Aula 00

Dnocs (Economista) Noções de Cálculo e Matemática Financeira

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

18 de Junho de 2024

Índice

AVISO IMPORTANTE!

Olá, Alunos (as)!

Passando para informá-los a respeito da **disposição das questões** dentro do nosso material didático. Informamos que a escolha das bancas, dentro dos nossos Livros Digitais, é feita de maneira estratégica e pedagógica pelos nossos professores a fim de proporcionar a melhor didática e o melhor direcionamento daquilo que mais se aproxima do formato de cobrança da banca do seu concurso.

Assim, o formato de questões divididas por tópico facilitará o seu processo de estudo, deixando mais alinhado às disposições constantes no edital.

No mais, continuaremos à disposição de todos no Fórum de dúvidas!

Atenciosamente,

Equipe Exatas

Estratégia Concursos

APRESENTAÇÃO DO CURSO

Olá, pessoal! Tudo bem?

É com grande satisfação que damos início ao nosso curso!

Os professores **Eduardo Mocellin, Francisco Rebouças, Luana Brandão, Djefferson Maranhão** e **Vinicius Veleda** ficarão responsáveis pelo **Livro Digital**.

Antes de continuarmos, vamos apresentar os professores do material escrito:

Eduardo Mocellin: Fala, pessoal! Meu nome é Eduardo Mocellin, sou professor de Matemática e de Raciocínio Lógico do Estratégia Concursos e engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Sinto-me feliz em poder contribuir com a sua aprovação! Não deixe de me seguir no Instagram: **@edu.mocellin**

Francisco Rebouças: Fala, alunos! Aqui é o Francisco Rebouças, professor de Matemática do Estratégia Concursos. Sou Engenheiro Aeroespacial formado pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Saiba que será uma honra fazer parte da sua jornada rumo à aprovação e que estaremos sempre aqui para auxiliá-los com o que precisarem. Um grande abraço e nos vemos nas aulas!

Luana Brandão: Oi, pessoal! O meu nome é Luana Brandão e sou professora de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduada, Mestre e Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense. Passei nos concursos de Auditor Fiscal (2009/2010) e Analista Tributário (2009) da Receita Federal e de Auditor Fiscal do Estado do Rio de Janeiro (2010). Sou Auditora Fiscal do Estado do RJ desde 2010. Vamos juntos nesse caminho até a aprovação? **@professoraluanabrandao**

Djefferson Maranhão: Olá, amigos do Estratégia Concursos, tudo bem? Meu nome é Djefferson Maranhão, professor de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduado em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Desde 2015, sou Auditor da Controladoria Geral do Estado do Maranhão (2015 - 5º lugar). Antes, porém, exerci os cargos de Analista de Sistemas na UFMA (2010 - 1º lugar) e no TJ-MA (2011 - 1º lugar). Já estive na posição de vocês e sei o quanto a vida de um concurseiro é um tanto atribulada! São vários assuntos para se dominar em um curto espaço de tempo. Por isso, contem comigo para auxiliá-los nessa jornada rumo à aprovação. Um grande abraço.

Vinicius Veleda: Olá, caros alunos! Sou Auditor Fiscal do Estado do Rio Grande do Sul. Professor de Matemática e Matemática Financeira do Estratégia Concursos. Aprovado nos Concursos de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda dos Estados do Rio Grande do Sul (SEFAZ RS - 2019), Santa Catarina (SEFAZ SC - 2018) e Goiás (SEFAZ GO - 2018). Formado em Engenharia de Petróleo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com graduação sanduíche em Engenharia Geológica pela Universidade Politécnica de Madrid (UPM). Pela UFRJ, fui campeão sul americano do Petrobowl (Buenos Aires) e, posteriormente, Campeão Mundial (Dubai). Cursei meu ensino médio na Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx). Contem comigo nessa trajetória! **@viniciusveleda**

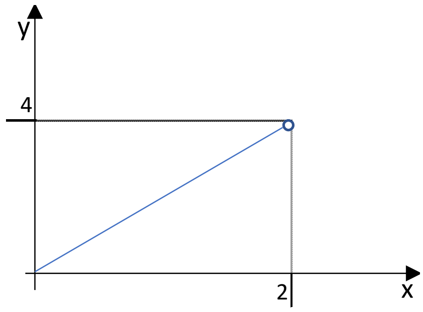
O material escrito em **PDF** está sendo construído para ser sua fonte **autossuficiente** de estudos. Isso significa que o livro digital será **completo** e **voltado para o seu edital**, justamente para que você não perca o seu precioso tempo "caçando por aí" o conteúdo que será cobrado na sua prova. Ademais, sempre que necessário, você poderá fazer perguntas sobre as aulas no **fórum de dúvidas**. **Bons estudos!**

NOÇÕES DE CÁLCULO

Limite

O estudo dos limites tem como objetivo estudar o comportamento das funções à medida que elas se aproximam a determinado valor.

Vamos supor que a função $f(x) = 2.x$ seja válida no intervalo [0, 2), isto é, para valores $0 \leq x < 2$, conforme ilustrado abaixo.



Essa função **não** está definida para $x = 2$, mas está definida para valores **muito próximos** desse valor. Por exemplo, para $x = 1{,}999$, o valor da função nesse ponto é:

$$f(1{,}999) = 2 \times 1{,}999 = 3{,}998$$

A função também existe para $x = 1{,}9999$, para $x = 1{,}99999$, ... enfim, para valores extremamente próximos de 2 e o seu resultado será um valor extremamente próximo de 4. Assim, dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a** 2 é igual a 4:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Nesse caso, calculamos o limite da função **substituindo o valor de x pelo seu limite**:

$$\lim_{x \to 2} \; 2x = 2 \times 2 = 4$$

Vejamos outro exemplo:

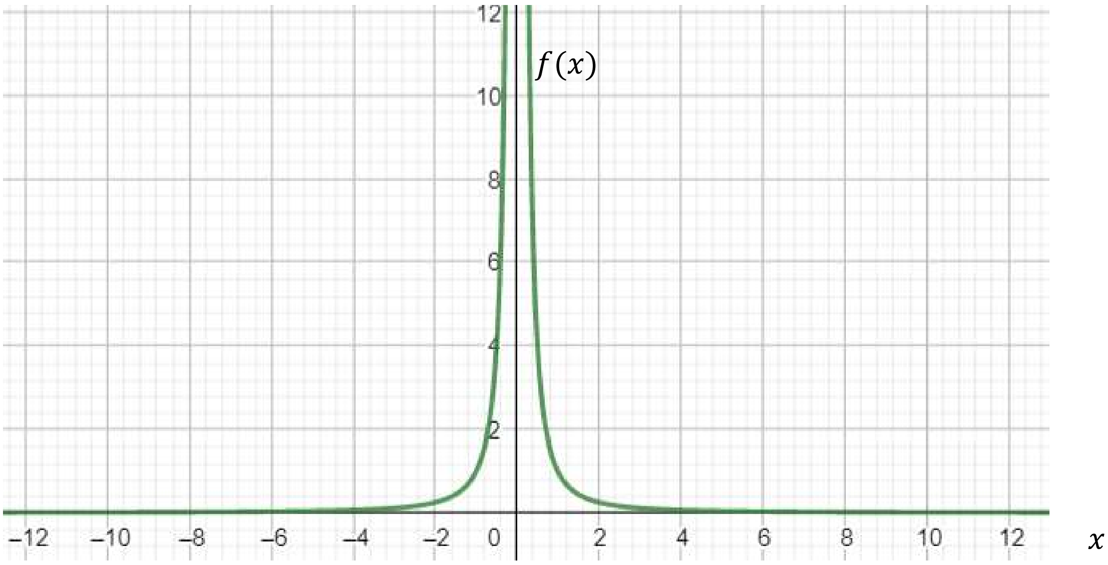
$$\lim_{x \to 3} \; x^2 - 2x + 1$$

Para resolver esse limite, basta substituirmos x por 3, que é o valor de seu limite:

$$\lim_{x \to 3} \; x^2 - 2x + 1 = 3^2 - 2 \times 3 + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$$

Assíntotas

Agora, vamos considerar a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, ilustrada a seguir:



Podemos observar que à medida que $\boldsymbol{x}$ **se aproxima de 0**, a função assume valores cada vez **maiores**. Nessa situação, temos que o **limite de $\boldsymbol{f(x)}$ quando $\boldsymbol{x}$ tende a 0 é infinito**:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Sempre que houver uma **divisão de um número finito por 0**, o limite será igual a **infinito**, se o numerador for positivo (ou menos infinito, se o numerador for negativo), o que caracteriza uma **assíntota vertical**.

De maneira geral, uma assíntota ocorre quando uma função se aproxima cada vez mais a uma **reta** sem interceptá-la. Em uma assíntota vertical, a função se aproxima de uma reta vertical (no caso, da reta $x = 0$).

Por outro lado, o gráfico acima também mostra que à medida que $\boldsymbol{x}$ **cresce**, a função assume valores cada vez mais próximos de 0. Nessa situação, temos a chamada **assíntota horizontal**, pois a função se aproxima horizontalmente a uma reta, no caso, o eixo x (reta $y = 0$).

Em outras palavras , **o limite de $\boldsymbol{f(x)}$ quando $\boldsymbol{x}$ tende a infinito é 0**:

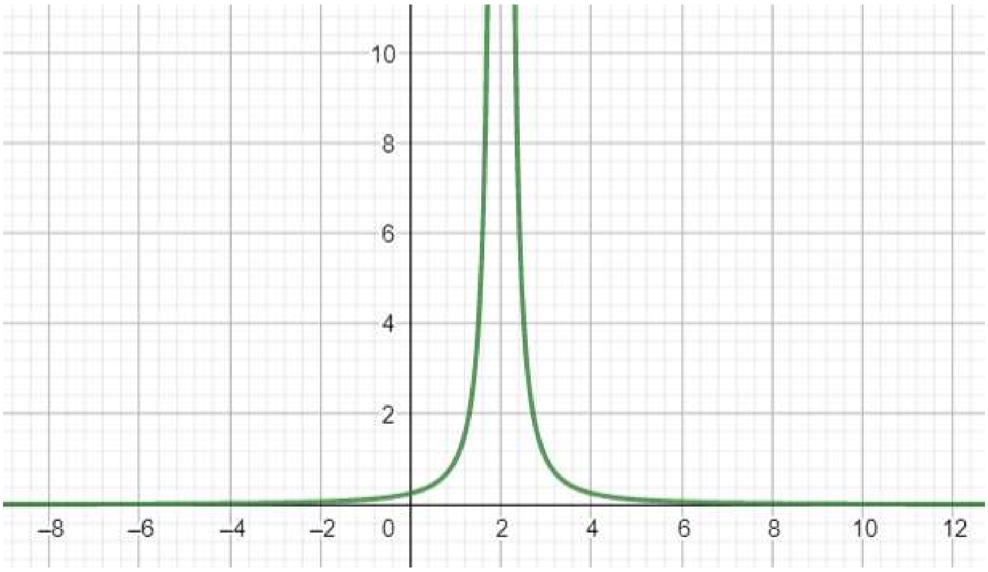
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Sempre que houver uma **divisão de um número finito por infinito**, o resultado será igual a **zero**.

Mas há outras assíntotas possíveis. Por exemplo, uma função do tipo $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$, em que a é uma constante qualquer, apresenta uma **assíntota vertical** para $\boldsymbol{x \to a}$. Isso porque o denominador é nulo para $x = a$ e, assim, teremos uma razão entre um número finito e zero, cujo resultado é infinito:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^2} = \infty$$

Por exemplo, para $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$, temos uma **assíntota vertical** para $\boldsymbol{x \to 2}$, conforme ilustrado no gráfico a seguir:



(2017 – IFB - *Adaptada*) Julgue a seguinte afirmação relativa à função $\frac{2x^3-2x}{x^2-5x+4}$.

Tem uma assíntota vertical em x = 4

Comentário:

Substituindo x = 4 na função, obteremos:

$$\frac{2 \times 4^3 - 2 \times 4}{4^2 - 5 \times 4 + 4} = \frac{2 \times 64 - 8}{16 - 20 + 4} = \frac{128 - 8}{0} = \frac{120}{0}$$

Como temos um número finito dividido por zero, o resultado é infinito. Em outras palavras, essa função tende a infinito, quando x tende a 4:

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x^3 - 2x}{x^2 - 5x + 4} = \infty$$

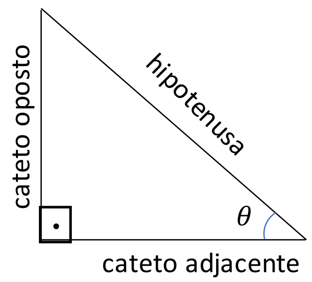
Isso significa que temos uma assíntota vertical para $x \to 4$.

Resposta: Certo

Diversas questões de cálculo envolvem funções trigonométricas. Por isso, antes de seguirmos com o estudo de assíntotas, veremos um breve resumo de razões trigonométricas (incluindo as razões inversas), seguido das funções de arco, que correspondem ao inverso das funções trigonométricas.

