve ser igual ao raio**! Observe o desenho abaixo:



Sendo assim, vimos na teoria que **a distância de um ponto (x_o, y_o) até uma reta $ax + by + c = 0$** é dada pela seguinte expressão:

$$d(P, r) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Queremos a distância entre o ponto $(1, -1)$ e a reta $3x - 4y + 8 = 0$. Logo:

$$d(P, r) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \quad \rightarrow \quad d(P, r) = \frac{|3 + 4 + 8|}{\sqrt{25}} \quad \rightarrow \quad d(P, r) = \frac{15}{5}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(P, r) = 3}}$$

Pronto! Encontramos a distância do centro da circunferência até a reta tangente. **Essa distância coincide com o raio**. Portanto, se temos o raio R e o centro (x_o, y_o) podemos escrever a equação da circunferência.

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$

O raio é 3 e o centro é (1, -1). Assim,

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

Olhando as alternativas, vemos que a equação está na sua **forma desenvolvida**.

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 9$$

Reorganizando:

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0}}$$

Gabarito: LETRA A.

12. (LEGALLE/PREF. SÃO MARCOS/2021) O centro de uma circunferência é dado pelo ponto médio do segmento AB, sendo A(4, 2) e B(8, 4). Considerando que o raio dessa circunferência é 2, a equação que define essa circunferência é:

A) $(x-6)^2+(y+4)^2=4$.
B) $(x-3)^2+(y+8)^2=4$.
C) $(x-6)^2+(y-3)^2=4$.
D) $(x+7)^2+(y+4)^2=4$.

Comentários:

Sabemos que as coordenadas do ponto médio M de um segmento com extremidades em A e em B podem ser encontradas por meio da expressão:

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Usando os pontos $A(4{,}2)$ e $B(8{,}4)$, encontramos:

$$M=\left(\frac{4+8}{2},\frac{2+4}{2}\right)\qquad\rightarrow\qquad\boxed{\boldsymbol{M=(6,3)}}$$

O enunciado falou que esse **ponto médio é o centro de uma circunferência de raio igual a 2**. Ora, se temos o centro e o raio, podemos encontrar a equação da circunferência!

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2$$

Substituindo!

$$(x-6)^2+(y-3)^2=2^2\qquad\rightarrow\qquad\boxed{\boldsymbol{(x-6)^2+(y-3)^2=4}}$$

A alternativa que trouxe corretamente a equação da circunferência foi a C.

Gabarito: LETRA C.

13. (AOCP/SED-MS/2022) O raio da circunferência de centro em (8, 4) e que tangencia exteriormente a circunferência de equação $\boldsymbol{x^2+y^2-4x+8y-16=0}$ é, em unidades de comprimento, igual a

A) 8.
B) 6.
C) 4.

D) $\sqrt{6}$
E) $2\sqrt{3}$

Comentários:
O melhor jeito de visualizar o problema é desenhá-lo! Para isso, vamos colocar a equação de circunferência dada no enunciado de uma forma mais "apresentável".

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0}$$

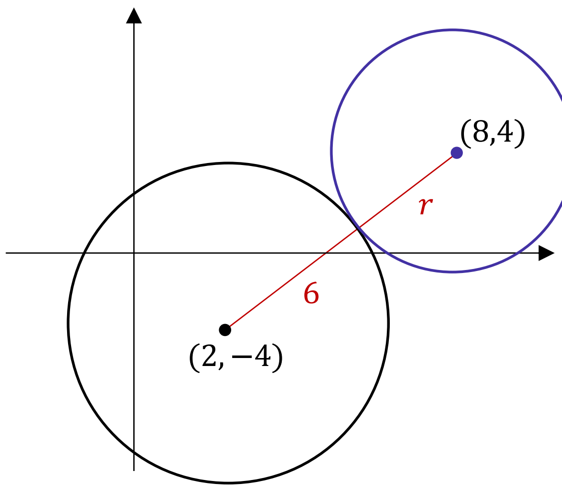
$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 8y) = 16$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 16 + 4 + 16$$

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

Perceba que a circunferência representada nessa equação **está centrada em $(2, -4)$ e tem raio igual a 6**.

Vamos desenhá-la.



Perceba que para que as duas circunferências sejam tangentes externas, **a soma de seus raios deve ser igual a distância entre seus centros**. Assim:

$$6 + r = \sqrt{(2 - 8)^2 + (-4 - 4)^2}$$

$$6 + r = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$6 + r = \sqrt{100}$$

$$6 + r = 10$$

$$\boxed{r = 4}$$

Gabarito: LETRA C.

14. (FUNDATEC/PREF. ESTEIO/2022) Analise três circunferências de equações dadas por:

C1: $(x-2)^2+(y-1)^2=2$
C2: $(x+1)^2+(y-5)^2=4$
C3: $(x\ +\ 3)^2+y^2=9$

Se forem ligados os centros dessas circunferências por segmentos de reta, será formado um triângulo de área:
A) 9.
B) 10.
C) 11,5.
D) 16.
E) 23.

Comentários:
Inicialmente, vamos identificar cada um dos centros.

C1: $(x-2)^2+(y-1)^2=2$
$\mathbf{Centro = (2, 1)}$

C2: $(x+1)^2+(y-5)^2=4$
$\mathbf{Centro = (-1, 5)}$

C3: $(x\ +\ 3)^2+y^2=9$
$\mathbf{Centro = (-3, 0)}$

Com os centros, podemos calcular a área do triângulo formado por eles:

$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$A = \frac{1}{2}|10 - 3 + 15 + 1|$$

$$A = \frac{1}{2}|23|$$

$$\boxed{A = 11,5}$$

Gabarito: LETRA C.

15. (FUNDATEC/SBC/2022) Considere a equação do círculo $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. A partir dessa equação, determine o raio do círculo.

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

Comentários:

Vamos **completar quadrados** para encontrar o raio dessa circunferência.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = -1$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = -1 + 1 + 4$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

Com isso, temos que:

$$R^2 = 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{R = 2}$$

Gabarito: LETRA B.

16. (Inst. CONSULPLAN/SEED-PR/2021) As circunferências α: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ e β: $x^2 + y^2 = 1$ possuem quantos pontos em comum?

A) 0

B) 1

C) 2

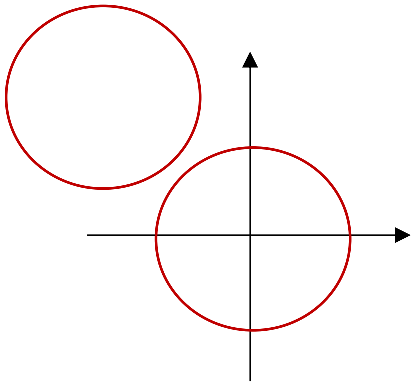
D) 3

Comentários:

Um bom jeito de avaliar isso é calcular a distância entre os centros dessas circunferências. Observe que a circunferência $\boldsymbol{\alpha}$ **tem centro em** $(\mathbf{-2,2})$, enquanto a circunferência $\boldsymbol{\beta}$ **tem em** $(\mathbf{0,0})$. Com isso:

$$d(C_\alpha, C_\beta) = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \qquad \rightarrow \qquad d(C_\alpha, C_\beta) = 2\sqrt{2}$$

Por sua vez, note que cada uma das circunferências possui raio 1. A soma dos raios é 2. Como $d(C_\alpha, C_\beta) > r_\alpha + r_\beta$, então as circunferências não se tocam! Logo, **não possuem pontos em comum**. A situação do enunciado é a seguinte:



Gabarito: LETRA A.

17. (Inst. AOCP/PREF. BETIM/2020) Um possível valor de $\boldsymbol{k}$ para que a reta $\boldsymbol{t}$: $\boldsymbol{x - y + k = 0}$ seja tangente à circunferência $\boldsymbol{\lambda}$: $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0}$ é

A) 4.
B) 2.
C) 1.
D) – 2.
E) – 4.

Comentários:

Para que a reta t seja tangente a λ, precisamos que elas possuam um ponto em comum. Sendo assim, vamos usar a equação da reta na equação da circunferência e analisar o que encontramos!

$$y = x + k \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \qquad (2)$$

Usando (1) em (2):

$$x^2 + (x + k)^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2xk + k^2 - 4x + 2 = 0$$

$$2x^2 + (2k - 4)x + (k^2 + 2) = 0$$

Vamos calcular o discriminante dessa equação de segundo grau.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (2k - 4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 + 2)$$

$$\Delta = 4k^2 - 16k + 16 - 8k^2 - 16$$

$$\Delta = -4k^2 - 16k$$

Para que a reta seja tangente**, o discriminante dessa equação deve ser igual a zero**. Logo:

$$-4k^2 - 16k = 0$$

$$k^2 + 4k = 0$$

$$k(k + 4) = 0$$

Ou seja, temos **dois valores possíveis** para k:

$$\boxed{k = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{k = -4}$$

A questão pede um possível valor. Com isso, podemos marcar a alternativa E.

Gabarito: LETRA E.

18. (CONSULPLAN/CM-BH/2018) Seja O o centro de um círculo de raio R e seja d a distância de O até a reta r. Se $d < R$, a reta é

A) secante ao círculo.

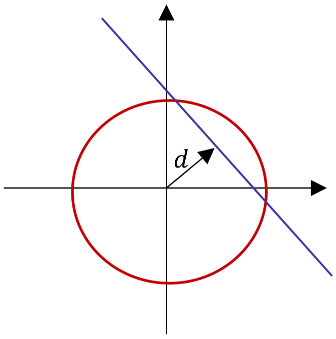
B) exterior ao círculo.

C) tangente ao círculo.

D) interior ao círculo passando pelo centro do mesmo.

Comentários:

Ora, se **a distância é tal que $d < R$**, então temos a seguinte situação:



Quando a reta cruza a circunferência em **dois pontos distintos**, temos uma **reta secante**.

Gabarito: LETRA A.

19. (IDECAN/CBM-DF/2017) O ponto (1, 4) pertence à circunferência de centro (2, –1). O valor numérico do raio dessa circunferência é:

A) $\sqrt{22}$

B) $\sqrt{23}$

C) $\sqrt{26}$

D) $\sqrt{29}$

Comentários:

Para o cálculo do raio, basta calcularmos **a distância entre o ponto da circunferência e o seu centro**.

$$d = \sqrt{\left(x_p - x_o\right)^2 + \left(y_p - y_o\right)^2}$$

$$d = \sqrt{(1-2)^2 + \left(4-(-1)\right)^2}$$

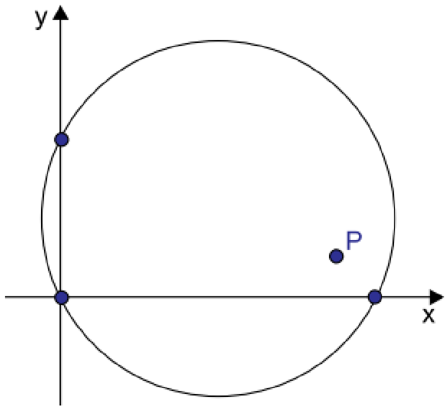
$$d = \sqrt{(-1)^2 + 5^2}$$

$$\boxed{d = \sqrt{26}}$$

Gabarito: LETRA C.

Vunesp

20. (VUNESP/PM-SP/2023) No plano cartesiano, uma circunferência intersecta os eixos coordenados nos pontos de coordenadas (0, 0), (0, 4) e (8, 0), conforme mostra a figura, que também exibe o ponto P(7, 1).