Razões Trigonométricas

As razões trigonométricas são relacionadas aos triângulos retângulos, isto é, aqueles que possuem um ângulo de 90º. São elas: seno, cosseno e tangente.

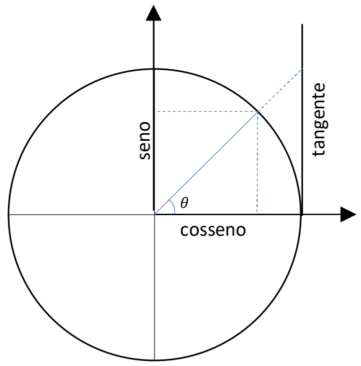


$$seno = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$cosseno = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$tangente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{seno}{cosseno}$$

No círculo trigonométrico, representado a seguir, o seno corresponde à projeção vertical (no eixo y) para o ângulo θ desejado; e o cosseno corresponde à projeção horizontal (no eixo x)[1].



Considerando que o círculo tem raio 1 e que o seu centro corresponde ao ponto (0,0), observa-se que o **seno e o cosseno variam de [-1,1]**. O seno é positivo para ângulos entre 0º e 180º; e negativo para ângulos entre 180º e 360º. Por outro lado, o cosseno é positivo para ângulos entre 0º e 90º e entre 270º e 360º; e negativo para ângulos entre 90º e 270º.

Já a tangente é representada por uma reta vertical tangente e corresponde à interseção entre a reta do ângulo θ desejado e essa reta vertical. O seu valor equivale à distância entre esse ponto de interseção e o eixo y horizontal. Pontue-se que a **tangente pode assumir qualquer valor real**, $(-\infty, \infty)$.

A partir do círculo trigonométrico, podemos deduzir as razões trigonométricas para os seguintes ângulos:

[1] Se precisar de ajuda para lembrar qual função está associada a qual eixo, memorize que o cosseno está "com sono" (deitado, no eixo horizontal) e que o seno está "sem sono" (em pé, no eixo vertical)

$$\boldsymbol{sen(0) = 0}, \qquad \boldsymbol{cos(0) = 1}, \qquad tg(0) = 0$$

$$sen(90º) = 1, \qquad cos(90º) = 0$$

$$sen(180º) = 0, \qquad cos(180º) = -1, \qquad tg(180º) = 0$$

$$sen(270º) = -1, \qquad cos(270º) = 0$$

A tangente não está definida para $x \to 90º$ e $x \to 180º$.

Vale ressaltar o chamado limite trigonométrico fundamental:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ (x)}{x} = 1$$

Os ângulos também podem ser representados em **radianos**, cuja medida corresponde à razão entre o comprimento de um arco e o seu ângulo:

$$\alpha(rad) = \frac{L}{r}$$

Para um círculo completo, o comprimento do arco (perímetro do círculo) é $L = 2\pi r$, em que π é uma constante irracional (isto é, sem dízima periódica) aproximadamente igual a 3,14. Assim, o ângulo medido em radianos que corresponde a 360º é:

$$\alpha(rad) = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Considerando que **360º = 2π radianos**, podemos representar os demais arcos em radianos. Por exemplo, 180º = π radianos, 90º = $\frac{\pi}{2}$ radianos, 270º = $\frac{3\pi}{2}$.

Pela fórmula de Pitágoras, de que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, obtemos a **Primeira Relação Fundamental da Trigonometria**, qual seja de que o quadrado do cosseno mais o quadrado do seno é igual ao quadrado do raio do círculo trigonométrico ($raio = 1 \to raio^2 = 1^2 = 1$):

$$[\cos\ (x)]^2 + [\text{sen}\ (x)]^2 = 1$$

Pode ser útil conhecer a fórmula do seno da soma ou diferença de dois arcos:

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}(a).\cos(b) \pm \operatorname{sen}(b).\cos\,(a)$$

Em relação ao cosseno, temos:

$$\cos(a \pm b) = \cos(a).\cos(b) \mp \operatorname{sen}(a).\operatorname{sen}\,(b)$$

(2021 – Prefeitura de Roseira/SP) Quanto vale?

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{x + 3 \times \cos\,(x)} \right)$$

a) 2/3

b) 1

c) 0

d) 3/2

Comentário:

Substituindo x = 0 na expressão do limite, obteremos:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{x + 3 \times \cos\,(x)} \right) = \frac{2}{0 + 3 \times \cos\,(0)}$$

Sabendo que cos(0) = 1, temos:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{x + 3 \times \cos\,(x)} \right) = \frac{2}{3 \times 1} = \frac{2}{3}$$

Gabarito: A

Razões Trigonométricas Inversas

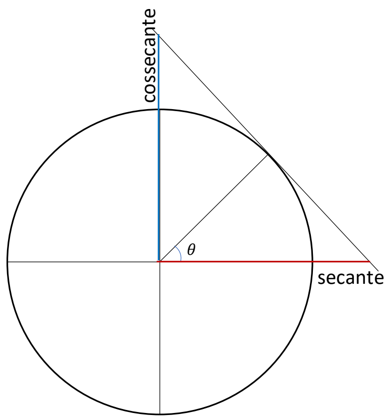
As razões trigonométricas inversas são a secante (inverso do cosseno), a cossecante (inverso do seno) e a cotangente (inverso da tangente):

$$secante = \frac{1}{cosseno}$$

$$cossecante = \frac{1}{seno}$$

$$cotangente = \frac{1}{tangente}$$

No círculo trigonométrico, a secante e a cossecante podem ser visualizadas traçando-se uma reta **perpendicular** ao círculo no ponto corresponde ao ângulo θ desejado. A **secante** será a interceptação dessa reta no **eixo x** (mesmo eixo do cosseno) e a **cossecante** será a interceptação dessa reta no **eixo y** (mesmo eixo do seno), conforme ilustrado a seguir.



Pode-se deduzir que:

$$sec(0) = 1$$

$$cossec(90º) = 1$$

$$sec(180º) = -1$$

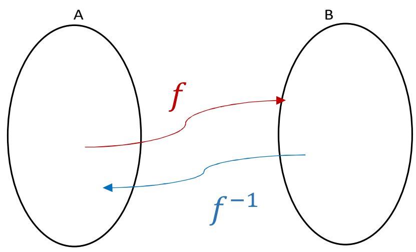
$$cosec(270º) = -1$$

Pontue-se que a secante não está definida para $90º$ e nem para $270º$, em que o cosseno é igual a zero; similarmente, a cossecante não está definida para $0º$ e nem para $180º$, em que o seno é igual a zero.

Inverso das Funções Trigonométricas

O inverso das funções trigonométricas são as chamadas **funções de arco**. Enquanto as funções trigonométricas retornam um **valor real** para um **ângulo**, as funções de arco retornam um valor de **ângulo** para um **valor real**.

De modo geral, se uma função f tem o conjunto A como domínio e o conjunto B como contradomínio, na função inversa $\boldsymbol{f^{-1}}$, esses conjuntos se **invertem**:



Para calcular a função inversa de uma função $y = f(x)$, procuramos **isolar a incógnita $\boldsymbol{x}$**, em vez de y:

$$y = f(x) \rightarrow x = f^{-1}(y)$$

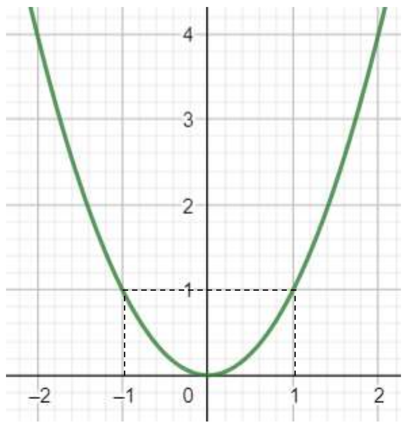
Por exemplo, sendo $y = x^2$, a sua inversa é:

$$x = y^2$$

$$y = \sqrt{x}$$

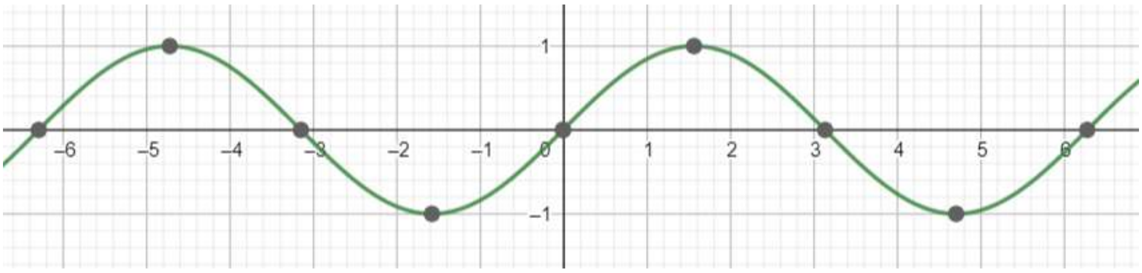
Logo, a função inversa de $y = f(x)$ é $f^{-1}(y) = \sqrt{x}$.

Para que essa inversão seja possível, a função f precisa ser bijetora, ou seja, não pode haver mais de um elemento do domínio associado a um mesmo elemento da imagem. A função $y = x^2$ não é bijetora, pois há dois valores de x associados a um mesmo valor de y, conforme representado no gráfico a seguir:



Logo, para que a função $y = x^2$ admita inversa, é necessário restringir o seu domínio, de modo que cada elemento da imagem esteja associado a um único elemento do domínio. Por exemplo, essa função admite inversa para o conjunto dos números reais **positivos**.

No entanto, as funções trigonométricas são **cíclicas**, apresentando um mesmo valor de imagem para diversos valores do domínio, conforme ilustrado a seguir para a função seno:

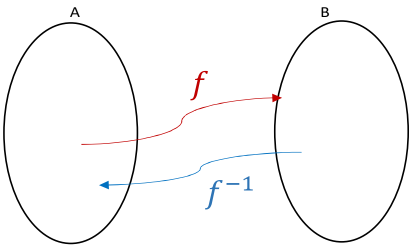


Logo, para admitirem inversas, o domínio das funções trigonométricas precisa ser restrito a determinado subconjunto dos números reais.

O domínio da função **seno** precisa estar limitado entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e a sua imagem corresponde ao intervalo $[-1, 1]$. Assim, podemos definir a função arco seno, cujo domínio é o intervalo [-1, 1] e a imagem é o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\boxed{y = \text{sen}(x) \rightarrow x = \text{arcsen}(y)}$$

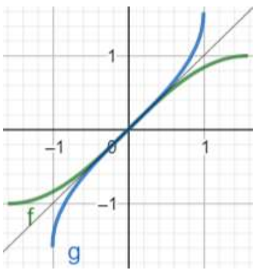
Vale pontuar que quando aplicamos as funções f e f^{-1} uma sobre o resultado da outra, voltamos para o mesmo ponto de partida, conforme ilustrado a seguir.



Consequentemente, temos:

$$\text{sen}(\text{arcsen}\,(x)) = x$$

Graficamente, uma função qualquer f é simétrica à sua inversa f^{-1} em relação ao eixo $y = x$. A seguir, representamos as funções **seno (f)** e **arco seno (g)**:



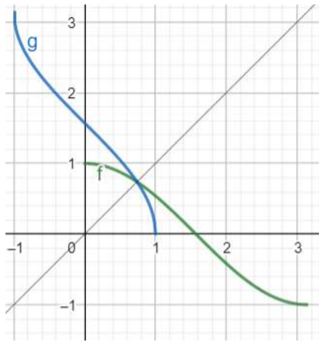
Analogamente, o domínio da função **cosseno** precisa estar limitado entre $[0, \pi]$ e sua imagem também corresponde ao intervalo [-1, 1]. Assim, a função arco cosseno, cujo domínio é o intervalo [-1, 1] e cuja imagem é o intervalo $[0, \pi]$, é dada por:

$$\boxed{y = \cos(x) \rightarrow x = \arccos(y)}$$

Consequentemente, temos:

$$\cos(\arccos\,(x)) = x$$

A seguir, representamos as funções **cosseno (f)** e **arco cosseno (g)**:



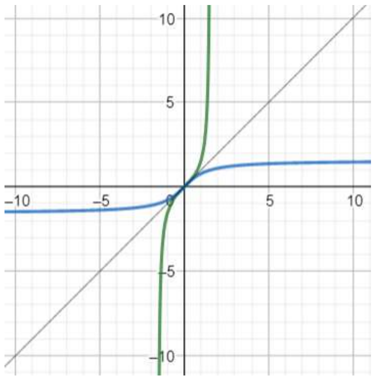
O domínio da função **tangente** também precisa estar limitado entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (assim como o seno), mas sua imagem corresponde a todos os números reais $(-\infty, \infty)$. E a função arco tangente, cujo domínio corresponde a todos os números reais e cuja imagem é o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é dada por:

$$\boxed{y = \text{tg}(x) \rightarrow x = \text{arctg}(y)}$$

Consequentemente, temos:

$$\text{tg}(\text{arctg}\,(x)) = x$$

A seguir, representamos as funções **tangente** e **arco tangente**:



Observa-se que essas funções se tangenciam no ponto (0,0), pois $\text{tg}(0) = 0$, logo $\text{arctg}(0) = 0$.

Ademais, a **função tangente** possui **assíntotas verticais** para os limites do intervalo, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = -\frac{\pi}{2}$; enquanto a **função arco tangente** possui **assíntotas horizontais** para $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$.

Acrescente-se que as razões trigonométricas inversas (secante, cossecante e cotangente) também possuem suas respectivas funções de arco.

A partir da **Primeira Relação Fundamental da Trigonometria** e das definições das funções arco que vimos, é possível demonstrar as seguintes identidades:

$$\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sec(\text{arctg}(x)) = \sqrt{1 + x^2}$$

Vamos às demonstrações. Para encontrar a primeira identidade, utilizamos inicialmente a Primeira Relação Fundamental da Trigonometria, $[\cos(x)]^2 + [\text{sen}(x)]^2 = 1$, temos:

$$[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1$$

Sabendo que $\text{sen}(\text{arcsen}(x)) = x$, temos:

$$[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1$$

$$[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2$$

$$\mathbf{\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1 - x^2}}$$

Utilizamos o mesmo caminho para encontrar a segunda identidade:

$$[\text{sen}(\arccos(x))]^2 + [\cos(\arccos(x))]^2 = 1$$

Sabendo que $\cos(\arccos(x)) = x$, temos:

$$[\text{sen}(\arccos(x))]^2 + x^2 = 1$$

$$\left[\mathrm{sen}\big(\arccos(x)\big)\right]^2 = 1 - x^2$$

$$\mathbf{sen}\big(\mathbf{arccos}(\boldsymbol{x})\big) = \sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$$

Em relação à terceira identidade, utilizamos a mesma relação:

$$\left[\mathrm{sen}\big(\mathrm{arctg}(x)\big)\right]^2 + \left[\cos\big(\mathrm{arctg}(x)\big)\right]^2 = 1$$

Dividindo ambos os lados da equação por $\left[\cos\big(\mathrm{arctg}(x)\big)\right]^2$, temos:

$$\frac{\left[\mathrm{sen}\big(\mathrm{arctg}(x)\big)\right]^2 + \left[\cos\big(\mathrm{arctg}(x)\big)\right]^2}{\left[\cos\big(\mathrm{arctg}(x)\big)\right]^2} = \frac{1}{\left[\cos\big(\mathrm{arctg}(x)\big)\right]^2}$$

Sabendo que $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$ e que $\sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$, temos:

$$\left[\mathrm{tg}\big(\mathrm{arctg}(x)\big)\right]^2 + 1 = \left[\sec\big(\mathrm{arctg}(x)\big)\right]^2$$

Sabendo que $\mathrm{tg}\big(\mathrm{arctg}(x)\big) = x$, temos:

$$\left[\sec\big(\mathrm{arctg}(x)\big)\right]^2 = 1 + x^2$$

$$\mathbf{sec}\big(\mathbf{arctg}(\boldsymbol{x})\big) = \sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$$

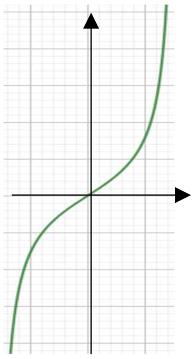
(2018 – Prefeitura de Barra Velha/SC - *Adaptada*) Quanto às particularidades matemáticas das funções trigonométricas, julgue o item subsequente.

Aproximando a função tan (x) de $x = \frac{\pi}{2}$, a função tende a uma assíntota horizontal.

Comentário:

A função tangente não está definida para $\frac{\pi}{2} = 90^{o}$, conforme gráfico da tangente a seguir, para o intervalo $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Podemos observar que a função apresenta uma assíntota, porém trata-se de uma assíntota vertical e não horizontal. Logo, a afirmativa está incorreta.



Resposta: Errado.

Limites Indeterminados

Pode ser que ao aplicarmos o valor do limite, encontremos um resultado que não seja possível de calcular, como $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Nessas situações, precisaremos trabalhar as expressões para encontrarmos o valor do limite, se existir, seja ele finito ou infinito. Vamos supor o seguinte limite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x}$$

Se substituirmos x por 0, o resultado será $\frac{\infty^2}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$, que é **indefinido**. Porém, podemos simplificar a expressão:

$$\frac{x^2}{x} = x$$

Logo, o limite desejado é:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

De modo geral, quando temos um limite para **x tendendo ao infinito** de uma razão entre polinômios (isto é, soma ou diferença entre potências de x), podemos resolver a indeterminação **dividindo todos os termos da expressão pela maior potência de x que ocorre no denominador**.

Suponha o seguinte exemplo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5}{6x^2 + 8}$$

Se aplicarmos $x \to \infty$, obteremos a razão $\frac{\infty}{\infty}$, que é **indefinida**. Para resolver essa indefinição, vamos dividir todos os termos pela maior potência de x que aparece no denominador, no caso, x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{6x^2+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{8}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x^2}}{6+\frac{8}{x^2}}$$

A razão de um número finito dividido por um infinito é igual a zero:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}=0$$

Logo, o limite desejado é:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{6x^2+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Vejamos outro exemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^3}{2x^3+x}$$

Novamente, devemos dividir todos os termos pela maior potência de x presente no denominador, x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^3}{2x^3+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^3}+\frac{4x^3}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{2+\frac{1}{x^2}}$$

A razão de um número finito dividido por um infinito é igual a zero:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

Logo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^3}{2x^3+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^3}+\frac{4x^3}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{2}$$

Assim, temos a razão entre infinito no numerador e um número finito no denominador, cujo resultado é infinito:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^3}{2x^3+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{2}=\infty$$

Para resolver limites de expressões polinomiais envolvendo **outros valores de x**, é importante lembrar os **produtos notáveis**, que poderão ajudar a simplificar expressões:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$$

Por exemplo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$$

Se substituirmos $x = 2$ diretamente na expressão, obteremos $\frac{2^2 - 4.2 + 4}{2-2} = \frac{4-8+4}{0} = \frac{0}{0}$. Logo, para calcularmos o limite, precisamos simplificar essa expressão. O numerador pode ser representado como (produto notável):

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

Logo, o limite desejado corresponde à seguinte expressão:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x \to 2}\ x - 2 = 2 - 2 = 0$$

Vejamos outro exemplo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$$

Se substituirmos $x = 3$ diretamente na expressão, obteremos $\frac{3-3}{3^2-9} = \frac{0}{9-9} = \frac{0}{0}$. Porém, o denominador pode ser representado como (produto notável):

$$x^2 - 9 = (x+3).(x-3)$$

Assim, temos:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x+3).(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Caso a expressão de segundo grau não possa ser simplificada por um dos produtos notáveis, pode ser necessário utilizar as suas raízes para apresentá-la como um produto de dois fatores. Por exemplo, suponha o seguinte limite:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12}$$

Se substituirmos x = 4 na expressão, obteremos $\frac{4-4}{4^2-4-12} = \frac{0}{16-16} = \frac{0}{0}$. Porém, podemos representar o denominador como um produto de dois fatores, encontrando as raízes da equação:

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+7}{2} = 4, \qquad x_2 = \frac{1-7}{2} = -3$$

Portanto, podemos representar o denominador como um produto de $(x - x_1).(x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são as raízes que acabamos de calcular:

$$x^2 - x - 12 = (x-4).(x+3)$$

Com isso, podemos calcular o limite:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4).(x+3)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{4+3} = \frac{1}{7}$$

Outro recurso importante é a **substituição de variáveis**, principalmente quando a expressão envolver a raiz de uma variável, $\sqrt{x}$, por exemplo. Nessa situação, o primeiro passo é **substituir $\sqrt{x}$** por uma outra variável, como y. Consequentemente, se x também estiver presente na expressão, ele deverá ser substituído por y^2.

Por exemplo, considere a seguinte expressão:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

Se substituirmos x = 4 na expressão, obteremos $\frac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$. Porém, podemos substituir $\sqrt{x}$ por y. Consequentemente, x deverá ser substituído por y^2:

$$\sqrt{x} \to y$$

$$x \to y^2$$

Assim, teremos a seguinte expressão:

$$\frac{y-2}{y^2-4}$$

Pelo produto notável $(a+b).(a-b)=a^2-b^2$, podemos representar o denominador como:

$$y^2-4=(y+2).(y-2)$$

Assim, a expressão se torna:

$$\frac{y-2}{y^2-4}=\frac{y-2}{(y+2).(y-2)}=\frac{1}{y+2}$$

Sabendo que $y=\sqrt{x}$, podemos calcular o valor do limite:

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

(2020 – COTEC) Considere as afirmações a seguir:

I - $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4}=\frac{-3}{4}$

II - $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

III - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2+x)^2-4}{x}=-4$

É correto afirmar que apenas

a) I e II são verdadeiras.

b) II e III são verdadeiras.

c) I e III são verdadeiras.

d) III é verdadeira.

e) I é verdadeira.

Comentário:

Em relação à primeira afirmação, se substituirmos x = 2 na expressão, obteremos:

$$\frac{2^2-7\times 2+10}{2^2-4}=\frac{4-14+10}{4-4}=\frac{0}{0}$$

No entanto, podemos simplificar tanto o numerador quanto o denominador. Utilizando a fórmula de Bhaskara para o numerador, $x^2 - 7x + 10$, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (10) = 49 - 40 = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{7+3}{2} = 5, \qquad x_2 = \frac{7-3}{2} = 2$$

Logo, podemos reescrever o numerador como:

$$x^2 - 7x + 10 = (x-5).(x-2)$$

E o denominador pode ser simplificado pelo produto notável:

$$a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$$

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

Logo, a expressão do limite da afirmação I pode ser descrita como:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-5).(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-5}{x+2} = \frac{-3}{4}$$

Portanto, a afirmação I está correta.

A substituição direta de x = 3 na função indicada na afirmação II resulta em:

$$\frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

Porém, podemos utilizar o produto notável $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$ para simplificar o numerador:

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

E o limite da afirmação II pode ser descrito como:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} x + 3 = 3 + 3 = 6$$

Portanto, a afirmação II está correta.

Por fim, a substituição direta de x = 0 na função indicada na afirmação III resulta em:

$$\frac{(2+0)^2 - 4}{0} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0}$$

No entanto, podemos abrir a expressão do numerador:

$$(2+x)^2 - 4 = (2^2 + 4x + x^2) - 4 = 4 + 4x + x^2 - 4 = 4x + x^2$$

Logo, a expressão da afirmação III corresponde a:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2+x)^2 - 4}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{4x + x^2}{x} = \lim_{x \to 0} 4 + x = 4 + 0 = 4$$

Logo, a afirmação III está incorreta.

Gabarito: A

(2019 – IDHTEC) Determine $\lim_{x\to 25}\left(\frac{x-25}{x-15-2\sqrt{x}}\right)$

a) 5/4

b) 4/5

c) 3/5

d) 2/5

e) 3/4

Comentário:

Se substituirmos x = 25 diretamente na expressão do limite, obteremos:

$$\frac{25-25}{25-15-2.\sqrt{25}}=\frac{0}{10-2\times 5}=\frac{0}{0}$$

Para resolver esse limite, vamos substituir $\sqrt{x}$ por y:

$$\sqrt{x}\to y$$
$$x\to y^2$$

Assim, teremos a seguinte expressão:

$$\frac{y^2-25}{y^2-15-2y}$$

Pelo produto notável $(a+b).(a-b)=a^2-b^2$, podemos representar o denominador como:

$$y^2-25=(y+5).(y-5)$$

Para representar o denominador por fatores, precisamos encontrar as raízes da equação $y^2-2y-15=0$

Utilizando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$\Delta= b^2-4ac=(-2)^2-4\times 1\times(-15)=4+60=64$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{64}}{2\times 1}=\frac{2\pm 8}{2}=1\pm 4$$

$$x_1=5,\qquad x_2=-3$$

Logo, o denominador pode ser expresso como:

$$y^2-2y-15=(y-5).(y+3)$$

Portanto, podemos simplificar a expressão da seguinte forma:

$$\frac{y^2-25}{y^2-15-2y}=\frac{(y+5).(y-5)}{(y-5).(y+3)}=\frac{(y+5)}{(y+3)}$$

Sabendo que $y=\sqrt{x}$, podemos calcular o limite desejado:

$$\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{x-15-2\sqrt{x}}=\lim_{x\to 25}\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{25}+5}{\sqrt{25}+3}=\frac{5+5}{5+3}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

Gabarito: A

Limite e Continuidade

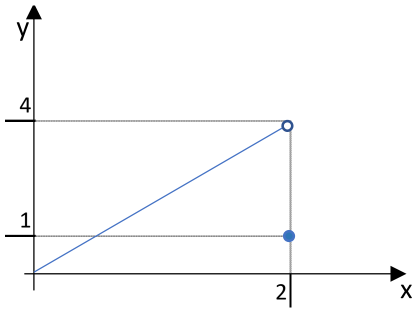
O limite da função quando x tende a determinado valor a pode ser **diferente** do verdadeiro valor da função naquele ponto a:

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

Poderíamos definir, por exemplo, uma função da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & para\ 0 \leq x < 2 \\ 1, & para\ x = 2 \end{cases}$$

Essa função corresponde ao seguinte gráfico:



Podemos observar que o valor do limite da função quando x tende a 2 continua sendo 4:

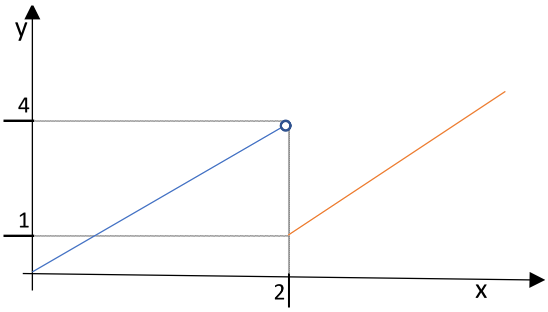
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Porém, o valor da função para $x = 2$ é **diferente**:

$$f(2) = 1$$

Inclusive, é possível que a função **não possua um limite**, nem finito, nem infinito, para determinado valor. Isso ocorre quando o limite calculado por um caminho é **diferente** do limite calculado por outro caminho.