A equação da reta que passa pelo centro da circunferência e por P é

A) x + y – 8 = 0

B) x + 2y – 8 = 0

C) x + 3y – 10 = 0

D) x + 4y – 10 = 0

E) x + 5y – 12 = 0

Comentários:

Seja $C = (x_C, y_C)$ o centro da circunferência.

Como **(0,0) é ponto da circunferência**, podemos escrever:

$$(x_C - 0)^2 + (y_C - 0)^2 = R^2$$

$$x_C^2 + y_C^2 = R^2 \qquad (1)$$

Como **(0,4) é ponto da circunferência**, podemos escrever:

$$(x_C - 0)^2 + (y_C - 4)^2 = R^2$$

$$x_C^2 + (y_C - 4)^2 = R^2 \qquad (2)$$

Como **(8,0) é ponto da circunferência**, podemos escrever:

$$(x_C - 8)^2 + (y_C - 0)^2 = R^2$$

$$(x_C - 8)^2 + y_C^2 = R^2 \qquad (3)$$

Vamos tentar **resolver esse sistema formado por essas três equações.**

Igualando (2) e (3):

$$(x_C-8)^2+y_C^2=x_C^2+(y_C-4)^2$$

$$(x_C^2-16x_C+64)+y_C^2=x_C^2+(y_C^2-8y_C+16)$$

$$-16x_C+64=-8y_C+16$$

$$2x_C-8=y_C-2$$

$$y_C=2x_C-6 \qquad (4)$$

Dessa vez, vamos igualar (1) e (3):

$$x_C^2+y_C^2=(x_C-8)^2+y_C^2$$

$$x_C^2=x_C^2-16x_C+64$$

$$x_C=\frac{64}{16}$$

$$x_C=4$$

Com o valor de x_C, podemos aplicá-lo em (4):

$$y_C=2\cdot 4-6$$

$$y_c=2$$

Opa! Temos nosso centro:

$$C=(4,2)$$

A questão pede **a equação da reta que passa por P e C**:

Primeiro, encontramos um coeficiente angular:

$$m_{PC}=\frac{y_P-y_C}{x_P-x_C}$$

$$m_{PC}=\frac{1-2}{7-4}$$

$$m_{PC} = -\frac{1}{3}$$

Agora, podemos encontrar a equação da reta:

$$y - 1 = m_{PC}(x - x_P)$$

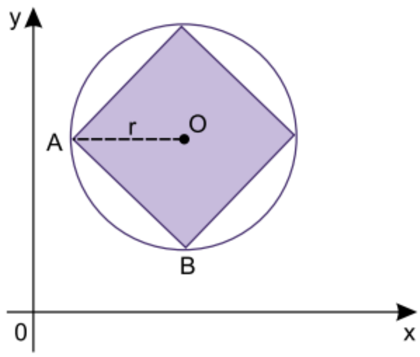
$$y - 1 = \left(-\frac{1}{3}\right)(x - 7)$$

$$3y - 3 = -x + 7$$

$$\boxed{\boldsymbol{x + 3y - 10 = 0}}$$

Gabarito: LETRA C.

21. (VUNESP/PM-SP/2016) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a circunferência de centro O e raio r é definida pela equação: $(\boldsymbol{x-4})^2 + (\boldsymbol{y-5})^2 = \boldsymbol{9}$.



Sendo AB o lado de um quadrado inscrito nessa circunferência, é correto afirmar que o perímetro desse quadrado mede

A) $16\sqrt{2}$

B) $14\sqrt{2}$

C) $12\sqrt{2}$

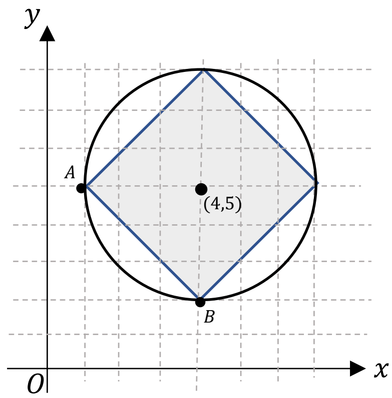
D) $8\sqrt{2}$

E) $6\sqrt{2}$

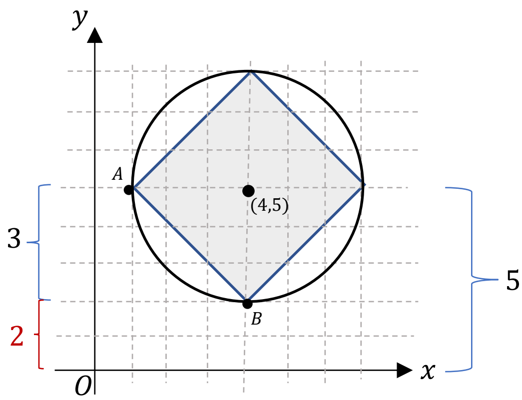
Comentários:

Observe que, por meio da equação da circunferência, podemos tirar que **seu centro está em $(4, 5)$** e **o raio é 3**. Para isso, basta compararmos com a equação que vimos na teoria $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Em que (x_0, y_0) **são as coordenadas do centro** e **R é o raio da circunferência**. Dito isso, vamos desenhar essa circunferência no plano cartesiano.



Devemos perceber que **B está na mesma abcissa que o centro da circunferência**. Com isso, $B = (4, y_b)$. Para determinarmos a ordenada de B, devemos perceber que ele e**stá distante exatamente a medida de um raio para baixo**. Logo, se o ordenada do centro é 5, B estará em $5 - 3 = 2$. Visualize melhor.



Por sua vez, perceba que **A possui a mesma ordenada que o centro, isto é, 5.** Assim, $A = (x_A, 5)$. Para determinar a abscissa de A, note que o ponto está distante exatamente a medida de **um raio para a esquerda**. Assim, podemos concluir que $x_A = 4 - 3 = 1$. Com os dois pontos determinados $\boldsymbol{A(1,5)}$ **e** $\boldsymbol{B(4,2)}$, a distância entre eles é exatamente o lado do quadrado.

$$d(A,B) = \sqrt{(4-1)^2 + (2-5)^2} \quad \rightarrow \quad d(A,B) = \sqrt{3^2 + 3^2} \quad \rightarrow \quad d(A,B) = 3\sqrt{2}$$

O **perímetro** é a soma de todos os quatro lados do quadrado. Como os lados são iguais, podemos fazer:

$$perímetro = 4 \cdot 3\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{perímetro = 12\sqrt{2}}$$

Gabarito: LETRA C.

22. (VUNESP/PM-SP/2012) Sabe-se que o ponto C pertence à reta de equação $3x + y - 4 = 0$ e, também, à reta de equação $x + 2y = 3$. Nesse caso, é correto afirmar que o comprimento da circunferência de centro C, que tangencia o eixo x, é igual a

A) $\sqrt{3}\pi/2$.

B) $\pi/2$.

C) π.
D) 2π.
E) 3π.

Comentários:
Temos duas retas:

$$3x + y = 4 \qquad (1) \qquad\qquad x + 2y = 3 \qquad (2)$$

Como **o ponto $\boldsymbol{C(x_0, y_0)}$ pertence as duas retas**, podemos fazer:

$$3x_0 + y_0 = 4 \qquad (3)$$

$$x_0 + 2y_0 = 3 \qquad (4)$$

Vamos isolar x_0 em (4),

$$x_0 = 3 - 2y_0 \qquad (5)$$

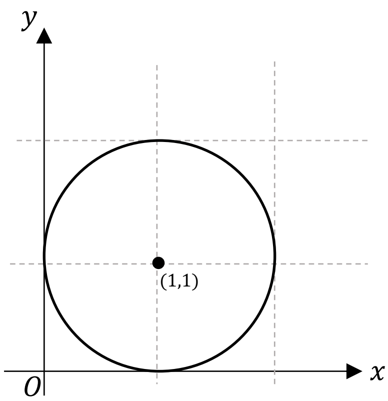
Substituindo (5) em (3),

$$3 \cdot (3 - 2y_0) + y_0 = 4 \quad \rightarrow \quad 9 - 6y_0 + y_0 = 4 \quad \rightarrow \quad 5y_0 = 5 \quad \rightarrow \quad y_0 = 1$$

Com o valor de y_0, podemos usá-lo em (5) para determinar x_0.

$$x_0 = 3 - 2 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad x_0 = 1$$

Logo, **o centro da circunferência será $\boldsymbol{(1, 1)}$**. Como ela **tangencia o eixo $\boldsymbol{Ox}$**, temos:



Observe que para uma circunferência centrada em (1, 1) tangencie o eixo Ox, **ela deve ter raio igual a 1**. Com isso, podemos encontrar o comprimento dessa circunferência assim:

$$C = 2\pi R \quad \rightarrow \quad C = 2\pi \cdot 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{C = 2\pi}$$

Gabarito: LETRA D.

QUESTÕES COMENTADAS

Cônicas

FGV

1. (FGV/ALE-RO/2018) A distância focal da elipse $x^2 + 5y^2 = 100$ é

A) $12\sqrt{2}$

B) $8\sqrt{3}$

C) $12\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{5}$

E) $8\sqrt{5}$

Comentários:

Vamos comparar a equação que vimos na teoria com a dada na questão.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$x^2+5y^2=100$$

Observe que para compatibilizarmos as duas equações, devemos **dividir os dois lados da segunda por 100**.

$$\frac{x^2+5y^2}{100}=\frac{100}{100} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{20}=1$$

Pronto!! Agora sim **temos uma equação num formato que possibilita a comparação**! Note que:

$$a^2=100 \quad e \quad b^2=20$$

Sabemos que a distância focal em **uma <u>elipse</u>** pode ser encontrada por meio da seguinte equação:

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad 100=20+c^2 \quad \rightarrow \quad c^2=80 \quad \rightarrow \quad c=\sqrt{80}$$

$$c=4\sqrt{5}$$

Cuidado nesse ponto, moçada! "c" é a semidistância focal. Sendo assim, precisamos **multiplicar esse valor por 2**, para encontrarmos a distância focal.

$$2c = 8\sqrt{5}$$

Gabarito: LETRA E.

2. (FGV/SEFAZ-MS/2006) Se a parábola $y = ax^2 + bx + c$ contém os pontos $(-1, 12)$, $(0, 5)$ e $(2, -3)$, quanto vale $a + b + c$?

A) 4

B) -2

C) 0

D) 1

E) 2

Comentários:

Pessoal, temos alguns pontos e a equação da parábola. Para determinar cada um dos coeficientes, **precisaremos substituí-los na expressão** e avaliar as equações obtidas. Um bom ponto para começarmos é o ponto $(0, 5)$, isso porque **o "0" vai fazer sumir boa parte da equação**, veja:

$$5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{c = 5}$$

Já determinarmos "c"! rsrs. Agora, vamos pegar um ponto que parece mais "light", tipo o (2, -3) e substituí-lo na expressão também, dessa vez já considerando $c = 5$.

$$-3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 5 \quad \rightarrow \quad 4a + 2b = -8 \quad \rightarrow \quad 2a + b = -4 \quad (1)$$

Vamos guardar essa equação e chamá-la de (1).

Por fim, substituindo o último ponto $(-1, 12)$.

$$12 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 5 \quad \rightarrow \quad a - b = 7 \quad (2)$$

Observe que (1) e (2) forma um **sistema com duas equações e duas incógnitas**. Para resolvê-lo, vamos somar as expressões **membro a membro**.

$$(2a + b) + (a - b) = -4 + 7$$

$$3a = 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = 1}$$

Com o valor de "a", podemos substituí-lo em qualquer uma das duas equações e encontrar "b". Vamos usar a equação (2).

$$1 - b = 7 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b = -6}$$

Pronto! Temos todos os coeficientes e **a questão pede a soma deles**.

$$a + b + c = 1 - 6 + 5 = 0$$

Gabarito: LETRA C.