No gráfico ilustrado a seguir, observamos que o limite do primeiro trecho da função (em azul), referente a valores inferiores a 2, quando x tende a 2, é $\boldsymbol{f(x) = 4}$. Porém, o limite do segundo **trecho** da função (em vermelho), referente a valores de x superiores a 2, é $\boldsymbol{f(x) = 1.}$



Temos, portanto, **limites laterais distintos**.

O chamado limite à esquerda de um valor a se refere aos valores menores que a, sendo indicado por a^-:

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

No nosso exemplo, o limite à esquerda pode ser calculado pela função indicada em azul, $\boldsymbol{f(x) = 2x}$:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 \times 2 = 4$$

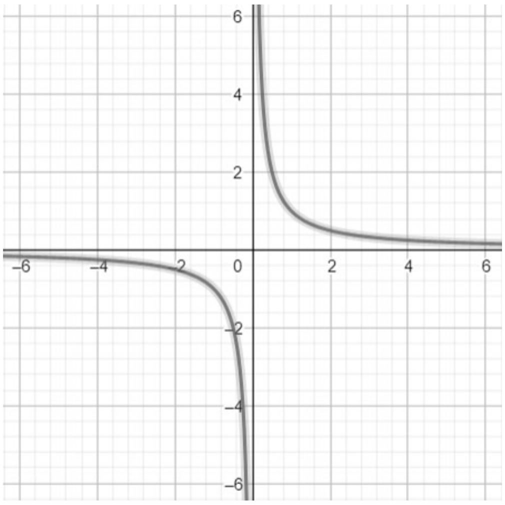
O chamado limite à direita de um valor a se refere aos valores maiores que a, sendo indicado por a^+:

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

No nosso exemplo, o limite à direita pode ser calculado pela função indicada em vermelho (a qual apresenta a mesma inclinação da reta azul, mas deslocada em 3 unidades para baixo), $f(x) = 2x - 3$:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 \times 2 - 3 = 1$$

Essa ausência de limite ocorre com a função $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x \to 0$, conforme indicado no gráfico a seguir:



Podemos observar que quando x tende a 0 pela direita, isto é, em relação aos valores superiores a 0, a função tende a infinito:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

E quando x tende a 0 pela esquerda, isto é, em relação aos valores inferiores a 0, a função tende a menos infinito:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Quando isso ocorre, dizemos que a função **não é contínua** no domínio considerado.

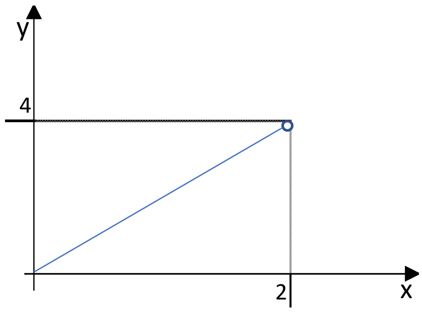
Podemos dizer (sem rigor matemático) que uma função é contínua em um domínio quando pudermos desenhar o seu gráfico **sem retirar o lápis do papel**. Isso não pode ser feito para os exemplos que acabamos de ver. No primeiro caso (retas azul e vermelha), ao chegarmos no ponto x = 2 teríamos que tirar o lápis do papel para continuar desenhando a função; e no segundo caso, $f(x) = \frac{1}{x}$, temos que tirar o lápis do papel quando chegamos no ponto n = 0. De fato, essas funções não são contínuas.

Matematicamente, a definição de função contínua em um domínio é de que o limite da função em um ponto a existe (ou seja, os limites laterais são iguais) e é igual ao valor da função naquele ponto a, para todos os pontos do domínio da função:

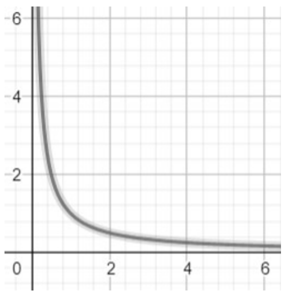
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Isso não impede que o domínio seja definido de **forma aberta**, isto é, sem incluir os extremos. Por exemplo, a função que vimos no início da aula, ilustrada novamente a seguir, é **contínua** no domínio [0,2).



Também é possível que o limite de uma função contínua seja **infinito** para um ou ambos os extremos do intervalo do domínio. Por exemplo, a função $\frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $(0, +\infty)$:



(2021 – Prefeitura de Santana do Livramento/RS) O limite de uma função só existe quando:

a) os limites laterais são diferentes.

b) é definida em, pelo menos, 70% do seu domínio.

c) os limites laterais são iguais.

d) nenhuma das anteriores.

Comentário:

O limite de uma função existe somente quando os limites laterais são iguais:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Gabarito: C

(2017 – IF-TO - *Adaptada*) Dada uma função f: ℝ → ℝ contínua em um intervalo I = (a, b), julgue as seguintes afirmações:

I - Para todo c ∈ I, tem-se que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

II - Para todo c ∈ I, existe $\lim_{x \to c} f(x)$.

III - É possível que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Comentário:

A definição de função contínua em um domínio é de que o limite da função existe para todos os pontos do domínio e, para cada ponto, o valor do limite é igual ao valor da função no referido ponto.

Logo, as afirmativas I e II estão corretas, pois para todos os pontos do domínio (que a questão chamou de I), o limite da função existe (afirmativa I correta) e é igual ao valor da função no ponto (afirmativa II correta).

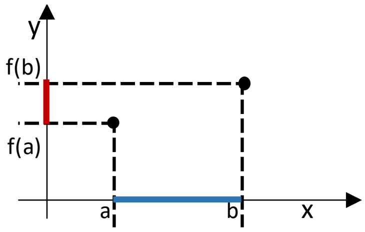
Em relação à afirmativa III, é possível que o limite de uma função contínua seja infinito para um ou ambos os extremos do intervalo do domínio. Logo, é possível que o limite da função para quando x tende ao extremo inferior do intervalo seja infinito

Resposta: Todas as afirmativas corretas.

Teorema do Valor Intermediário

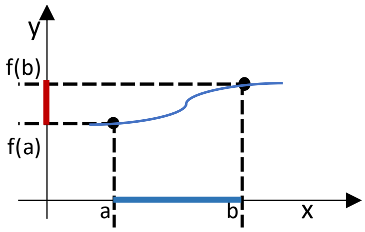
O Teorema do Valor Intermediário afirma que sendo f uma função **contínua** no intervalo $[a, b]$, então para qualquer valor L da função entre $f(a)$ e $f(b)$, isto é, $f(a) < L < f(b)$, haverá um valor c entre a e b, isto é, $a < c < v$, tal que $f(c) = L$.

Para ilustrar, a seguir representamos dois pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b)$. O teorema afirma que a função assumirá qualquer valor entre $f(a)$ e $f(b)$, indicado em vermelho, em algum ponto c no intervalo $[a, b]$, indicado em azul. Em outras palavras, **a função irá assumir todos os valores entre $\boldsymbol{f(a)}$ e $\boldsymbol{f(b)}$.** Isso se a função for contínua.



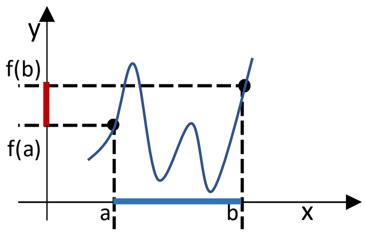
De fato, não temos como chegar de $(a, f(a))$ até $(b, f(b)$ sem passar por todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$ e sem tirar o lápis do papel.

Por exemplo, a função pode ser:



Pode-se observar que a função passa por todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, no intervalo $[a, b]$.

Também podemos ter uma função da seguinte forma:



Nesse caso, a função também passa por todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, no intervalo $[a, b]$, inclusive mais de uma vez.

Observe que a função **pode** assumir valores **menores** que $f(a)$ ou **maiores** que $f(b)$ no intervalo $[a, b]$, mas necessariamente assumirá os valores intermediários entre a e b.

(2018 – Prefeitura de Cristalina/GO) Sendo *f* uma função contínua, tal que *f*(– 2) = 4 e f(3) = – 1, o teorema do valor intermediário garante que:

a) f possua uma raiz no intervalo (–2, 3).

b) f possua uma raiz no intervalo (–1, 4).

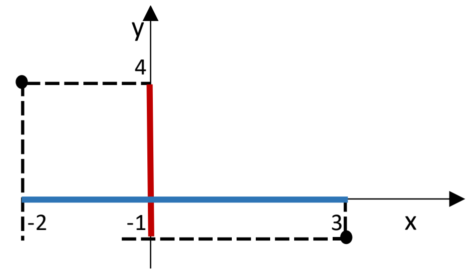
c) f não assuma valores menores que -1.

d) f não assuma valores maiores que 4.

e) f seja derivável, além de contínua.

Comentário:

O Teorema do Valor Intermediário afirma que a função passará por todos os valores entre -1 e 4 (indicado pela reta vermelho), em algum ponto no intervalo (-2, 3), indicado pela reta azul.



Assim, em algum ponto c do intervalo (-2, 3), a reta terá valor f(c) = 0, uma vez que 0 é superior a f(3) = -1 e inferior a f(-2) = 4. Nessa situação, dizemos que c é a raiz da função. Logo, podemos concluir que existe pelo menos uma raiz no intervalo (-2, 3).

O Teorema não impede que existam valores menores que -1 ou maiores que 4 (alternativas C e D incorretas).

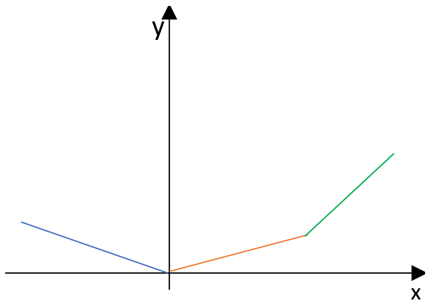
Gabarito: A

NOÇÕES DE CÁLCULO

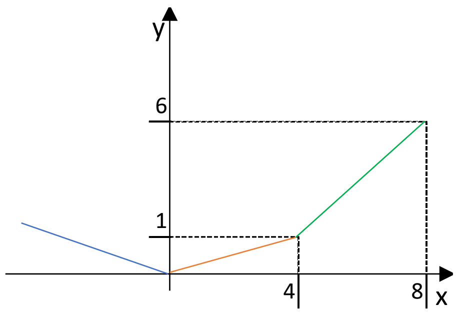
Derivada

A derivada de uma função $y = f(x)$ em um ponto x_0 corresponde à **taxa de variação** de y, isto é, o quanto y, varia naquele ponto x_0. Por exemplo, a **aceleração** representa justamente a **variação da velocidade** - quando você acelera o carro, a sua velocidade **aumenta**, isto é, **varia positivamente**. Isso significa que a aceleração é a derivada da velocidade.

A derivada representa tanto o **sentido** quanto o **montante** dessa variação. No gráfico a seguir, o primeiro segmento da função (em azul) é **decrescente**, isto é, a função decresce com o aumento de x; e os demais segmentos são **crescentes**, ou seja, a função cresce com o aumento de x. Consequentemente, a derivada da função no primeiro segmento será **negativa** e nos demais, **positiva**.

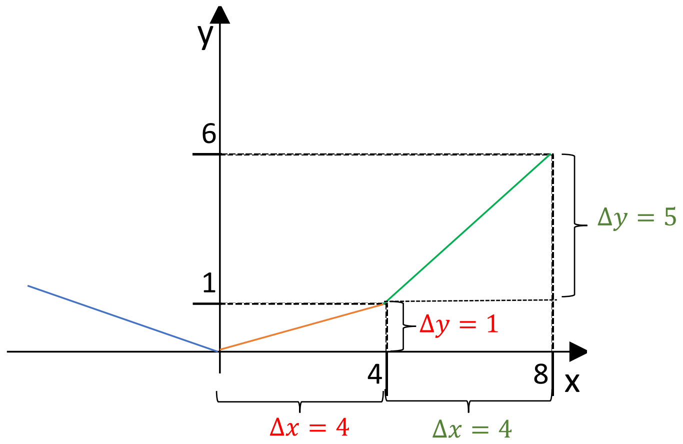


Além disso, podemos observar que o terceiro trecho (em verde) tem uma **inclinação maior** do que o segundo trecho (em vermelho). Isso significa que para um mesmo aumento de x, o trecho em verde **cresce mais** do que o trecho em vermelho. Para ilustrar isso, suponha que a função assuma os seguintes valores:



Podemos observar que para um aumento de 4 unidades de x, y aumentou **1 unidade** no trecho em vermelho e **5 unidades** no trecho verde. Como y aumenta mais para cada aumento de x no trecho verde, a **derivada da função será maior no trecho verde** do que no trecho vermelho.

Isso porque a **derivada** representa justamente essa **razão entre a variação de y e a variação de x**. Utilizando Δx para indicar a variação em x e Δy para indicar a variação em y, temos a seguinte situação:



Assim, para o primeiro segmento (em vermelho), temos a seguinte taxa de variação de y em relação a x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{final} - y_{inicial}}{x_{final} - x_{inicial}} = \frac{1-0}{4-0} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Isso significa que para cada aumento de x em 1 unidade, y aumenta em 0,25 no primeiro segmento.

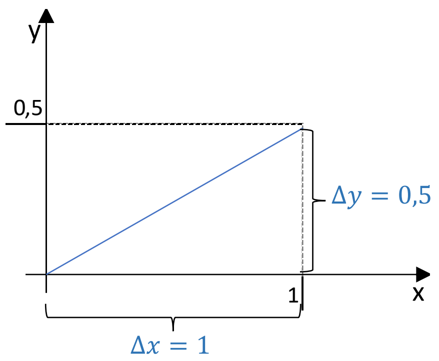
E para o segundo segmento (em verde), temos a seguinte taxa de variação de y em relação a x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{final} - y_{inicial}}{x_{final} - x_{inicial}} = \frac{6-1}{8-4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Isso significa que para cada aumento de x em 1 unidade, y aumenta em 1,25 no segundo segmento.

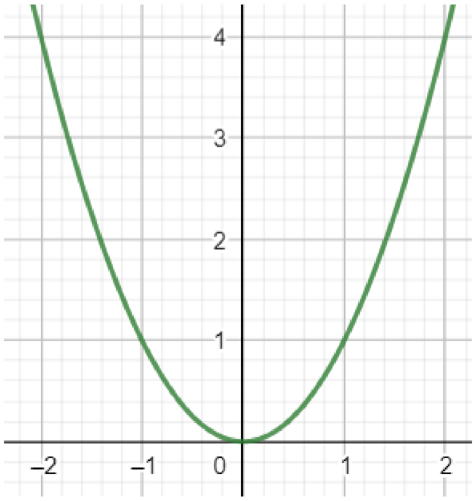
Esses valores correspondem às **derivadas** para cada segmento.

Para uma reta (isto é, uma equação de 1o grau), a **taxa de variação** de y em relação a x é **fixa**, assim como a **derivada** da função. Nesses casos, a derivada pode ser calculada pela razão de Δy por Δx entre quaisquer 2 pontos. Para a função $y = 0{,}5.x$, ilustrada a seguir, podemos calcular as variações de x e de y entre os pontos (x = 0; y = 0) e (x = 1; y = 0,5):



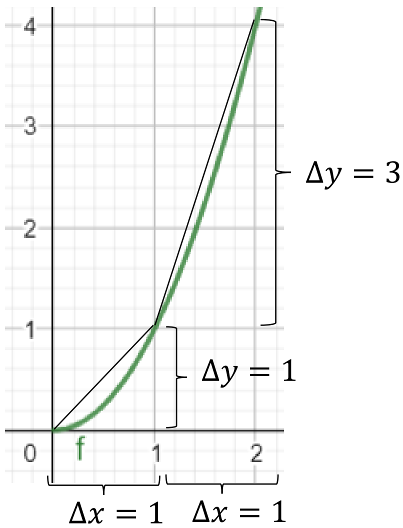
$$d = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{final} - y_{inicial}}{x_{final} - x_{inicial}} = \frac{0{,}5-0}{1-0} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$$

Para outras funções, como as de 2o grau, a taxa de variação **não** é a mesma para todos os valores de x, logo a **derivada não será uma constante**. Vamos considerar a função $y = x^2$, representada a seguir

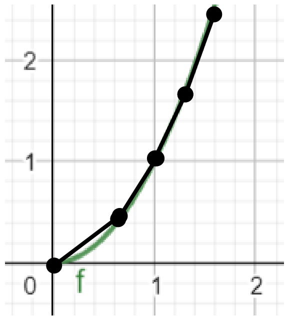


Para $x < 0$, essa função **decresce** com o aumento de x, ou seja, apresenta **derivada negativa**, e para $x > 0$, essa função **cresce** com o aumento de x, isto é, apresenta **derivada positiva**.

Além disso, a taxa de variação muda para cada valor de x. Observe que para x entre 0 e 1 ($0 < x < 1$), o valor y aumenta em 1 unidade **($\Delta \boldsymbol{y} = \mathbf{1}$)**; enquanto para x entre 1 e 2 ($1 < x < 2$), o valor de y aumenta em 3 unidades ($\Delta \boldsymbol{y} = \mathbf{3}$), como ilustrado a seguir.



Mas podemos diminuir o intervalo de x para encontrar as taxas de variação de forma mais precisa, isto é, mais próxima da **verdadeira taxa de variação para cada ponto**:



Definição

Quando a variação de x (Δx) for **muito pequena** (na verdade, **infinitesimal**), a reta que representa a **taxa de variação** em cada ponto será **tangente** à função naquele ponto e a **razão** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ será a **derivada** da função naquele ponto. Pelo fato de as variações serem muito pequenas (infinitesimais), utilizamos a expressão $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$, em vez de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

A definição da derivada da função $y = f(x)$ em um ponto $x = x_0$ (já que ela pode variar para cada ponto da função) é definida como:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

No numerador, a diferença $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ corresponde à **variação de y** (que estávamos chamando de Δy), pois $f(x_0 + \Delta x)$ corresponde ao valor da função no ponto $x_0 + \Delta x$, isto é, no ponto um pouquinho depois de x_0 (y_{final}), e $f(x_0)$ corresponde ao valor da função no ponto x_0 ($y_{inicial}$).

Também representamos a derivada da função $y = f(x)$ em um ponto $x = x_0$ como $\boldsymbol{\frac{d}{dx} f(x_0)}$ ou $\boldsymbol{f'(x_0)}$.

Para calcular a derivada da função $f(x) = x^2$, o primeiro passo é calcular $f(x_0 + \Delta x)$:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2.x_0.\Delta x + \Delta x^2$$

Sabendo que $f(x_0) = x_0^2$, o numerador da fórmula é:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0^2 + 2.x_0.\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2.x_0.\Delta x + \Delta x^2$$

Em seguida, dividimos por Δx:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2.x_0.\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2.x_0 + \Delta x$$

Agora, aplicamos o limite $\Delta x \to 0$:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} 2.x_0 + \Delta x = 2.x_0$$

(2020 – Prefeitura de Cerquilho/SP) A taxa de variação de uma curva quando seu intervalo tende a zero, é conhecida como:

a) Derivada

b) Limite

c) Soma de quadrados

d) Integral

e) Taxa de variação

Comentários:

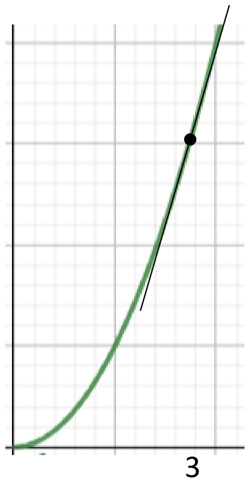
A taxa de variação de uma função $y = f(x)$, isto é, Δy, quando o intervalo da variável Δx tende a zero é a definição da derivada da função.

Gabarito: A.

Cálculo da Reta Tangente à Função

A partir da derivada da função, podemos calcular a função da reta tangente à função em cada ponto.

A inclinação da reta $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no ponto x_0 corresponde justamente à derivada no referido ponto. Para a mesma função $f(x) = x^2$, a reta tangente ao ponto $x_0 = 3$ está representado a seguir:



E o coeficiente angular (que representa a inclinação) da reta tangente à função nesse ponto $x_0 = 3$ é:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = 2.x_0$$

$$\frac{df}{dx}(3) = 2 \times 3 = 6$$

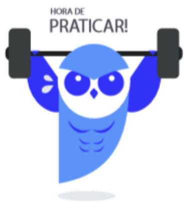
Para calcular o coeficiente linear (ou intercepto) da reta tangente, utilizamos o ponto conhecido da reta, qual seja o ponto $x_0 = 3$ pertencente à curva $f(x) = x^2$:

$$y = f(x_0) = {x_0}^2 = 3^2 = 9$$

Sendo a reta tangente uma função da forma $y = a + bx$, em que $b = 6$ (coeficiente angular), podemos calcular o valor de a, utilizando o ponto $x = 3$ e $y = 9$:

$$9 = a + 6 \times 3 = a + 18$$

$$a = -9$$



(2018 – Prefeitura de Barra Velha/SC - *Adaptada*) Do Cálculo, a derivada em um ponto de uma função y = f(x) representa a taxa de variação instantânea de y em relação a x nesse ponto. A utilização de derivadas é amplamente significativa dentro da Matemática e em outras ciências e suas propriedades são inúmeras. Com relação a elas, julgue a afirmativa a seguir.

A derivada de uma função de uma variável, no limite, é a inclinação da reta tangente no ponto avaliado.

Comentários:

A derivada da função corresponde à inclinação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ da reta tangente à função, para o ponto x_0 em questão.

Resposta: Certa.

Regras de Derivação

Para não termos que sempre efetuar os cálculos do limite para obter a derivada, existem alguns resultados que são importantes de memorizar[1]:

- A derivada de uma função da forma $f(x) = x^n$ é o produto de $\boldsymbol{n}$ por $x^{\boldsymbol{n-1}}$, para $\boldsymbol{n} \neq 0$.

$$\frac{d(x^{\boldsymbol{n}})}{dx} = \boldsymbol{n}.x^{\boldsymbol{n-1}}$$

Esse resultado vale para qualquer expoente **diferente de 0**. **Não** podemos utilizá-lo para $f(x) = x^0 = 1$.

Por exemplo, já verificamos que, para $n = 2$, temos:

$$\frac{d(x^{\boldsymbol{2}})}{dx} = \boldsymbol{2}.x^{\boldsymbol{2-1}} = 2x^1 = 2x$$

Para $\boldsymbol{n = 5}$, isto é, $f(x) = x^{\boldsymbol{5}}$, temos:

$$\frac{d(x^{\boldsymbol{5}})}{dx} = \boldsymbol{5}.x^{\boldsymbol{5-1}} = 5x^4$$

Para $\boldsymbol{n = 1}$, isto é, $f(x) = x$, temos:

$$\frac{d(x)}{dx} = \frac{d(x^{\boldsymbol{1}})}{dx} = \boldsymbol{1}.x^{\boldsymbol{1-1}} = 1x^0 = 1$$

Para $\boldsymbol{n = -1}$, isto é, $f(x) = \frac{1}{x}$, temos[2]:

$$\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = \frac{d(x^{\boldsymbol{-1}})}{dx} = \boldsymbol{-1}.x^{\boldsymbol{-1-1}} = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

---

[1] Aqui, iremos omitir x_0, para que facilitar a visualização da fórmula.

[2] Podemos representar uma potência de $\frac{1}{x}$, elevando x ao mesmo expoente, mas com sinal contrário:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^a = x^{-a}$$

Para $n = {}^{1}/_{2}$, isto é, $f(x) = \sqrt{x}$, temos[3]:

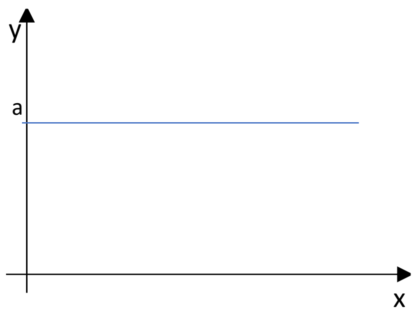
$$\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{d(x^{1/2})}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x^{(1/2 - 1)} = \frac{1}{2} \cdot x^{(-1/2)} = \frac{1}{2 \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- A derivada de uma **constante** é igual a **0**.

$$\frac{d(a)}{dx} = \mathbf{0}$$

Por exemplo, a derivada de 3 é igual a zero; e a derivada de -5 é igual a zero.

Afinal, uma função constante **não apresenta variação**, por isso, a sua **derivada é nula**.