CEBRASPE

3. (CESPE/PETROBRAS/2022) Acerca de geometria e de geometria analítica, julgue o item subsequente.

A excentricidade da elipse dada pela equação $x^2 - 4x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$ é $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Comentários:
Lembre-se que a excentricidade de uma cônica é dada por:

$$e = \frac{c}{a}$$

Para determinar a semidistância focal "c" e o semieixo maior "a", vamos tentar reescrever a equação do enunciado no seguinte formato:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

Para isso, devemos completar quadrados.

1) Reorganizando a equação:

$$(x^2 - 4x) + 4 \cdot (y^2 - 2y) = -4$$

2) Somando 4 e 4 em ambos os lados:

$$(x^2 - 4x + \mathbf{4}) + 4 \cdot (y^2 - 2y + \mathbf{1}) = -4 + \mathbf{4} + \mathbf{4}$$

3) Identificando os quadrados:

$$(x - 2)^2 + 4 \cdot (y - 1)^2 = 4$$

4) Dividindo os dois lados por 4:

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$$

Pronto! Conseguimos escrever **a equação da <u>elipse</u>** da forma que queríamos. Com ela, tiramos que:

$$a^2=4 \quad \rightarrow \quad \boxed{a=2}$$

$$b^2=1 \quad \rightarrow \quad \boxed{b=1}$$

Vimos que **a semidistância focal "c"** pode ser encontrada por:

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad 4=1+c^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{c=\sqrt{3}}$$

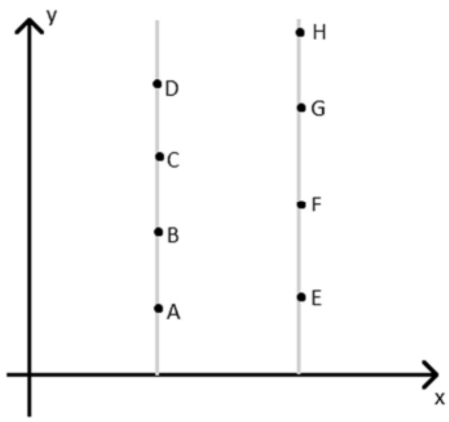
Pronto! Agora precisamos usar os valores de "a" e de "e" na fórmula da excentricidade.

$$e=\frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad \boxed{e=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Foi exatamente o resultado que o item trouxe!

Gabarito: CERTO.

4. (CESPE/PETROBRAS/2022)



No plano cartesiano Oxy da figura precedente, estão marcados 8 pontos distintos no primeiro quadrante, cujas coordenadas são:

$$A=(1,a); \quad B=(1,b); \quad C=(1,c); \quad D=(1,d);$$

$$E=(2,e); \quad F=(2,f); \quad G=(2,g); \quad H=(2,h)$$

A partir dos dados apresentados, julgue o item subsequente.

A parábola que contém os pontos C, B e F possui equação:

$$y = (b - c - f)x^2 + (f^2 - b^2 - c^2)x + 2cb - 2bf - 2cf$$

Comentários:
Observe que a parábola formada pelos pontos C, B e F seria uma parábola "deitada", **pois C e B estão alinhados em uma mesma vertical** e não temos como traçar uma parábola "em pé" que passe pelos dois. Sendo assim, uma equação possível seria na forma:

$$x = Py^2 + Qy + R$$

Caso o argumento acima não tenha convencido você, um outro ponto que pode ser observado é que quando substituímos algum dos pontos na equação, **ela não é satisfeita**. Por exemplo, se a equação dada realmente passasse por C = (1, c), quando substituíssemos $x = 1$, deveríamos obter $y = c$. Verifique se isso ocorre!

Você deve ter percebido que **o valor obtido não tem nada igual a "c".** (rsrs) Sendo assim, **essa parábola não passa por esse ponto** (bem como em nenhum outro, você pode testar).

Gabarito: ERRADO.

CESGRANRIO

5. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) O centro da circunferência λ: $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4$ é o foco de uma parábola cuja diretriz é o eixo Ox do plano cartesiano. A equação dessa parábola é
A) $x^2 - 2x - 4y + 5 = 0$
B) $x^2 - 4x - y + 5 = 0$
C) $x^2 - 4x - 2y + 5 = 0$
D) $x^2 - 2x - 2y + 5 = 0$
E) $x^2 + 2x + 4y + 5 = 0$

Comentários:
Temos a seguinte circunferência:

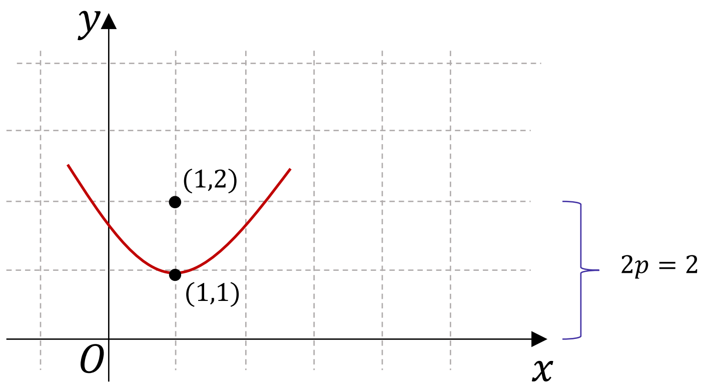
$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4}$$

Vamos **completar quadrados** para encontrar o centro dessa circunferência.

$$(x^2 - 2x + \mathbf{1}) + (y^2 - 4y + \mathbf{4}) = 4 + \mathbf{1} + \mathbf{4}$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=9$$

Note que essa **circunferência está centrada em (1, 2)** e tem raio igual a 3. Como o foco está nesse ponto, podemos desenhar o seguinte:



Observe que como a diretriz é o próprio eixo Ox, **o parâmetro (distância entre o foco e a diretriz) é igual a 2**. Com isso, podemos concluir que **o vértice da parábola está em (1, 1)**. A equação da parábola em função do vértice e do parâmetro é:

$$y-y_v=\left(\frac{1}{2p}\right)(x-x_v)^2$$

Substituindo os valores que encontramos:

$$y-1=\left(\frac{1}{4}\right)(x-1)^2 \quad \rightarrow \quad 4y-4=x^2-2x+1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x^2-2x-4y+5=0}$$

Gabarito: LETRA A.

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Quantos são os pontos de interseção entre a circunferência definida pela equação $(x-3)^2+y^2=25$ e a elipse definida pela equação $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Comentários:

Temos uma circunferência:

$$(x-3)^2+y^2=25 \qquad (1)$$

E uma elipse:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad (2)$$

Para encontrar quantos pontos de intersecção, vamos **isolar y^2 na equação da elipse**.

$$\frac{y^2}{16}=1-\frac{x^2}{4} \quad \rightarrow \quad y^2=16-4x^2 \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1):

$$(x-3)^2+16-4x^2=25$$

Abrindo o quadrado:

$$x^2-6x+9+16-4x^2=25 \quad \rightarrow \quad -3x^2-6x+25=25 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x^2+2x=0}$$

Note que $\boldsymbol{x_1=0}$ **e** $\boldsymbol{x_2=-2}$ são as raízes da equação de segundo grau acima. Podemos substituir essas abscissas em **qualquer uma das equações** para determinar os pontos de intersecção.

- $x=0$

$$(0-3)^2+y^2=25 \quad \rightarrow \quad 9+y^2=25 \quad \rightarrow \quad y=\pm 4$$

- $x=-2$

$$(-2-3)^2+y^2=25 \quad \rightarrow \quad (-5)^2+y^2=25 \quad \rightarrow \quad 25+y^2=25 \quad \rightarrow \quad y=0$$

Assim, temos os seguintes pontos em que a circunferência e a elipse se tocam $\boldsymbol{(0,-4)}$, $\boldsymbol{(0,4)}$ **e** $\boldsymbol{(-2,0)}$**.**

Gabarito: LETRA D.

Outras Bancas

7. (QUADRIX/CRTR 21/2021) Ramanujan, um grande matemático indiano, apresentou uma fórmula para se calcular, aproximadamente, o perímetro p de uma elipse de semieixo maior a e semieixo menor b:

$$\boldsymbol{p \cong \pi\left[3(a+b)-\sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]}$$

Se os comprimentos dos semieixos de uma elipse são as raízes da equação $\boldsymbol{x^2-17x+60=0}$, então, de acordo com a fórmula de Ramanujan, seu perímetro é de, aproximadamente,

A) $3\pi\left(17 - 2\sqrt{30}\right)$.
B) 40π.
C) $\pi\left(51 - \sqrt{122}\right)$.
D) $3\pi\left(17 - \sqrt{123}\right)$.
E) $3\pi\left(17 - 2\sqrt{31}\right)$.

Comentários:
Vamos primeiro resolver a equação de segundo grau e, depois, usar as raízes na fórmula de Ramanujan.

$$x^2 - 17x + 60 = 0$$

- Cálculo do Discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 \quad \rightarrow \quad \Delta = 49$$

- Cálculo das Raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-(-17) \pm \sqrt{49}}{2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{17 \pm 7}{2}$$

$$x' = \frac{17+7}{2} \quad \rightarrow \quad x' = \frac{24}{2} \quad \rightarrow \quad x' = 12$$

$$x'' = \frac{17-7}{2} \quad \rightarrow \quad x'' = \frac{10}{2} \quad \rightarrow \quad x'' = 5$$

Pronto! Temos os **semieixos**.

$$a = 12 \quad e \quad b = 5$$

Agora, podemos aplicar esses valores na **fórmula de Ramanujan**.

$$\boldsymbol{p \cong \pi\left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]}$$

$$p \cong \pi\left[3 \cdot (12+5) - \sqrt{(3 \cdot 12 + 5)(12 + 3 \cdot 5)}\right]$$

$$p \cong \pi\left[3 \cdot 17 - \sqrt{41 \cdot 27}\right] \quad \rightarrow \quad p \cong \pi\left[3 \cdot 17 - \sqrt{9 \cdot 123}\right] \quad \rightarrow \quad p \cong \pi\left[3 \cdot 17 - 3\sqrt{123}\right]$$

Colocando o 3 em evidência.

$$\boxed{p \cong 3\pi\left[17 - \sqrt{123}\right]}$$

Gabarito: LETRA D.

8. (OMNI/PREF. SJB-SC/2021) Ana ao analisar a cônica C: $4x^2 - 9y^2 + 18y - 45 = 0$, percebeu que é um(a):

A) Círculo.

B) Parábola.

C) Elipse.

D) Hipérbole.

Comentários:

Pessoal, vamos completar quadrados e verificar que equação obtemos no final.

$$4x^2 - 9y^2 + 18y - 45 = 0$$

$$4x^2 - (9y^2 - 18y + 9) = 36$$

$$4x^2 - 9(y^2 - 2y + 1) = 36$$

$$4x^2 - 9(y - 1)^2 = 36$$

$$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1}$$

Observe que a equação que obtemos é **a equação de uma hipérbole**, conforme vimos na teoria.

Gabarito: LETRA D.

9. (IBFC/PREF. SGDA/2021) Um analista, tratando de um determinado problema chega à igualdade entre duas quantidades dependentes de x e y, de acordo com a equação:

$$\boldsymbol{x^2 - 4x + 3 = -y^2 + 6y - 6}$$

Ao identificar a expressão acima com uma forma quadrática em termos de x e y, ele conclui que as quantidades x e y que satisfazem a equação constituem uma figura geométrica familiar no plano-xy. Assinale a alternativa que apresenta a figura geométrica formada.

A) Elipse com focos em (2,3) e (-2,3). Há dois valores de x que anulam y

B) Circunferência de raio 4 e centro em (x,y) = (-2,-3). Há dois valores de x que anulam y

C) Parábola com vértice em (x,y) = (2,3) e eixo de simetria vertical. Há dois valores de x que anulam y

D) Circunferência de raio 2 e centro em (x,y) = (2,3). Não há valor real de x que anule y, mas há um valor de y que anula x

Comentários:

Vamos trabalhar com a equação dada no enunciado.

$$\boldsymbol{x^2 - 4x + 3 = -y^2 + 6y - 6}$$

$$(x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) = -6 - 3$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -9 + 4 + 9$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

Observe que se trata de uma equação de **circunferência com centro em $(2, 3)$ e raio igual a 2**.

Gabarito: LETRA D.

10. (IDECAN/PREF. C. GRANDE/2021) Determine a excentricidade (e) da cônica, dada pela equação $4x^2 + 9y^2 = 36$, e assinale a alternativa correta.

A) $e = \sqrt{5}/2$

B) $e = \sqrt{5}/3$

C) $e = \sqrt{5}/4$

D) $e = \sqrt{5}/5$

Comentários:

Temos a **equação de uma elipse**:

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

Vamos dividir tudo por 36.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Com isso, podemos tirar que:

$$a^2 = 9 \quad \rightarrow \quad a = 3$$

$$b^2 = 4 \quad \rightarrow \quad b = 2$$

Com **o semieixo maior (a)** e **o semieixo menor (b)**, podemos encontrar a semidistância focal.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$9 = 4 + c^2$$

$$c = \sqrt{5}$$

Lembre-se que a fórmula da **excentricidade** é dada por:

$$e = \frac{c}{a}$$

Com isso:

$$\boxed{e = \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

Gabarito: LETRA B.

11. (IDECAN/IF-PB/2019) Assinale a alternativa correta com relação a definição de uma parábola.
A) Uma parábola pode ser escrita na forma $y(x) = ax^2 + bx + c$ com a igual a zero.
B) Uma parábola é um conjunto de pontos com distâncias constantes para uma reta.
C) Uma parábola é uma curva cuja distância até o ponto focal é fixa, independente do ponto na curva.
D) Uma parábola pode ser representada pela função $y(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a pertencente aos reais.
E) O conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano.

Comentários:
Vamos comentar cada uma das alternativas.

a) Uma parábola pode ser escrita na forma $y(x)=ax^2+bx+c$ com a igual a zero.
ERRADO. Pessoal, uma parábola pode ser escrita na forma $y(x)=ax^2+bx+c$, mas a não pode ser igual a zero. Se a for zero, ficamos com $y(x)=bx+c$ que é a equação de uma reta e não de uma parábola.

b) Uma parábola é um conjunto de pontos com distâncias constantes para uma reta.
ERRADO. Parábola é um conjunto de pontos que distam igualmente de um ponto fixo (que chamamos de foco) e de uma reta (que chamamos de diretriz).

c) Uma parábola é uma curva cuja distância até o ponto focal é fixa, independente do ponto na curva.
ERRADO. Parábola é um conjunto de pontos que distam igualmente de um ponto fixo (que chamamos de foco) e de uma reta (que chamamos de diretriz).

d) Uma parábola pode ser representada pela função $y(x)=ax^2+bx+c$, sendo a pertencente aos reais.

ERRADO. Quase certo, moçada! O "a", de fato, pertence ao reais, mas não é qualquer real! Ele não pode ser zero! Logo, essa observação deveria constar.

e) O conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano.
CERTO. É exatamente a definição que vimos ao longo da teoria. Esse ponto fixo nós denominamos ponto focal ou, simplesmente, foco. A reta fixa é chamada de diretriz e está a uma distância p do foco.

Gabarito: LETRA E.

12. (IBFC/PREF. DIVINÓPOLIS/2018) A equação geral da parábola de vértice $V(-3,1)$, parâmetro $p = 2$ e cujo eixo é paralelo ao eixo das abscissas, é dada por:
A) $y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$
B) $x^2 + 4x - 2y - 13 = 0$
C) $x^2 + 6x - 4y + 13 = 0$
D) $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$

Comentários:
Vimos na teoria que quando a parábola possui **eixo paralelo ao eixo das abscissas**, sua equação é da forma:

$$(y - y_v)^2 = 2p(x - x_v)$$

Agora, basta substituir as informações do enunciado!

$$(y-1)^2 = 2 \cdot 2 \cdot (x - (-3))$$

$$(y-1)^2 = 4(x+3)$$

$$y^2 - 2y + 1 = 4x + 12$$

$$\boxed{\boldsymbol{y^2 - 4x - 2y - 11 = 0}}$$

Gabarito: LETRA A.

13. (IBADE/PREF. JI-PIRANÁ/2018) A distância entre os focos da elipse $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ é:
A) -8.
B) -6.
C) 0.
D) 6.
E) 8.

Comentários:

Vamos organizar a equação dessa elipse!

$$\mathbf{25x^2 + 9y^2 - 225 = 0}$$

$$\mathbf{25x^2 + 9y^2 = 225}$$

Vamos dividir tudo por 225.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Com isso, tiramos que:

$$a^2 = 25 \quad e \quad b^2 = 9$$

Lembre-se que podemos achar a semidistância focal por meio da seguinte relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad 25 = 9^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 16 \quad \rightarrow \quad c = 4$$

Opa!! A distância focal (DF) é igual a 2c. Assim:

$$\mathrm{DF} = 2\mathrm{c} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{DF = 8}}$$

Gabarito: LETRA E.

14. (QUADRIX/PREF. CRISTALINA/2018) O conjunto de pontos do plano cartesiano que satisfaz a equação $4x = y^2$ é uma parábola, cujo foco e cuja diretriz são, respectivamente,

A) o ponto $(0,1)$ e a reta $y = -1$.
B) o ponto $(1,0)$ e a reta $x = -1$.
C) o ponto $(0,4)$ e a reta $y = -1$.
D) o ponto $(0,4)$ e a reta $x = -1$.
E) o ponto $(4,0)$ e a reta $x = -1$.

Comentários:

Temos a seguinte equação da parábola:

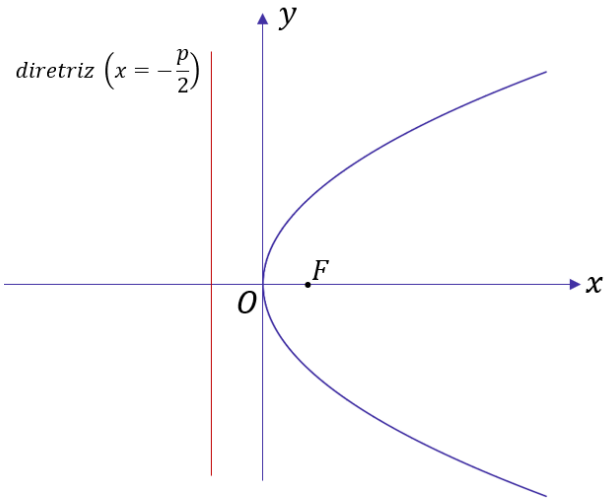
$$y^2 = 4x$$

Vimos na teoria que uma parábola com **eixo de simetria paralelo a Ox** tem equação na forma:

$$(y - y_v)^2 = 2p(x - x_v)$$

Observe que quando comparamos as duas expressões, percebemos que **o vértice dessa parábola é (0,0).**

Por sua vez, **o parâmetro é igual a 2**. Temos uma situação da forma:



Note que a diretriz tem equação igual a:

$$x = -\frac{p}{2} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{2}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x = -1}}$$

O parâmetro é a distância do foco à diretriz. Portanto.

$$F = (-1 + 2, 0) \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{F = (1, 0)}}$$

Gabarito: LETRA B.

Vunesp

15. (VUNESP/EsFCEx/2021) A equação $16x^2 + 25y^2 + 96x - 200y = 1056$ representa uma elipse cujo eixo menor tem extremidades nos pontos de coordenadas

A) (3, –4) e (3, 12).

B) (–3, 4) e (–3, 12).

C) (–3, –4) e (–3, 12).

D) (3, 4) e (3, 12).

E) (–3, –12) e (–3, 4).

Comentários:

Primeiramente, vamos tentar escrever a equação em uma forma melhor de visualizar seus parâmetros.

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$$

Conhecendo **o valor do semieixo menor "b" e o centro (x_o, y_o) da elipse**, poderemos determinar as coordenadas procuradas. Para realizar essa tarefa, precisaremos completar quadrados. Vamos seguir um procedimento.

1) Organizar a equação:

$$(16x^2+96x)+(25y^2-200y)=1056$$

2) Colocar alguns valores em evidência:

$$16\cdot(x^2+6x)+25\cdot(y^2-8y)=1056$$

3) Completar os quadrados:

$$\mathbf{16}\cdot(x^2+6x+\mathbf{9})+\mathbf{25}\cdot(y^2-8y+\mathbf{16})=1056+\mathbf{144}+400$$

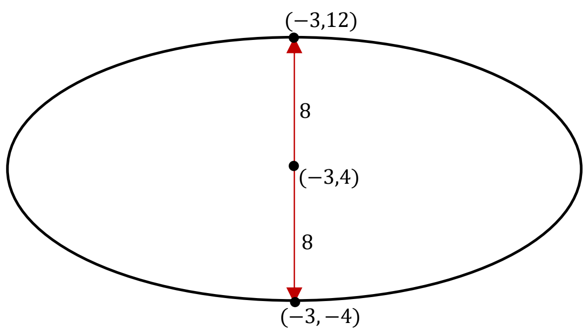
4) Identificar e escrever os quadrados:

$$16\cdot(x+3)^2+25\cdot(y-4)^2=1600$$

5) Dividir ambos os lados por 1600:

$$\frac{(x+3)^2}{100}+\frac{(y-4)^2}{64}=1$$

Equação da Elipse no esquema! Note que **ela está centrada em $(-3,4)$ e tem semieixo menor igual a 8.** Agora, vou desenhar essa elipse para explicar melhor o que a questão está pedindo!



Você deve perceber que o as coordenadas das extremidades do semieixo menor está na mesma vertical que o centro da elipse. Sendo assim, **a abscissa desses pontos será igual a abscissa do centro**, ou seja, -3. A extremidade "de cima" está a uma distância igual a "b" do centro. Logo, **o valor da ordenada é 8 unidades maior do que a ordenada do centro**. De forma análoga, calculamos a ordenada da extremidade "de baixo".

Gabarito: LETRA C.

16. (VUNESP/EsFCEx/2020) A curva de equação $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ delimita uma área plana de medida igual a:

A) $27\pi/2$ u. a.

B) 6π u. a.

C) 21π u. a.

D) $57\pi/2$ u. a.

E) 36π u. a.

Comentários:

Vamos organizar a equação da curva do enunciado.

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

Dividindo tudo por 36.