- Quando multiplicamos uma função por uma constante, a sua derivada será multiplicada por essa constante:

$$\frac{d[a \cdot f(x)]}{dx} = a \cdot \frac{d[f(x)]}{dx}$$

Por exemplo:

$$\frac{d(3 \cdot x^5)}{dx} = 3 \cdot \frac{d(x^5)}{dx} = 3 \cdot (5 \cdot x^{5-1}) = 15x^4$$

---

[3] Podemos representar a raiz de x, pela potência de x elevado a $\frac{1}{2}$. De maneira geral, a raiz n-ésima de x pode ser representada pela potência de x elevado a $\frac{1}{n}$:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

- A derivada da função $f(x) = \boldsymbol{e^x}$ é ela mesma:

$$\frac{d(\boldsymbol{e^x})}{dx} = \boldsymbol{e^x}$$

Em que e é a constante neperiana, aproximadamente igual a 2,718.

- A derivada da função $f(x) = \ln x$ é $\frac{1}{x}$:

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Em que ln é o logaritmo na base e, chamado logaritmo natural.

Pode ser útil notar que a primeira regra de derivação que vimos, $\frac{d(x^{\boldsymbol{n}})}{dx} = \boldsymbol{n}.x^{\boldsymbol{n-1}}$, não se aplica para $n = 0$, logo, não obtemos $x^{-1} = \frac{1}{x}$ por essa regra. A função cuja derivada é $x^{-1} = \frac{1}{x}$ é **diferente**, qual seja o logaritmo natural de x.

- A derivada da soma ou da diferença de funções é igual à soma ou diferença das derivadas:

$$\frac{d[\boldsymbol{f(x)} \pm \boldsymbol{g(x)}]}{dx} = \frac{\boldsymbol{d[f(x)]}}{\boldsymbol{dx}} \pm \frac{\boldsymbol{d[g(x)]}}{\boldsymbol{dx}}$$

Por exemplo:

$$\frac{d[\boldsymbol{x^3} + \boldsymbol{x^2}]}{dx} = \frac{\boldsymbol{d[x^3]}}{\boldsymbol{dx}} + \frac{\boldsymbol{d[x^2]}}{\boldsymbol{dx}}$$

$$\frac{d[\boldsymbol{x^3} + \boldsymbol{x^2}]}{dx} = \boldsymbol{3x^2} + \boldsymbol{2x^1}$$

- A derivada do **produto** de duas funções é igual à derivada da primeira função multiplicada pela segunda função, **mais** a primeira função multiplicada pela derivada da segunda função:

$$\frac{d[\boldsymbol{f(x)} \times \boldsymbol{g(x)}]}{dx} = \frac{\boldsymbol{d[f(x)]}}{\boldsymbol{dx}} \times \boldsymbol{g(x)} + \boldsymbol{f(x)} \times \frac{\boldsymbol{d[g(x)]}}{\boldsymbol{dx}}$$

Por exemplo:

$$\frac{d[x^2 \times \ln x]}{dx} = \frac{d[x^2]}{dx} \times \ln x + x^2 \times \frac{d[\ln x]}{dx}$$

$$\frac{d[x^2 \times \ln x]}{dx} = 2.x^1 \times \ln x + x^2 \times \frac{1}{x}$$

$$\frac{d[x^2 \times \ln x]}{dx} = 2x.\ln x + x$$

- A derivada do **quociente** entre duas funções é igual à derivada da primeira função multiplicada pela segunda função, **menos** a primeira função multiplicada pela derivada da segunda função, sendo essa diferença dividida pelo quadrado da segunda função:

$$\frac{d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]}{dx} = \frac{\frac{d[f(x)]}{dx} \times g(x) - f(x) \times \frac{d[g(x)]}{dx}}{[g(x)]^2}$$

Por exemplo:

$$\frac{d\left[\frac{3x}{\ln x}\right]}{dx} = \frac{\frac{d[3x]}{dx} \times \ln x - 3x \times \frac{d[\ln x]}{dx}}{[\ln x]^2}$$

▪

$$\frac{d\left[\frac{3x}{\ln x}\right]}{dx} = \frac{3 \times \ln x - 3x \times \frac{1}{x}}{[\ln x]^2}$$

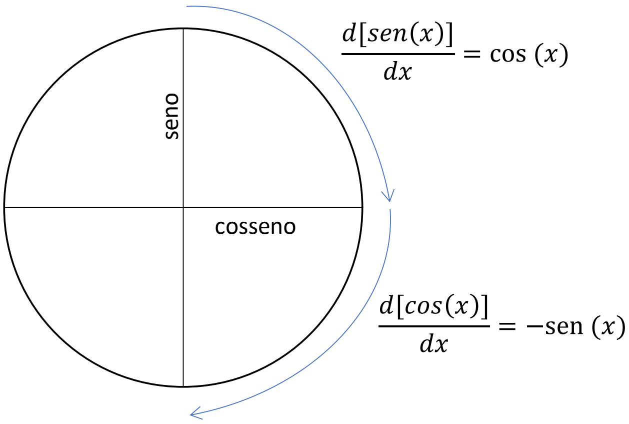
$$\frac{d\left[\frac{3x}{\ln x}\right]}{dx} = \frac{3.\ln x - 3}{[\ln x]^2}$$

- Em relação às funções trigonométricas, a derivada do seno é o cosseno e a derivada do cosseno é menos o seno:

$$\frac{d[sen(x)]}{dx} = \cos(x)$$

$$\frac{d[cos(x)]}{dx} = -\text{sen}(x)$$

Para lembrar esses resultados, o círculo trigonométrico pode ajudar. Imagine que a derivada corresponda a um giro de 90º no sentido anti-horário, como ilustrado a seguir. Assim, partindo do seno (+1 no eixo vertical), chegamos ao cosseno (+1 no eixo horizontal) e partindo do cosseno chegamos a menos seno (-1 no eixo vertical).



- A partir da fórmula da derivada do quociente, é possível demonstrar que:

$$\frac{d[tg(x)]}{dx} = [\sec(x)]^2$$

INDO MAIS FUNDO!

Vamos à demonstração. Sabendo que $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$, então devemos aplicar a fórmula da derivada do quociente para calcular a derivada da tangente:

$$\frac{d[tg(x)]}{dx} = \frac{d\left[\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right]}{dx} = \frac{\frac{d[sen(x)]}{dx}.\cos(x) - sen(x).\frac{d[\cos(x)]}{dx}}{[\cos(x)]^2}$$

Sabendo que a derivada do seno é o cosseno e que a derivada do cosseno é menos o seno:

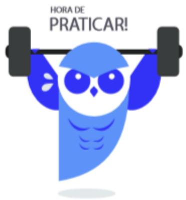
$$\frac{d[tg(x)]}{dx} = \frac{\cos(x).\cos(x) - sen(x).[-sen(x)]}{[\cos(x)]^2} = \frac{[\cos(x)]^2 + [\text{sen}(x)]^2}{[\cos(x)]^2}$$

Pela Primeira Relação Fundamental da Trigonometria temos $[\cos(x)]^2 + [\text{sen}(x)]^2 = 1$:

$$\frac{d[tg(x)]}{dx} = \frac{1}{[\cos(x)]^2}$$

Sabendo que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, temos:

$$\frac{d[tg(x)]}{dx} = [\sec(x)]^2$$



(2018 – Prefeitura de Barra Velha/SC - *Adaptada*) Do Cálculo, a derivada em um ponto de uma função y = f(x) representa a taxa de variação instantânea de y em relação a x nesse ponto. A utilização de derivadas é amplamente significativa dentro da Matemática e em outras ciências e suas propriedades são inúmeras. Com relação a elas, julgue as afirmativas a seguir.

I - As derivadas das funções trigonométricas sin x e cos x são, respectivamente, cos x e sin x.

II - A derivada da função exponencial é uma função bem peculiar, pois $\frac{d}{dx}e^x = e^x$, ou seja, a derivada é a própria função

Comentários:

Em relação à afirmativa I, temos que a derivada do seno é o cosseno, $\frac{d[sen(x)]}{dx} = \cos(x)$, mas que a derivada do cosseno é **menos** o seno, $\frac{d[cos(x)]}{dx} = -\text{sen}\ (x)$. Logo, a afirmativa I está incorreta.

Em relação à afirmativa II, temos que a derivada da função exponencial é ela mesma, $\frac{de^x}{dx} = e^x$. Logo, a afirmativa II está correta.

Resposta: I - Errada; II - Certa.

(2019 – Prefeitura de Porciúncula/RJ) Obtenha a derivada de f(x) = $3x^5 - 2x^3 + 5 - 3x$ e assinale a alternativa CORRETA.

a) $15x^4 - 6x^2 - 3$.

b) $3x^4 - 2x^2 - 2$.

c) $x^2 - 3$.

d) $-2x^3 + 5$.

Comentários:

A derivada da função f(x) = $3x^5 - 2x^3 + 5 - 3x$ é dada por:

$$\frac{d(3x^5 - 2x^3 + 5 - 3x)}{dx} = \frac{d(\ 3x^5)}{dx} - \frac{d(2x^3)}{dx} + \frac{d(5)}{dx} - \frac{d(3x)}{dx}$$

Calculando cada derivada em separado, temos:

$$\frac{d(\ 3x^5)}{dx} = \mathbf{3} \times \mathbf{5}.x^{(\mathbf{5}-\mathbf{1})} = 15x^4$$

$$\frac{d(2x^3)}{dx} = \mathbf{2} \times \mathbf{3}.x^{(\mathbf{3}-\mathbf{1})} = 6x^2$$

$$\frac{d(5)}{dx} = 0$$

$$\frac{d(3x)}{dx} = 3 \times 1.x^{(1-1)} = 3.x^0 = 3$$

Logo, a derivada da função desejada é:

$$\frac{d(\ 3x^5 - 2x^3 + 5 - 3x)}{dx} = 15x^4 - 6x^2 - 3$$

Gabarito: A

(2018 – Consórcio do Trairí/RN) Dada a Função f, definida em R e expressa por F(x) = $2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1$, sua função derivada F´(x) é:

a) $8x^3 - 15x^2 + 2x - 4$.

b) $8x^4 - 15x + 2x - 4$.

c) $8x^3 - 5x^2 + 2x + 1$.

d) $8x^2 - 5x^2 + 2x + 1$.

Comentários:

A derivada da função F(x) = $2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1$ é dada por:

$$\frac{d(2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1)}{dx} = \frac{d(\ 2x^4)}{dx} - \frac{d(5x^3)}{dx} + \frac{d(x^2)}{dx} - \frac{d(4x)}{dx} + \frac{d(1)}{dx}$$

Calculando cada derivada em separado, temos:

$$\frac{d(\ 2x^4)}{dx} = 2 \times 4.x^{(4-1)} = 8x^3$$

$$\frac{d(5x^3)}{dx} = 5 \times 3.x^{(3-1)} = 15x^2$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2.x^{(2-1)} = 2x$$

$$\frac{d(4x)}{dx} = 4 \times 1.x^{(1-1)} = 4.x^0 = 4$$

$$\frac{d(1)}{dx} = 0$$

Logo, a derivada da função desejada é:

$$\frac{d(2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1)}{dx} = 8x^3 - 15x^2 + 2x - 4$$

Gabarito: A

Derivada de Ordens Superiores

Até agora, vimos derivadas de primeira ordem (também chamadas de primeira derivada), isto é, vimos como derivamos uma função uma única vez. Porém, podemos **derivar uma função n vezes**, o que chamamos de **derivada de ordem n** (ou **n-ésima derivada**).

Por exemplo, vamos calcular a **derivada de segunda ordem** da função $f(x) = x^5$. Primeiro, calculamos a derivada de primeira ordem da função, ou seja, derivamos a função como estávamos fazendo até agora:

$$\frac{d(x^5)}{dx} = 5.x^{5-1} = 5x^4$$

Agora, **derivamos o resultado** obtido:

$$\frac{d(5.x^4)}{dx} = 5 \times 4.x^{4-1} = 20.x^3$$

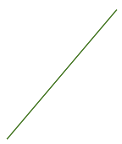
Esse resultado corresponde à derivada de segunda ordem da função $f(x) = x^5$, o que representamos por $\boldsymbol{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}$ ou por $\boldsymbol{f''(x)}$:

$$\frac{d^2(x^5)}{dx^2} = 20.x^3$$

Derivando esse resultado, calculamos a **derivada de terceira ordem** da função original, e assim sucessivamente.

Sabendo que a derivada (de primeira ordem) representa a taxa de variação de uma função, então a derivada de segunda ordem irá representar a **variação da variação** da função.

Vamos supor que uma função está crescendo (derivada de primeira ordem positiva). Mas esse crescimento pode ser a uma **taxa fixa** (derivada de segunda ordem **nula**); a função pode estar **crescendo cada vez mais** (derivada de segunda ordem **positiva**); ou a função pode estar **crescendo cada vez menos** (derivada de segunda ordem **negativa**).

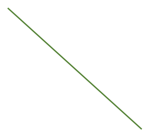


Taxa de crescimento fixa:
Derivada de segunda ordem nula

Função crescendo cada vez mais:
Derivada de segunda ordem positiva

Função crescendo cada vez menos:
Derivada de segunda ordem negativa

Caso a função estivesse decrescendo (derivada de primeira ordem negativa), a situação seria análoga: a taxa de decrescimento pode ser **fixa** (derivada de segunda ordem **nula**); a função pode estar **decrescendo cada vez menos** (derivada de segunda ordem **positiva**); ou a função pode estar **decrescendo cada vez mais** (derivada de segunda ordem **negativa**).