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Observe que **a equação acima é de uma elipse** em que:

$$a^2 = 9 \quad \rightarrow \quad a = 3 \qquad\qquad b^2 = 4 \quad \rightarrow \quad b = 2$$

Como vimos na teoria, **a área de uma elipse** é dada por:

$$A = \pi ab$$

Substituindo as informações que tiramos da equação:

$$A = \pi \cdot 2 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad A = 6\pi\, u.a.$$

Obs.: "u. a." significa unidades de área. Como não sabemos (pois não é relevante para o problema) as unidades em que estão as medidas do semieixo menor e maior, usamos simplesmente "u. a." para não deixar a medida sem dimensões.

Gabarito: LETRA B.

17. (VUNESP/PM-SP/2016) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, y' é a equação da parábola gerada quando a curva $y = x^2 - 2x + 3$ é refletida pelo eixo x. Ligando-se os vértices das parábolas e o ponto O (origem do sistema), obtém-se um triângulo PQO, de área igual, em u.a. (unidade de área), a

A) 8.

B) 6.

C) 5.

D) 4.

E) 2.

Comentários:

Primeiro, vamos olhar para **a equação da parábola**.

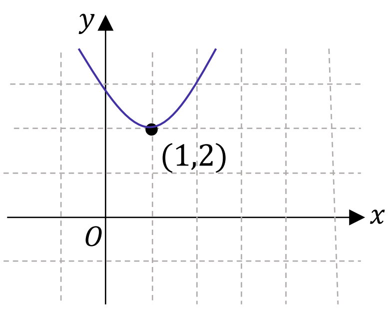
$$y = x^2 - 2x + 3$$

Temos que $\boldsymbol{a = 1, b = -2}$ **e** $\boldsymbol{c = 3}$. Agora, vamos encontrar **as coordenadas do vértice** da parábola.

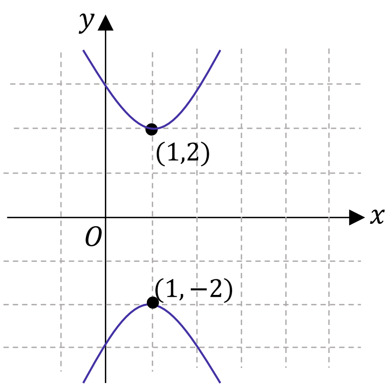
$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \rightarrow \quad x_v = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad x_v = 1$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \quad \rightarrow \quad y_v = \frac{-((-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3)}{4 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad y_v = \frac{8}{4} \quad \rightarrow \quad y_v = 2$$

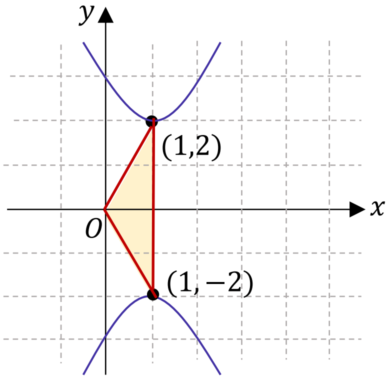
Com isso, podemos esquematizar a situação.



Quando **refletimos essa parábola**, obtemos o seguinte:



Agora, visualize **o triângulo formado pelos dois vértices e a origem do sistema**.



Note que podemos tomar a base do triângulo como a distância entre os dois vértices da parábola, isto é, 4. Além disso, a altura relativa a essa base é exatamente a medida da abcissa dos vértices, isto é, 1. Assim,

$$A = \frac{bh}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{4 \cdot 1}{2} \quad \rightarrow \quad A = 2$$

Gabarito: LETRA E.

LISTA DE QUESTÕES

Ponto

FGV

1. (FGV/CBM-RJ/2024) No plano cartesiano, o triângulo cujos vértices são (0, 0), (a, b) e (c, d) tem área dada pelo valor absoluto da expressão:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

A área do triângulo cujos vértices são (0, 0), (5, −1) e (8, 6) é

A) 11.
B) 13.
C) 15.
D) 17.
E) 19.

2. (FGV/ALEP-PR/2024) Três dos vértices de um retângulo estão nos pontos (4,3), (4,5) e (6,3) do plano cartesiano. Assinale a opção que indica as coordenadas do quarto vértice do retângulo.

A) (3,5)
B) (3,4)
C) (4,6)
D) (6,5)
E) (4,4)

3. (FGV/ALEP-PR/2024) Um triângulo isósceles tem os vértices da base nos pontos de coordenadas (3,0) e (7,0) no plano cartesiano. Sabendo-se que a medida da área do triângulo é de 20, determine as coordenadas de seu terceiro vértice.

A) (5,10)
B) (5,5)
C) (7,3)
D) (3,7)
E) (10,5)

4. (FGV/CM-SP/2024) Considere uma sequência de pontos do plano cartesiano tal que para cada ponto (x,y) da sequência, o próximo ponto é obtido de acordo com a seguinte regra:

Se x é ímpar, então o próximo ponto será (x + 3, y − 1);

Se x é par, então o próximo ponto será (x/2, 2y).

Começando com o ponto (2024,0), a soma das coordenadas do 10º ponto da sequência é

A) 24.

B) 12.

C) 0.

D) −12.

E) −24.

5. (FGV/TCE-BA/2023) Considere o ponto P(4, 1) do plano cartesiano. Dos pontos abaixo, o mais distante do ponto P é:

A) (5, 2);

B) (2, 2);

C) (6, −1);

D) (1, 0);

E) (7, 1).

CEBRASPE

6. (CEBRASPE/PETROBRAS/2024) A 200 km da costa do estado do Rio de Janeiro está localizada a plataforma P-71, que atingiu em novembro de 2021 o topo de extração de óleo do pré-sal: 150 mil barris por dia. A plataforma pode estocar até 1,6 milhão de barris de óleo. A comunicação entre a plataforma e os navios próximos é feita via rádio, cujo transmissor tem alcance máximo de 63 km. A potência do sinal de rádio, P, decai com a distância d, em quilômetros, de acordo com a função $P(d) = P_o 2^{-d/9}$, sendo P_o a potência de transmissão.

Além disso, um robô submarino que auxilia a plataforma experimenta, quando está dentro da água, uma pressão p, em atmosferas, dada pela equação $p(h) = kh + 1$, na qual k é uma constante e h é a profundidade do robô, em metros. Com base nas informações precedentes, julgue o item a seguir.

Considerando um plano cartesiano em que as coordenadas estejam em quilômetros, se a plataforma estiver na posição (0, 0), então um navio que estiver localizado em (50, 35) não será capaz de receber uma mensagem transmitida da plataforma.

7. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item seguinte, referente a geometria analítica, geometria plana e geometria espacial.

Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o triângulo de vértices nos pontos de coordenadas $A = (1, 0)$, $B = (2, 3)$ e $C = (-1, 1)$ é um triângulo retângulo.

8. (CESPE/ABIN/2018) O relatório de inteligência elaborado por um agente registra que o suspeito investigado, quando frequenta determinado restaurante, sempre ocupa uma de três mesas, localizadas, segundo um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais imaginário, nos pontos $A = (2, 3)$, $B = (7, 2)$ e $C = (5, 6)$. Para aumentar as chances de capturar as conversas do investigado, independentemente da mesa por ele escolhida entre essas três, será colocado um ponto eletrônico de escuta em um ponto $P = (x, y)$, de modo que a soma dos quadrados das distâncias de P às mesas A, B e C seja mínima. A partir dessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Considerando-se 7,2 como valor aproximado para $\sqrt{52}$, é correto afirmar que, no triângulo ABC, o ângulo correspondente ao vértice A é menor que 60°.

CESGRANRIO

9. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Os vértices de um triângulo ABC são os pontos $A(0, 2)$, $B(4, 6)$ e $C(8, -10)$. As coordenadas (x, y) do ponto médio do maior lado do triângulo ABC são

A) (−4, 8)

B) (−4, 6)

C) (6, −2)

D) (4, −4)

E) (2, 4)

Outras Bancas

10. (OMNI/PREF. SERTÃOZINHO/2021) Sendo o ponto $Q(q, 1)$ equidistante dos pontos $P(1, 2)$ e $R(3, 1)$, o valor de q é:

A) $4/7$

B) $7/4$

C) $17/4$

D) $4/17$

11. (COTEC/PREF SJP/2021) Considere $A(-m, 2m)$ e $B(3m, -2m)$ dois pontos do plano cartesiano, em que m é um número real negativo. Assinale a alternativa cuja expressão representa a distância d do ponto A ao ponto B em função de m.

A) $d = 4\sqrt{2}m$

B) $d = -4\sqrt{2}m$

C) $d = -2\sqrt{5}m$

D) $d = 2\sqrt{5}m$

E) $d = 2\sqrt{10}m$

12. (QUADRIX/SEDF/2021) Dados os pontos $A(4, 11)$, $B(4, 4)$ e $C(28, 4)$, julgue o item.

Os lados do triângulo ABC são números inteiros.

13. (CONSULPLAN/PREF. JF/2022) Considere que Jonas está verificando sua posição geométrica em um plano cartesiano no mapa de seu celular que apresenta inicialmente a posição (300 m, 200 m). Jonas insere como destino a escola em que estuda, localizada na posição (−100 m, 250 m) nesse mesmo plano cartesiano. Com base nessas informações, qual o valor mais próximo do deslocamento necessário, para que Jonas chegue até a escola em que estuda, considerando o seu movimento em linha reta?

A) 200 metros.

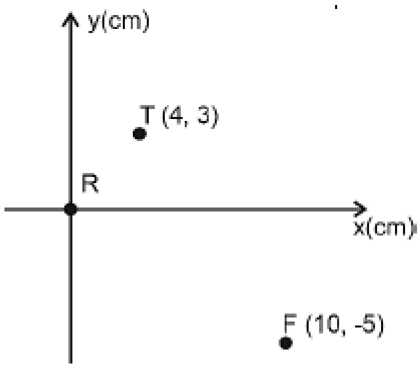
B) 250 metros.

C) 300 metros.

D) 400 metros.

E) 450 metros.

14. (INST. CONSULPLAN/CM AMPARO/2020) Um estudante de matemática criou um mapa personalizado com a localização de lugares considerados importantes, utilizando um plano cartesiano para dar as coordenadas dos pontos desses lugares. Na origem, ele colocou sua casa e, conforme figura, representou alguns pontos de seu interesse e utilizou uma escala em que 1 cm no mapa representa 1 km na vida real. Observe.



Considerando que todos os deslocamentos feitos pelo estudante são em linha reta, qual será a distância, em quilômetros, percorrida por esse estudante, caso saia de casa (ponto R), caminhe até o trabalho (ponto T) e, do trabalho, vá direto para a faculdade (ponto F)?

A) 10 km

B) 12 km

C) 15 km

D) 18 km

15. (DIRENS/EEAR/2020) A área do triângulo de vértices $A(1; 2)$, $B(-1; -2)$ e $C(-2; -1)$ é:

A) 3

B) 6

C) 20

D) 2/3

16. (FUNDATEC/PREF. P DAS MISSÕES/2019) A distância entre o ponto $A = (3; 4)$ e a origem do sistema de eixos cartesianos é:

A) 3.

B) 4.

C) 5.

D) 6.

E) 7.

17. (IBFC/CBM-SE/2018) A distância entre os pontos $A(-3, 4)$ e $B(2, -1)$ é igual a:

A) $2\sqrt{5}$

B) $3\sqrt{2}$

C) $5\sqrt{3}$

D) $5\sqrt{2}$

18. (IBFC/PCIENT. PR/2017) Dados os pontos distintos $Q(5, 2)$ e $R(1, 3)$ do plano cartesiano, assinale a alternativa que apresenta a distância entre eles.