Taxa de decrescimento fixa:
Derivada de segunda ordem nula

Função decrescendo cada vez menos:
Derivada de segunda ordem positiva

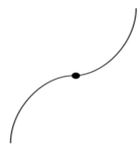
Função decrescendo cada vez mais:
Derivada de segunda ordem negativa

TOME NOTA!

A **segunda derivada** representa a **concavidade** da função.

Quando a segunda derivada é **positiva**, a concavidade está para **cima**; quando a segunda derivada é **negativa**, a concavidade está para **baixo**.

E quando a segunda derivada é **nula**, ou a função **não apresenta concavidade** (corresponde a uma reta) ou, quando a nulidade ocorre para um ponto específico, estamos diante de um **ponto de inflexão**, isto é, o ponto em que a **concavidade muda**, como ilustrado a seguir:



HORA DE PRATICAR!

(2018 – Prefeitura de Barra Velha/SC - *Adaptada*) Do Cálculo, a derivada em um ponto de uma função y = f(x) representa a taxa de variação instantânea de y em relação a x nesse ponto. A utilização de derivadas é amplamente significativa dentro da Matemática e em outras ciências e suas propriedades são inúmeras. Com relação a elas, julgue a afirmativa a seguir.

Ponto de inflexão é o ponto em que a segunda derivada de uma função muda de sinal.

Comentários:

O ponto de inflexão é o ponto em que a concavidade da função muda. Como o sinal da derivada de segunda ordem corresponde à concavidade da função (quando positiva indica uma concavidade para cima e quando negativa indica uma concavidade para baixo), no ponto de inflexão, o sinal da segunda derivada muda. Logo, a afirmativa está certa.

Resposta: Certa.

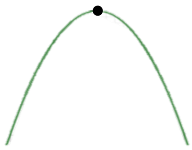
Pontos Críticos

Como a derivada representa a taxa de variação da função, quando igualamos a derivada de uma função a **zero**, podemos encontrar o valor de x para o qual (ou os valores de x para os quais) **a função não varia**.

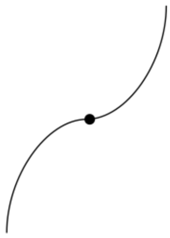
Esse ponto, chamado de **ponto crítico**, corresponde a um dos seguintes pontos:

- **Ponto de Mínimo**: a função decresce até o ponto de mínimo e em seguida cresce

- **Ponto de Máximo**: a função cresce até o ponto de máximo e em seguida decresce



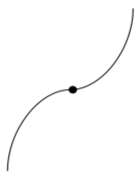
- **Ponto de Inflexão**: a função muda de concavidade no ponto



Quando igualamos a derivada a zero, o valor de x encontrado corresponde a uma dessas situações, mas não sabemos a qual delas. Para descobrir isso, podemos calcular a **segunda derivada**. Se a segunda derivada for **positiva** (concavidade para cima), estamos diante de um **ponto de mínimo**; se a segunda derivada for **negativa** (concavidade para baixo), estamos diante de um **ponto de máximo**; se a segunda derivada for **nula**, estamos diante de um **ponto de inflexão**.

1ª derivada = 0; 2ª derivada > 0:
Ponto de Mínimo

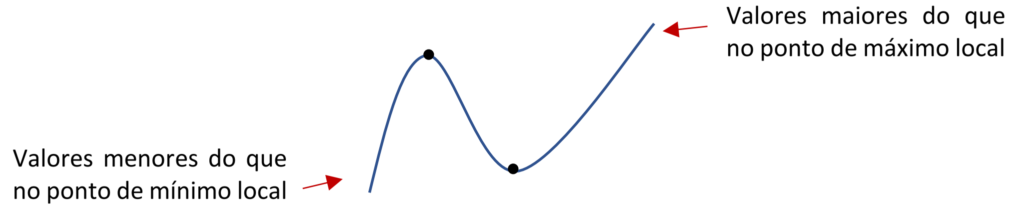
1ª derivada = 0; 2ª derivada < 0:
Ponto de Máximo



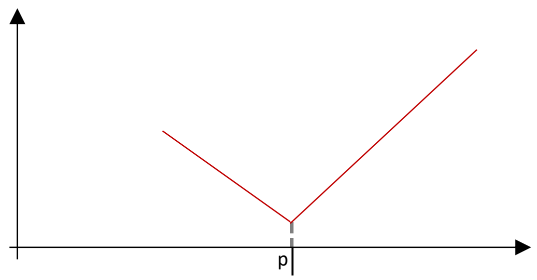
1ª derivada = 0; 2ª derivada = 0:
Ponto de Inflexão

É importante ressaltar que os pontos de mínimo e de máximo (chamados de **extremo**) podem ser **locais** ou **globais** (ou **absolutos**). Dizemos que determinado ponto é mínimo (ou máximo) global quando ele apresenta o menor (ou maior) valor da função, **em relação a todos os pontos**. Já o ponto de mínimo (ou máximo) local apresenta o menor (ou maior) valor da função, em **determinado intervalo**.

A seguir ilustramos uma função com um ponto de máximo e um ponto de mínimo locais. Observe que o ponto de máximo é o valor máximo da função **em relação um intervalo**, mas que existem outros pontos em que a função apresenta **valores maiores**. Similarmente, o ponto de mínimo é o valor mínimo da função em relação a um intervalo, mas existem outros pontos em que a função apresenta **valores menores**. Nessa situação, os **extremos são locais, mas não globais**.



Outro candidato a extremo da função, também chamado de ponto crítico, é o ponto em que a **derivada não existe**. No gráfico a seguir, a derivada da função (em vermelha) não existe para p, sendo este um ponto de mínimo.



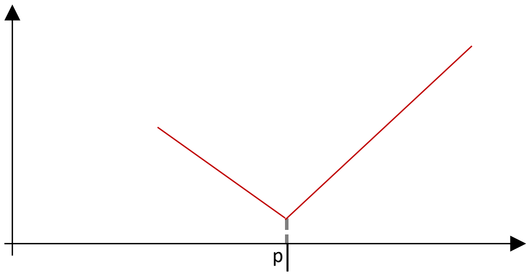
Isso ficará mais claro no próximo tópico.

Diferenciabilidade

Para que a **derivada** de uma função **exista** em determinado ponto (o que chamamos de **diferenciabilidade da função**), é necessário que o seguinte limite, que define a derivada de uma função, exista:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Para isso, a função precisa ser **contínua** nesse ponto, mas isso **não garante** a diferenciabilidade da função, ou seja, essa condição é **necessária, mas não suficiente**. A função que vimos no final do último tópico, replicada a seguir, é **contínua** em todo o seu domínio, mas **não é diferenciável** no ponto p.

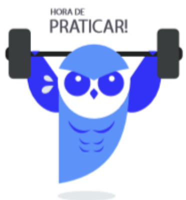


De fato, não temos como dizer qual é a taxa de variação da função nesse ponto. Para valores menores que esse ponto, a função está decrescendo e para valores maiores, a função está crescendo. Sempre que a função apresentar um "**bico**" em determinado ponto, **a derivada não existirá** no ponto.

Quando a derivada da função, além de existir em todos os pontos, também é **contínua** em todos os pontos, chamamos a função de **continuamente diferenciável** e dizemos que ela pertence à **classe C^1**.

Quando as derivadas de primeira e de segunda ordem da função existem e são contínuas em todos os pontos, dizemos que a função pertence à classe C^2. Quando as primeiras k derivadas da função existem e são contínuas em todos os pontos, dizemos que ela pertence à classe C^k.

Ressalte-se que toda função continuamente diferenciável é diferenciável em todos os pontos de um intervalo; e toda função diferenciável é necessariamente contínua nos pontos.



(2017 – IF-TO - *Adaptada*) Dada uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em um intervalo I = (a, b), julgue as seguintes afirmações:

A derivada de f existe em todo intervalo I.

Comentários:

A continuidade da função é uma condição necessária, mas não suficiente para a diferenciabilidade da função. Em outras palavras, é possível que a função seja contínua, mas não diferenciável em todos os pontos, ou seja, a derivada pode não existir em todos os pontos do intervalo.

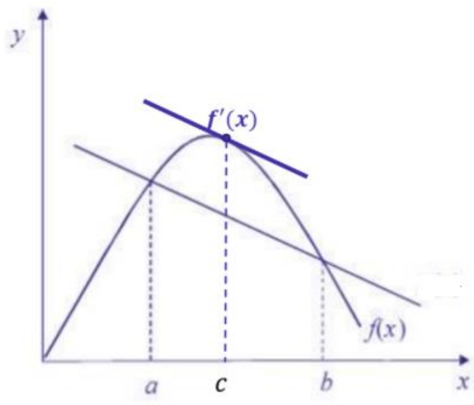
Gabarito: Errado

Teorema do Valor Médio

O **Teorema do Valor Médio** (ou **Teorema de Lagrange**) afirma que, para uma função diferenciável em um intervalo [a,b], existe um ponto c pertencente a esse intervalo (a < c < b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

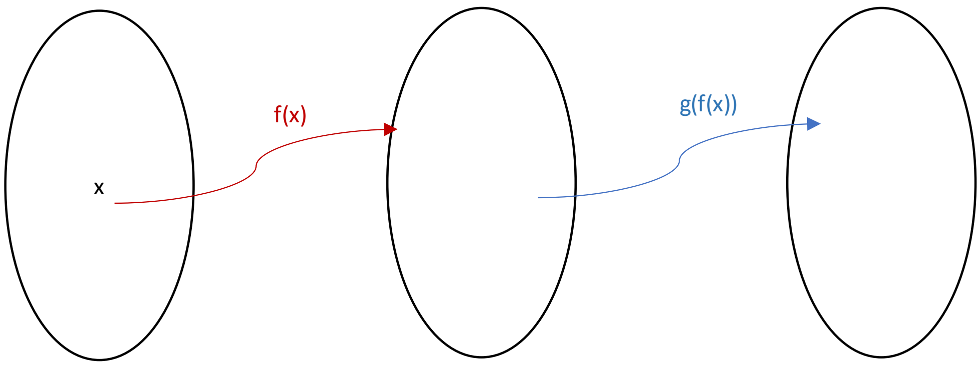
Ou seja, a **derivada da função** em algum ponto entre a e b é igual à **inclinação da reta** que intercepta a função f(x) nos extremos do intervalo, a e b, conforme ilustrado a seguir:



Como a derivada da função em um ponto corresponde à tangente da função nesse ponto, então podemos dizer que a reta que intercepta a função nos pontos a e b (que pode ser chamada de **reta secante**) tem a **mesma inclinação** da **reta tangente** em algum ponto entre a e b.

Regra da Cadeia

A regra da cadeia é uma regra de derivação aplicável a funções compostas. Uma função composta é uma função de outra função. Por exemplo, $f(x) = x^2$ é uma função simples, $g(x) = \cos(x)$ é uma outra função simples, já a função $\cos(x^2)$ é uma função composta, em que primeiro aplicamos a função f (elevar ao quadrado) para depois aplicarmos a função g (cosseno), conforme ilustrado a seguir.



Podemos representar a função composta como $g(f(x))$ ou como $g \circ f$.