A) 17

B) $\sqrt{18}$

C) 16

D) $\sqrt{17}$

E) $\sqrt{15}$

Vunesp

19. (VUNESP/PM-SP/2018) Sobre um mapa de uma região, foi aplicado um sistema de coordenadas cartesianas, em que cada segmento de medida unitária, nesse sistema, correspondia a 1,5 quilômetros reais e, nesse sistema, duas praças foram identificadas com as coordenadas (1, –3) e (4, 1). A distância real, em linha reta, em quilômetros, entre essas praças é de

A) 5,0.

B) 5,5.

C) 6,0.

D) 7,5.

E) 8,0.

20. (VUNESP/PM-SP/2017) Considere a elaboração, pelo Centro de Inteligência da Polícia Militar (CIPM), de um planejamento estratégico para a deflagração de uma operação policial ostensiva em uma região R, com alta incidência do tráfico de drogas. A questão abaixo tem como referência essa proposição. O mapa da região R foi representado em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, no qual foram

assinalados os pontos $M\,(-3,-2)$, $N\,(7,8)$ e $P\,(x,3)$, que são colineares e correspondem a alvos estratégicos. A distância entre os pontos N e P, na referida representação, é, em unidades de comprimento, igual a

A) $5\sqrt{2}$

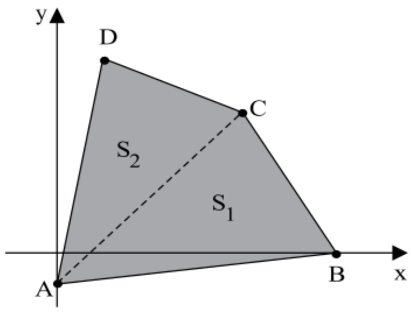
B) $3\sqrt{5}$

C) $1\sqrt{10}$

D) $2\sqrt{5}$

E) $\sqrt{10}$

21. (VUNESP/PC-SP/2014) O quadrilátero ABCD, representado num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, foi dividido em duas regiões triangulares, S1 e S2, pelo segmento AC, conforme mostra a figura.



Dados $A(0,-1)$ e $C(4,5)$, pode-se afirmar que a distância, em u.c., entre os pontos A e C, é igual a

A) $2\sqrt{13}$

B) $2\sqrt{15}$

C) $4\sqrt{13}$

D) $2\sqrt{2}$

E) $3\sqrt{10}$

Gabarito

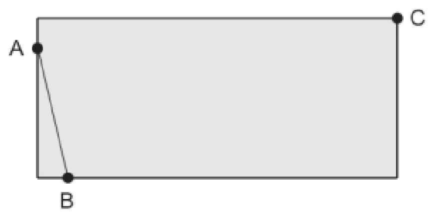
1. LETRA E
2. LETRA D
3. LETRA A
4. LETRA E
5. LETRA D
6. ERRADO
7. CERTO
8. LETRA C
9. LETRA B
10. LETRA B
11. CERTO
12. LETRA D
13. LETRA C
14. LETRA A
15. LETRA C
16. LETRA D
17. LETRA D
18. LETRA D
19. LETRA A
20. LETRA A

LISTA DE QUESTÕES

Reta

FGV

1. (FGV/FEMPAR/2022) A figura a seguir ilustra uma parede retangular de 6,0 m de largura e 3,0 m de altura.



Um cabo de energia elétrica retilíneo liga duas tomadas localizadas nos pontos A e B, estando A sobre a borda esquerda da parede, a 50 cm da borda superior. O ponto B está na base da parede, a 50 cm da sua borda esquerda. Deseja-se passar um outro cabo retilíneo que ligue o ponto C, na quina da parede, a um ponto D na mesma borda que contém o ponto A. Sendo esse um cabo de internet, é fundamental que passe pelo cabo AB perpendicularmente. Uma das formas de se determinar a posição do ponto D é imaginar eixos cartesianos $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$ colocados, respectivamente, sobre as bordas inferior e esquerda e tratar os cabos como segmentos de retas perpendiculares. A distância do ponto D à base inferior da parede é igual a

a) 1,70 m.
b) 1,75 m.
c) 1,80 m.
d) 1,85 m.
e) 2,00 m.

2. (FGV/AL-RO/2018) Considere a reta r de equação 2x + 3y + 7 = 0 e a reta s, perpendicular à reta r e que passa pelo ponto (1, 3). A interseção da reta s com o eixo X é

A) (3, 0)
B) (-1, 0)
C) (-2, 0)
D) (-3, 0)
E) (4, 0)

3. (FGV/PREF. PAULÍNIA/2016) As retas cujas equações são $y = ax + b$ e $y = cx + d$ são tais que

$$b > 0, d < 0 \; e \; a > c > 0$$

O ponto de interseção dessas retas está

A) no primeiro quadrante.

B) no segundo quadrante.

C) no terceiro quadrante.

D) no quarto quadrante.

E) sobre um dos eixos.

4. (FGV/PREF. JOÃO PESSOA/2014) As retas de equações $y = 2x + m$ e $y = 3x + k$ se interceptam no ponto (2,-5). O valor de $m - k$ é

A) -20.

B) -2.

C) 0.

D) 2.

E) 20.

5. (FGV/ALE-RO/2018) Uma reta com coeficiente angular 3 intersecta uma reta com coeficiente angular 5 no ponto (5, 23). A área do triângulo que essas retas formam com o eixo das ordenadas é

A) 22.

B) 23.

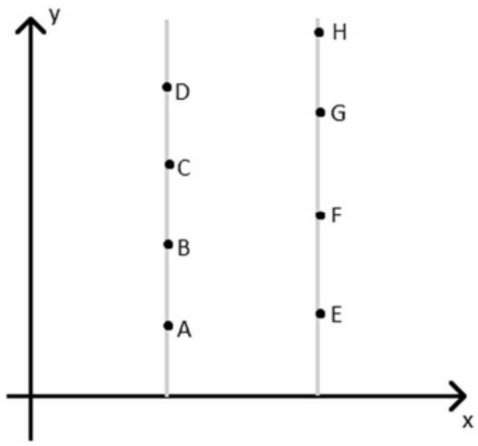
C) 24.

D) 25.

E) 26.

CEBRASPE

6. (CESPE/PETROBRAS/2022)



No plano cartesiano Oxy da figura precedente, estão marcados 8 pontos distintos no primeiro quadrante, cujas coordenadas são:

$$\boldsymbol{A = (1, a); \quad B = (1, b); \quad C = (1, c); \quad D = (1, d);}$$

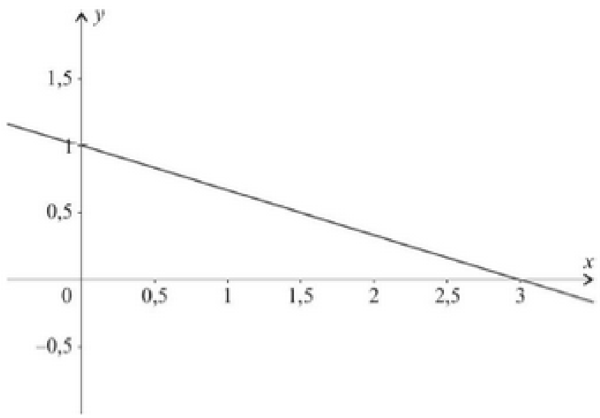
$$\boldsymbol{E = (2, e); \quad F = (2, f); \quad G = (2, g); \quad H = (2, h)}$$

A partir dos dados apresentados, julgue o item subsequente.

A reta que contém os pontos A e E possui equação $y = (e - a)x - e + 2a$.

7. (CESPE/FUB/2022) Com relação a equações lineares e quadráticas, sistemas lineares e funções, julgue o item a seguir.

A representação gráfica da equação $x + 3y - 3 = 0$ é dada pela reta apresentada a seguir.



CESGRANRIO

8. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Considere R1 a reta representada pela equação: $2y - x - 1 = 0$ e o ponto P1 dado pelo par ordenado $(x, y) = (2, 4)$, ambos no plano xy. Seja R2 a reta perpendicular a R1 passando pelo ponto P1. O ponto P2, interseção entre as retas R1 e R2, é representado pelo par ordenado (x, y) igual a

A) (5,3)
B) (–1,0)
C) (3,2)
D) (–3, –1)
E) (1,1)

9. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Um sistema cartesiano de coordenadas (xy) foi disposto sobre um grande terreno plano. Nesse terreno, passam os trilhos da rede ferroviária, que foram modelados pela reta cuja equação é dada por $2x + y = 3$. O ponto $P(1, 3)$ será utilizado como base de realização de uma importante medição, o que exigirá dos engenheiros a determinação de um ponto, sobre os trilhos,

que esteja mais próximo do ponto P. Qual é o ponto da reta $2x + y = 3$ que está mais próximo do ponto P (1,3)?

A) $\left(\frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right)$

B) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

C) $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$

D) $(1, 1)$

E) $(3, -3)$

10. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Uma equação da reta r que passa pelo ponto de interseção entre as retas s: x – 2y = 4 e t: x – y = 4 e forma com a reta u: 9x – 5y = 12 um ângulo de 45° é dada por

A) r: 2x – 7y = 8

B) r: 3x – 7y = 12

C) r: 5x – 7y = 20

D) r: x – 7y = 4

E) r: 2x + 7y = 8

Outras Bancas

11. (AOCP/SED-MS/2022) Considere r a reta que passa pelo ponto $(2, 0)$ e intersecta o eixo Oy no ponto $(0, k)$; s a reta perpendicular à r e que passa pelo ponto $(1, 2)$. Sabendo-se que a área do triângulo que tem vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, k)$ é igual a 4 cm² e considerando que as unidades nos eixos cartesianos estão em centímetros, a equação da reta s é dada por

A) $y = (x + 7)/4.$

B) $y = (x + 3)/2.$

C) $y = 2 \cdot (x + 2)/3.$

D) $y = 3x - 1.$

E) $y = x + 1.$

12. (CEV URCA/PREF. CRATO/2021) O ponto da reta $3x - 4y + 8 = 0$ que está mais próximo do ponto $(2, 1)$ é:

A) $\left(\frac{4}{7}, \frac{13}{5}\right)$

B) $\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{5}\right)$

C) $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$

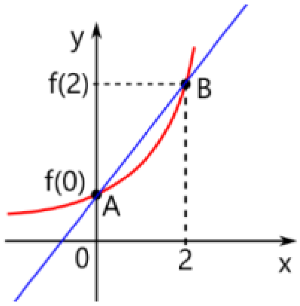
D) $\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{5}\right)$

E) $\left(\frac{4}{5}, \frac{25}{11}\right)$

13. (QUADRIX/SEDF/2021) Dados os pontos $A(4, 11)$, $B(4, 4)$ e $C(28, 4)$, julgue o item.

A distância do ponto B até a reta definida pelos pontos A e C é igual a 6,72.

14. (IBFC/SEC-BA/2023) A equação geral da reta que passa pelos pontos A e B, sendo considerado a função $f(x) = 2^x$, é igual a:



A) $2x - 3y - 2 = 0$
B) $2y - 3x - 2 = 0$
C) $-2x + 3y + 2 = 0$
D) $3y - 3x + 4 = 0$
E) $2x - 3y - 7 = 0$

15. (AOCP/SED-MS/2022) Considere r a reta que passa pelo ponto $(2, 0)$ e intersecta o eixo Oy no ponto (0, k); s a reta perpendicular à r e que passa pelo ponto $(1, 2)$. Sabendo-se que a área do triângulo que tem vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, k)$ é igual a 4 cm² e considerando que as unidades nos eixos cartesianos estão em centímetros, a equação da reta s é dada por

A) $y = (x + 7)/4$
B) $y = (x + 3)/2$
C) $y = 2(x + 2)/3$
D) $y = 3x - 1$
E) $y = x + 1$

16. (DIRENS/EEAR/2022) A reta $2x - y - 6 = 0$ intercepta os eixos coordenados nos pontos A e B. Determine a equação da mediatriz do segmento AB e assinale a resposta certa.

A) y = (7/2)x + (9/5).
B) y = (-9/4)x - (1/2).
C) y = (-7/2)x + (5/2).
D) y = (-1/2)x - (9/4).

17. (FUNDATEC/SBC/2021) Assinale a alternativa que apresenta o ângulo formado entre a reta $2x - y - 12 = 0$ e a reta $3x + y + 3 = 0$.

A) 0°.

B) 15°.

C) 30°.

D) 45°.

E) 60°.

18. (INST. CONSULPLAN/SEED-PR/2022) Sejam duas retas definidas no plano cartesiano por:

r: $\boldsymbol{y + 2x - 1 = 0}$

s: $\boldsymbol{2x - 3y + 4 = 0}$

Se P é o ponto de intersecção entre essas duas retas, qual alternativa apresenta uma afirmação verdadeira?

A) P está localizado em um quadrante ímpar.

B) P não existe, pois as retas não se interceptam.

C) O módulo da ordenada de P é 10 vezes o módulo de sua abscissa.

D) O módulo da abscissa de P é 10 vezes o módulo de sua ordenada.

19. (FUNDATEC/PREF. VIAMÃO/2022) A única alternativa em que constam duas retas paralelas é:

A) $x + 2 = y$ e $-x + 3 = -y$

B) $x + 4 = 2y$ e $-x + 4 = 2y$

C) $x - 2 = y$ e $x - 3 = -y$

D) $x + 2 = 2y$ e $-x + 3 = -y$

E) $2x + 2 = y$ e $2x + 3 = -y$

20. (Inst AOCP/ITEP-RN/2021) Considere as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ de equações $\boldsymbol{kx + y + 5 = 0}$ e $\boldsymbol{2x + (k + 1)y - 9 = 0}$, respectivamente. A razão entre o valor de k, tal que r seja perpendicular a s, e o valor de k, tal que r seja paralela a $\boldsymbol{s}$, é

A) 3 ou -6.

B) −1/3 ou −1/6.

C) 1/3 ou −1/6.

D) 1/3 ou 1/6.

E) −1/3 ou 1/6

Vunesp

21. (VUNESP/PM-SP/2013) As retas das equações

$$\boldsymbol{x + 2y - 4 = 0}$$

$$\boldsymbol{2x + y + 7 = 0}$$

$$x + y + k = 0$$

concorrem em P. O valor de k na equação $x + y + k = 0$ é

A) -2.

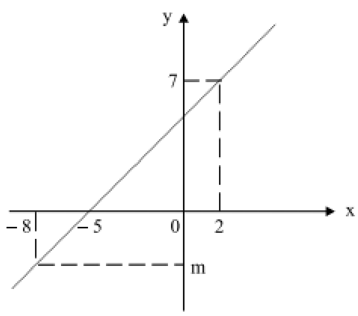
B) -1.

C) 1.

D) 2.

E) 3.

22. (VUNESP/PM-SP/2010) Se o gráfico indicado na figura representa uma reta, m é igual a



A) -4.

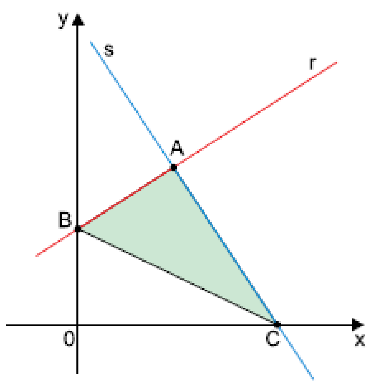
B) -3.

C) -5/2.

D) -2.

E) -3/2.

23. (VUNESP/FAMEMA/2018) A reta r de equação $y = \frac{3x+4}{2}$ e a reta s de equação $y = \frac{-5x+25}{3}$ se intersectam no ponto A, conforme mostra o gráfico.



Sabendo que o ponto B é a intersecção da reta r com o eixo das ordenadas e que o ponto C é a intersecção da reta s com o eixo das abscissas, a área do triângulo ABC, em unidades de área, é

A) 9,5.

B) 11,5.

C) 13,0.

D) 16,5.

E) 19,0.

Gabarito

1. LETRA C
2. LETRA B
3. LETRA C
4. LETRA D
5. LETRA D
6. CERTO
7. CERTO
8. LETRA C
9. LETRA A
10. LETRA A
11. LETRA B
12. LETRA C
13. CERTO
14. LETRA B
15. LETRA B
16. LETRA D
17. LETRA D
18. LETRA C
19. LETRA A
20. LETRA E
21. LETRA C
22. LETRA B
23. LETRA A

LISTA DE QUESTÕES

Circunferência

FGV

1. (FGV/CBM-RJ/2024) Considere a circunferência de equação:

$$(x-4)^2+(y+5)^2=4$$

O ponto pertencente a essa circunferência que está mais próximo do eixo y é

A) (−4; 5).

B) (−4; 3).

C) (4; −3).

D) (−2; 5).

E) (2; −5).

2. (FGV/PREF. PAULÍNIA/2021) A reta de equação $3x+4y-13=0$ determina sobre a circunferência $(x-1)^2+y^2=36$ uma corda de comprimento igual a:

A) 8

B) $8\sqrt{2}$

C) 6

D) $6\sqrt{2}$

E) 4

3. (FGV/AL-RO/2018) O segmento de reta com extremidades no ponto $P(5,0)$ e no centro da circunferência $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ intersecta a circunferência no ponto Q. A distância de P até Q mede

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

CEBRASPE

4. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Julgue o item seguinte, referente a geometria analítica, geometria plana e geometria espacial.

Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, o ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ que está mais próximo da reta $y + 2x = 4$ é o ponto $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

5. (CESPE/IFF/2018) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, as retas $3x - 4y + 9 = 0$ e $3x - 4y - 11 = 0$ são tangentes a uma mesma circunferência. Nessa situação, o raio dessa circunferência é igual a

a) 1.

b) 2.

c) 4.

d) 5.

e) 10.

6. (CESPE/CPRM/2013) Considerando que, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, os pontos de coordenadas (x, y) que satisfazem à equação $2x^2 - 12x + 2y^2 + 4y + 2 = 0$ estão sobre uma circunferência, é correto afirmar que

O raio da circunferência é igual a 3.

CESGRANRIO

7. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) Considere uma reta r, de equação $x + y = k$, sendo k uma constante real, e uma circunferência λ, de equação $x^2 + y^2 = 4$, ambas representadas em um mesmo sistema de coordenadas retangulares. O menor valor real do parâmetro k, que faz a reta r intersectar a circunferência λ em apenas um ponto, é igual a

A) $-2\sqrt{2}$

B) $-2\sqrt{3}$

C) $-\sqrt{6}$

D) $2\sqrt{3}$

E) $4\sqrt{2}$

8. (CESGRANRIO/FINEP/2011) Uma circunferência corta os eixos do sistema cartesiano nos quatro pontos distintos $(-2, 0)$, $(6, 0)$, $(0, -3)$ e $(0, p)$. A ordenada p é igual a

A) $\sqrt{65}/2$

B) $1/2$

C) 1

D) 2

E) 4

9. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2010) A reta de equação $3x - 4y - 12 = 0$ determina sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 16$ uma corda que tem A e B como extremidades. A equação da reta que passa pelo centro da circunferência dada e divide a corda AB ao meio é

A) $y = -3x$

B) $3x - 4y = 0$

C) $3x + 4y = 0$

D) $4x - 3y = 0$

E) $4x + 3y = 0$

Outras Bancas

10. (AOCP/SED-MS/2022) O raio da circunferência de centro em (8, 4) e que tangencia exteriormente a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ é, em unidades de comprimento, igual a

A) 8.

B) 6.

C) 4.

D) $\sqrt{6}$.

E) $2\sqrt{3}$.

11. (DECEx/EsPCEx/2021) A circunferência que tem seu centro no ponto $(1, -1)$ e é tangente à reta de equação $y = \left(\frac{3}{4}\right)x + 2$ tem equação dada por

A) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$.

B) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$.

C) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 7 = 0$.

D) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 7 = 0$.

E) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

12. (LEGALLE/PREF. SÃO MARCOS/2021) O centro de uma circunferência é dado pelo ponto médio do segmento AB, sendo A(4, 2) e B(8, 4). Considerando que o raio dessa circunferência é 2, a equação que define essa circunferência é:

A) $(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 4$.

B) $(x - 3)^2 + (y + 8)^2 = 4$.

C) $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

D) $(x + 7)^2 + (y + 4)^2 = 4$.

13. (AOCP/SED-MS/2022) O raio da circunferência de centro em (8, 4) e que tangencia exteriormente a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ é, em unidades de comprimento, igual a

A) 8.

B) 6.

C) 4.

D) $\sqrt{6}$

E) $2\sqrt{3}$

14. (FUNDATEC/PREF. ESTEIO/2022) Analise três circunferências de equações dadas por:

C1: $(x-2)^2+(y-1)^2=2$
C2: $(x+1)^2+(y-5)^2=4$
C3: $(x\ +\ 3)^2+y^2=9$

Se forem ligados os centros dessas circunferências por segmentos de reta, será formado um triângulo de área:

A) 9.

B) 10.

C) 11,5.

D) 16.

E) 23.

15. (FUNDATEC/SBC/2022) Considere a equação do círculo $x^2+y^2-2x+4y+1=0$. A partir dessa equação, determine o raio do círculo.

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

16. (Inst. CONSULPLAN/SEED-PR/2021) As circunferências α: $(x+2)^2+(y-2)^2=1$ e β: $x^2+y^2=1$ possuem quantos pontos em comum?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

17. (Inst. AOCP/PREF. BETIM/2020) Um possível valor de k para que a reta t: $x-y+k=0$ seja tangente à circunferência λ: $x^2+y^2-4x+2=0$ é

A) 4.

B) 2.

C) 1.

D) – 2.

E) – 4.

18. (CONSULPLAN/CM-BH/2018) Seja O o centro de um círculo de raio R e seja d a distância de O até a reta r. Se $d < R$, a reta é

A) secante ao círculo.

B) exterior ao círculo.

C) tangente ao círculo.

D) interior ao círculo passando pelo centro do mesmo.

19. (IDECAN/CBM-DF/2017) O ponto (1, 4) pertence à circunferência de centro (2, –1). O valor numérico do raio dessa circunferência é:

A) $\sqrt{22}$

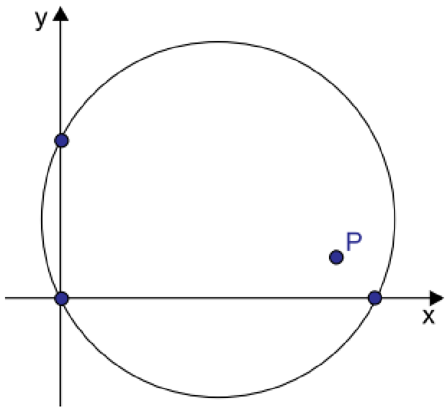
B) $\sqrt{23}$

C) $\sqrt{26}$

D) $\sqrt{29}$

Vunesp

20. (VUNESP/PM-SP/2023) No plano cartesiano, uma circunferência intersecta os eixos coordenados nos pontos de coordenadas (0, 0), (0, 4) e (8, 0), conforme mostra a figura, que também exibe o ponto P(7, 1).



A equação da reta que passa pelo centro da circunferência e por P é

A) x + y – 8 = 0

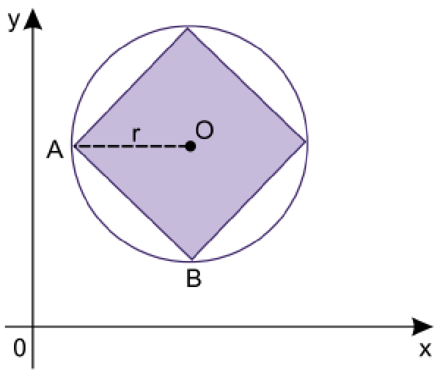
B) x + 2y – 8 = 0

C) x + 3y – 10 = 0

D) x + 4y – 10 = 0

E) x + 5y – 12 = 0

21. (VUNESP/PM-SP/2016) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a circunferência de centro O e raio r é definida pela equação: $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$.



Sendo AB o lado de um quadrado inscrito nessa circunferência, é correto afirmar que o perímetro desse quadrado mede

A) $16\sqrt{2}$

B) $14\sqrt{2}$

C) $12\sqrt{2}$

D) $8\sqrt{2}$

E) $6\sqrt{2}$

22. (VUNESP/PM-SP/2012) Sabe-se que o ponto C pertence à reta de equação $3x + y - 4 = 0$ e, também, à reta de equação $x + 2y = 3$. Nesse caso, é correto afirmar que o comprimento da circunferência de centro C, que tangencia o eixo x, é igual a

A) $\sqrt{3}\pi/2$.

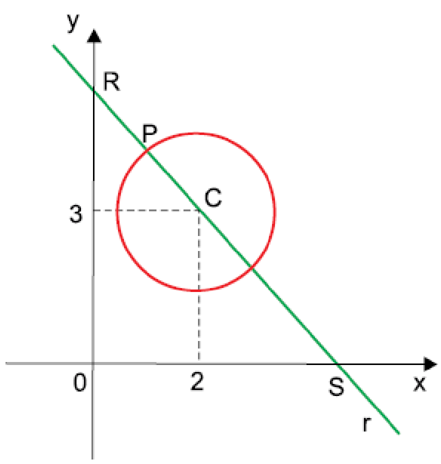
B) $\pi/2$.

C) π.

D) 2π.

E) 3π.

23. (VUNESP/FAMEMA/2017) Em um plano cartesiano, o ponto $C(2, 3)$ é o centro de uma circunferência de raio $\sqrt{2}$. O ponto P, de ordenada 4, pertence à circunferência, e a reta r, que passa pelos pontos P e C, intersecta os eixos coordenados nos pontos R e S, conforme mostra a figura.



Sabendo que o segmento $\overline{RS}$ está contido no 1º quadrante, a distância entre os pontos R e S é

A) $2\sqrt{2}$

B) $3\sqrt{2}$

C) $4\sqrt{5}$

D) $5\sqrt{2}$

E) $5\sqrt{5}$

GABARITO

1. LETRA E
2. LETRA B
3. LETRA C
4. ERRADO
5. LETRA B
6. CERTO
7. LETRA A
8. LETRA E
9. LETRA E
10. LETRA C
11. LETRA A
12. LETRA C
13. LETRA C
14. LETRA C
15. LETRA B
16. LETRA A
17. LETRA E
18. LETRA A
19. LETRA C
20. LETRA C
21. LETRA C
22. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES

Cônicas

FGV

1. (FGV/ALE-RO/2018) A distância focal da elipse $x^2 + 5y^2 = 100$ é

A) $12\sqrt{2}$

B) $8\sqrt{3}$

C) $12\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{5}$

E) $8\sqrt{5}$

2. (FGV/SEFAZ-MS/2006) Se a parábola $y = ax^2 + bx + c$ contém os pontos $(-1, 12)$, $(0, 5)$ e $(2, -3)$, quanto vale $a + b + c$?

A) 4

B) -2

C) 0

D) 1

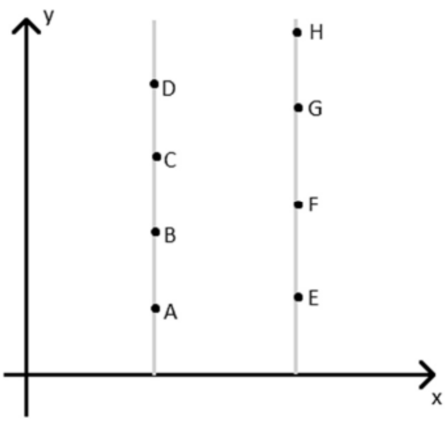
E) 2

CEBRASPE

3. (CESPE/PETROBRAS/2022) Acerca de geometria e de geometria analítica, julgue o item subsequente.

A excentricidade da elipse dada pela equação $x^2 - 4x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$ é $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. (CESPE/PETROBRAS/2022)



No plano cartesiano Oxy da figura precedente, estão marcados 8 pontos distintos no primeiro quadrante, cujas coordenadas são:

$$A = (1, a); \quad B = (1, b); \quad C = (1, c); \quad D = (1, d);$$

$$E = (2, e); \quad F = (2, f); \quad G = (2, g); \quad H = (2, h)$$

A partir dos dados apresentados, julgue o item subsequente.

A parábola que contém os pontos C, B e F possui equação:

$$y = (b - c - f)x^2 + (f^2 - b^2 - c^2)x + 2cb - 2bf - 2cf$$

CESGRANRIO

5. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018) O centro da circunferência λ: $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4$ é o foco de uma parábola cuja diretriz é o eixo Ox do plano cartesiano. A equação dessa parábola é

A) $x^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

B) $x^2 - 4x - y + 5 = 0$

C) $x^2 - 4x - 2y + 5 = 0$

D) $x^2 - 2x - 2y + 5 = 0$

E) $x^2 + 2x + 4y + 5 = 0$

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS/2012) Quantos são os pontos de interseção entre a circunferência definida pela equação $(x-3)^2 + y^2 = 25$ e a elipse definida pela equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Outras Bancas

7. (QUADRIX/CRTR 21/2021) Ramanujan, um grande matemático indiano, apresentou uma fórmula para se calcular, aproximadamente, o perímetro p de uma elipse de semieixo maior a e semieixo menor b:

$$p \cong \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$$

Se os comprimentos dos semieixos de uma elipse são as raízes da equação $x^2 - 17x + 60 = 0$, então, de acordo com a fórmula de Ramanujan, seu perímetro é de, aproximadamente,

A) $3\pi(17 - 2\sqrt{30})$.

B) 40π.

C) $\pi(51 - \sqrt{122})$.

D) $3\pi(17 - \sqrt{123})$.

E) $3\pi(17 - 2\sqrt{31})$.

8. (OMNI/PREF. SJB-SC/2021) Ana ao analisar a cônica C: $4x^2 - 9y^2 + 18y - 45 = 0$, percebeu que é um(a):

A) Círculo.

B) Parábola.

C) Elipse.

D) Hipérbole.

9. (IBFC/PREF. SGDA/2021) Um analista, tratando de um determinado problema chega à igualdade entre duas quantidades dependentes de x e y, de acordo com a equação:

$$\boldsymbol{x^2 - 4x + 3 = -y^2 + 6y - 6}$$

Ao identificar a expressão acima com uma forma quadrática em termos de x e y, ele conclui que as quantidades x e y que satisfazem a equação constituem uma figura geométrica familiar no plano-xy. Assinale a alternativa que apresenta a figura geométrica formada.

A) Elipse com focos em (2,3) e (-2,3). Há dois valores de x que anulam y

B) Circunferência de raio 4 e centro em (x,y) = (-2,-3). Há dois valores de x que anulam y

C) Parábola com vértice em (x,y) = (2,3) e eixo de simetria vertical. Há dois valores de x que anulam y

D) Circunferência de raio 2 e centro em (x,y) = (2,3). Não há valor real de x que anule y, mas há um valor de y que anula x

10. (IDECAN/PREF. C. GRANDE/2021) Determine a excentricidade (e) da cônica, dada pela equação $4x^2 + 9y^2 = 36$, e assinale a alternativa correta.

A) $e = \sqrt{5}/2$

B) $e = \sqrt{5}/3$

C) $e = \sqrt{5}/4$

D) $e = \sqrt{5}/5$

11. (IDECAN/IF-PB/2019) Assinale a alternativa correta com relação a definição de uma parábola.

A) Uma parábola pode ser escrita na forma $y(x) = ax^2 + bx + c$ com a igual a zero.

B) Uma parábola é um conjunto de pontos com distâncias constantes para uma reta.

C) Uma parábola é uma curva cuja distância até o ponto focal é fixa, independente do ponto na curva.

D) Uma parábola pode ser representada pela função $y(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a pertencente aos reais.

E) O conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano.

12. (IBFC/PREF. DIVINÓPOLIS/2018) A equação geral da parábola de vértice $V(-3, 1)$, parâmetro $p = 2$ e cujo eixo é paralelo ao eixo das abscissas, é dada por:

A) $y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$

B) $x^2 + 4x - 2y - 13 = 0$

C) $x^2 + 6x - 4y + 13 = 0$

D) $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$

13. (IBADE/PREF. JI-PIRANÁ/2018) A distância entre os focos da elipse $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ é:

A) -8.

B) -6.

C) 0.

D) 6.

E) 8.

14. (QUADRIX/PREF. CRISTALINA/2018) O conjunto de pontos do plano cartesiano que satisfaz a equação $4x = y^2$ é uma parábola, cujo foco e cuja diretriz são, respectivamente,

A) o ponto $(0, 1)$ e a reta $y = -1$.

B) o ponto $(1, 0)$ e a reta $x = -1$.

C) o ponto $(0, 4)$ e a reta $y = -1$.

D) o ponto $(0, 4)$ e a reta $x = -1$.

E) o ponto $(4, 0)$ e a reta $x = -1$.

Vunesp

15. (VUNESP/EsFCEx/2021) A equação $16x^2 + 25y^2 + 96x - 200y = 1056$ representa uma elipse cujo eixo menor tem extremidades nos pontos de coordenadas

A) (3, –4) e (3, 12).

B) (–3, 4) e (–3, 12).

C) (–3, –4) e (–3, 12).

D) (3, 4) e (3, 12).

E) (–3, –12) e (–3, 4).

16. (VUNESP/EsFCEx/2020) A curva de equação $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ delimita uma área plana de medida igual a:

A) $27\pi/2$ u. a.

B) 6π u. a.

C) 21π u. a.

D) $57\pi/2$ u. a.

E) 36π u. a.

17. (VUNESP/PM-SP/2016) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, y' é a equação da parábola gerada quando a curva $y = x^2 - 2x + 3$ é refletida pelo eixo x. Ligando-se os vértices das parábolas e o ponto O (origem do sistema), obtém-se um triângulo PQO, de área igual, em u.a. (unidade de área), a

A) 8.

B) 6.

C) 5.

D) 4.

E) 2.

Gabarito

1. LETRA E
2. LETRA C
3. CERTO
4. ERRADO
5. LETRA A
6. LETRA D
7. LETRA D
8. LETRA D
9. LETRA D
10. LETRA B
11. LETRA E
12. LETRA A
13. LETRA E
14. LETRA B
15. LETRA C
16. LETRA B
17. LETRA E

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:

PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.