Para calcularmos a derivada de uma função composta, derivamos a função externa ($g'(x)$) e aplicamos a função interna ($g'(f(x))$), calculamos a derivada da função interna ($f'(x)$) e multiplicamos os dois resultados: essa é a chamada **Regra da Cadeia**.

$$\frac{d[g(f(x))]}{dx} = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Por exemplo, para calcularmos a derivada de $\cos(x^2)$, primeiro derivamos a função externa:

$$g'(x) = \frac{d[\cos x]}{dx} = sen\ x$$

E aplicamos a função interna $f(x) = x^2$:

$$g'\big(f(x)\big) = sen(x^2)$$

Agora, calculamos a derivada da função interna:

$$f'(x) = \frac{d[x^2]}{dx} = 2x$$

Por fim, multiplicamos os dois resultados:

$$\frac{d[g(f(x))]}{dx} = g'\big(f(x)\big) \times f'(x) = sen(x^2) \times 2x$$

Agora, vamos calcular a derivada de e^{2x}, em que a função externa $g(x) = e^x$ e a função interna é $f(x) = 2x$. Primeiro, derivamos a função externa:

$$g'(x) = \frac{d[e^x]}{dx} = e^x$$

E aplicamos a função interna $f(x) = 2x$:

$$g'\big(f(x)\big) = e^{2x}$$

Agora, calculamos a derivada da função interna:

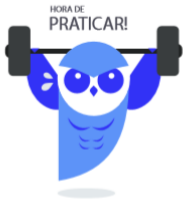
$$f'(x) = \frac{d[2x]}{dx} = 2$$

Por fim, multiplicamos os dois resultados:

$$\frac{d[g(f(x))]}{dx} = g'\big(f(x)\big) \times f'(x) = e^{2x} \times 2 = 2.e^{2x}$$

De modo geral, para uma função composta da forma $\boldsymbol{e^{f(x)}}$, a derivada da função externa é ela mesma, logo:

$$\frac{d\left(\boldsymbol{e^{f(x)}}\right)}{dx} = \boldsymbol{e^{f(x)}} \times \boldsymbol{f'(x)}$$



(2019 – Prefeitura de Aracruz/ES) A segunda derivada de da função $f(x) = \ln x^2$ no ponto x = 1 é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) -1

e) -2

Comentários:

A função $f(x) = \ln(x^2)$ é uma função composta, em que $h(x) = x^2$ é a função interna e $g(x) = \ln x$ é a função externa. Para derivá-la, utilizamos a regra da cadeia:

$$\frac{d[g(h(x))]}{dx} = g'(h(x)) \times h'(x)$$

Primeiro, derivamos a função externa:

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

E aplicamos na função interna:

$$g'(h(x)) = \frac{1}{x^2}$$

Agora, derivamos a função interna:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2.x^{2-1} = 2x$$

E multiplicamos os resultados:

$$\frac{d[g(h(x))]}{dx} = \frac{1}{x^2} \times 2x = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$$

Como o enunciado pede a segunda derivada, precisamos calcular a derivada desse resultado. Por ser uma função simples, podemos calcular a sua derivada diretamente, sem utilizar a regra da cadeia:

$$\frac{d[2x^{-1}]}{dx} = 2 \times (-1) \times x^{-1-1} = -2x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$$

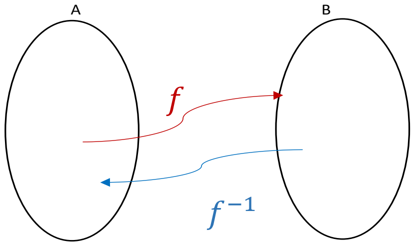
Para $x = 1$, temos:

$$\frac{-2}{1^2} = -2$$

Gabarito: E

Derivada da Função Inversa

Pela Regra da Cadeia, podemos calcular a derivada da função inversa. Sendo $f^{-1}(x)$ a inversa da função $f(x)$, então o domínio de f^{-1} é a imagem de f e a imagem de f^{-1} é o domínio de f, como ilustrado a seguir.



Assim, a imagem da função f^{-1} para o ponto $y = f(x)$ é justamente x:

$$f^{-1}[f(x)] = x$$

Agora, vamos derivar essa equação. De um lado, temos uma composição de funções, logo, podemos utilizar a Regra da Cadeia para calcular a derivada:

$$\frac{d(f^{-1}[f(x)])}{dx} = f^{-1\prime}[f(x)] \times f'(x)$$

Do outro lado da equação, temos:

$$\frac{d(x)}{dx} = 1$$

Assim, concluímos que

$$f^{-1\prime}[f(x)] \times f'(x) = 1$$

$$f^{-1\prime}[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}$$

Para simplificar essa expressão visualmente, vamos utilizar y no lugar de $f(x)$:

$$f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Em que $y = f(x)$.

Ou seja, a derivada da função inversa f^{-1} é igual ao **inverso** da derivada da função f.

Por exemplo, vamos utilizar esse resultado para calcular a derivada da função $y = f(x) = \sqrt{x}$. Primeiro, vamos obter a inversa dessa função, isolando x em vez de y:

$$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$$

Logo, a função inversa é $f^{-1}(y) = y^2$. A derivada dessa função é:

$$f^{-1'}(y) = 2y$$

E a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$ pode ser calculada como o inverso dessa derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{f^{-1'}(y)} = \frac{1}{2y}$$

Sabendo que $y = \sqrt{x}$, obtemos a derivada da função $f(x)$ em função de x:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Essa regra só vale para a **primeira** derivada. Para calcular as derivadas de ordens superiores de funções inversas, aplicamos **sucessivamente a regra da cadeia**.

Veremos um exemplo dessa aplicação sucessiva da regra da cadeia na questão a seguir.

(CESGRANRIO/2018 – Petrobrás) Seja f uma função real que admite inversa. Se f(1) = 1, f '(1) = 2, f ''(1) = -16 e g é a inversa de f, então g''(1) é:

a) -16

b) 1

c) 2

d) 8

e) 16

Comentários:

Vimos que a primeira derivada da função inversa pode ser calculada como o inverso da primeira derivada da função original:

$$f^{-1'}[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}$$

Nessa questão, o enunciado chamou a função inversa de g:

$$g'[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}$$

Para calcular a segunda derivada da função inversa, vamos derivar essa equação. Do lado esquerdo, aplicamos a regra da cadeia:

$$\frac{d(g'[f(x)])}{dx} = g''[f(x)] \times f'(x)$$

Do lado direito, podemos aplicar a regra da cadeia ou a fórmula da derivada do quociente. Pela fórmula da derivada do quociente, temos:

$$\frac{d\left(\frac{1}{f'(x)}\right)}{dx} = \frac{\frac{d(1)}{dx} \times f'(x) - 1 \times \frac{d[f'(x)]}{dx}}{[f'(x)]^2}$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{f'(x)}\right)}{dx} = \frac{0 \times f'(x) - 1 \times f''(x)}{[f'(x)]^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Logo, a derivada de segunda ordem de $g(x)$ é dada por:

$$g''[f(x)] \times f'(x) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$g''[f(x)] = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

A questão pede $g''(1)$, em que $f(x) = 1$. Para isso, o enunciado informa que $f(1) = 1$, ou seja, o valor de x para o qual $f(x) = 1$ é $x = 1$:

$$g''(1) = -\frac{f''(1)}{[f'(1)]^3}$$

Considerando os dados do enunciado de que $f'(1) = 2$ e que $f''(1) = -16$, temos:

$$g''(1) = -\frac{-16}{2^3} = \frac{16}{8} = 2$$

Gabarito: C

Regra de L´Hôpital

Existe uma ferramenta poderosa para resolver limites, quando a aplicação direta do limite resultar em valores **indeterminados**, como $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, qual seja a **regra de L´Hôpital**. Essa regra afirma basicamente que o **limite da razão** entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é igual ao **limite da razão entre as derivadas** dessas funções, $f'(x)$ e $g'(x)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Mais precisamente, temos duas regras de L´Hôpital, uma para quando a razão entre as funções $f(x)$ e $g(x)$ resulta em $\frac{0}{0}$ e outra para quando a razão resulta em $\frac{\infty}{\infty}$. Em ambos os casos, podemos derivar as funções para calcular o limite, ou seja, temos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Mas essa técnica só pode ser aplicada, se a derivada de $g(x)$ for diferente de zero:

$$g'(x) \neq 0$$

Por exemplo, suponha o seguinte limite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$$

Quando x tende a ∞, e^x também tende a ∞, logo, a aplicação direta do limite resulta em $\frac{\infty}{\infty}$, que é indeterminado. Para resolver esse limite, vamos aplicar a regra de L´Hôpital, **derivando** o numerador e o denominador.

A derivada de x é:

$$\frac{d(x^1)}{dx} = x^{1-1} = x^0 = 1$$

E a derivada de e^x é ela mesma:

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

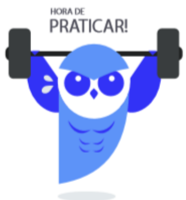
Assim, o limite desejado corresponde ao seguinte limite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}$$

Sabendo que quando x tende a ∞, e^x também a ∞, o resultado desse limite corresponde a $\frac{1}{\infty}$, que é igual a zero, pois temos um número finito sendo dividido por infinito:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

Essa regra pode ser aplicada quantas vezes forem necessárias (desde que as condições necessárias para a sua aplicação sejam atendidas). Em outras palavras, podemos calcular novamente a derivada do numerador e do denominador do resultado encontrado, caso a indeterminação não se resolva com uma única aplicação da regra. E esse procedimento pode ser **repetido** até que a indeterminação se resolva.



(2019 – IDHTEC) Determine N tal que $N=\lim_{x\to 9}\frac{x^2-6x-27}{\sqrt{x}-3}+\lim_{x\to 16}\frac{x^2-256}{\sqrt{x}-4}$

a) 284

b) 296

c) 302

d) 314

e) 328

Comentários:

A aplicação direta do valor do limite de x nas expressões resulta em:

$$\frac{9^2-6\times 9-27}{\sqrt{9}-3}=\frac{81-54-27}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{16^2-256}{\sqrt{16}-4}=\frac{256-256}{4-4}=\frac{0}{0}$$

Também não seria útil substituir $\sqrt{x}$ por y, pois teríamos uma expressão de 4º grau (y^4) nos numeradores. Assim, vamos aplicar a regra de L´Hôpital e derivar os numeradores e os denominadores das expressões.

A derivada do numerador da primeira expressão é:

$$\frac{d(x^2-6x-27)}{dx}=\frac{d(x^2)}{dx}-\frac{d(6x)}{dx}-\frac{d(27)}{dx}=2.x^{2-1}-6.x^{1-1}-0=2x-6$$

A derivada do denominador da primeira expressão é:

$$\frac{d(\sqrt{x}-3)}{dx}=\frac{d\left(x^{1/2}\right)}{dx}-\frac{d(3)}{dx}=\frac{1}{2}x^{(1/2-1)}-0=\frac{1}{2}x^{(-1/2)}=\frac{1}{2.x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Assim, a primeira expressão do limite corresponde a:

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^2-6x-27}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to 9}\frac{2x-6}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 9}\ (2x-6).\frac{2\sqrt{x}}{1}=\lim_{x\to 9}\ (2x-6).2\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^2-6x-27}{\sqrt{x}-3}=(2\times 9-6)\times 2\times\sqrt{9}=(18-6)\times 2\times 3=12\times 6=72$$

A derivada do numerador da segunda expressão é:

$$\frac{d(x^2-256)}{dx}=\frac{d(x^2)}{dx}-\frac{d(256)}{dx}=2.x^{2-1}-0=2x$$

A derivada do denominador da segunda expressão é:

$$\frac{d(\sqrt{x}-4)}{dx}=\frac{d\left(x^{1/2}\right)}{dx}-\frac{d(4)}{dx}=\frac{1}{2}x^{(1/2-1)}-0=\frac{1}{2}x^{(-1/2)}=\frac{1}{2.x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Assim, a segunda expressão do limite corresponde a:

$$\lim_{x\to 16}\frac{x^2-256}{\sqrt{x}-4}=\lim_{x\to 16}\frac{2x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 16}\ 2x.\frac{2\sqrt{x}}{1}=\lim_{x\to 16}\ 4.x.\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 16}\frac{x^2-256}{\sqrt{x}-4}=4\times 16\times\sqrt{16}=64\times 4=256$$

Portanto, a soma desejada é:

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^2-6x-27}{\sqrt{x}-3}+\lim_{x\to 16}\frac{x^2-256}{\sqrt{x}-4}=72+256=328$$

Gabarito: E

(2019 – Prefeitura de Juti/MS) Dada a função $f(x)=\frac{2(x-sen\,x)}{-5x^3}$, o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ é:

a) 1/5

b) -1/5

c) 1/15

d) -1/15

Comentários:

A aplicação direta de $x=0$ no valor da função resulta em (pontue-se que o seno (0) = 0):

$$\frac{2(0 - sen\ 0)}{-5 \times 0^3} = \frac{2(0-0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Para resolver essa indeterminação, vamos aplicar a regra de L´Hôpital. A derivada do numerador é:

$$\frac{d[2(x - sen\ x)]}{dx} = 2\left[\frac{d(x)}{dx} - \frac{d(sen\ x)}{dx}\right] = 2[1 - \cos x]$$

E a derivada do denominador é:

$$\frac{d[-5x^3]}{dx} = -5 \times 3.x^{3-1} = -15x^2$$

Aplicando $x = 0$ para a nova razão, temos (pontue-se que o cosseno (0) = 1):

$$\frac{2(1 - \cos 0)}{-15 \times 0^2} = \frac{2(1-1)}{-15 \times 0^2} = \frac{0}{0}$$

A indeterminação ainda não foi resolvida. Por isso, vamos aplicar novamente a regra de L´Hôpital. A derivada do novo numerador é:

$$\frac{d[2(1 - \cos x)]}{dx} = 2\left[\frac{d(1)}{dx} - \frac{d(\cos x)}{dx}\right] = 2[0 - (-sen\ x)] = 2.sen\ x$$

E a derivada do novo denominador é:

$$\frac{d[-15x^2]}{dx} = -15 \times 2.x^{2-1} = -30x$$

Aplicando $x = 0$ para a nova razão, temos:

$$\frac{2.sen\ 0}{-30 \times 0} = \frac{2 \times 0}{-30 \times 0} = \frac{0}{0}$$

Também não resolvemos a indeterminação com essa aplicação. Vamos aplicar novamente a regra de L´Hôpital. A derivada do numerador é:

$$\frac{d[2(sen\ x)]}{dx} = 2\left[\frac{d(sen\ x)}{dx}\right] = 2.\cos x$$

E a derivada do denominador é:

$$\frac{d[-30x]}{dx} = -30$$

Aplicando $x = 0$ para essa razão, temos:

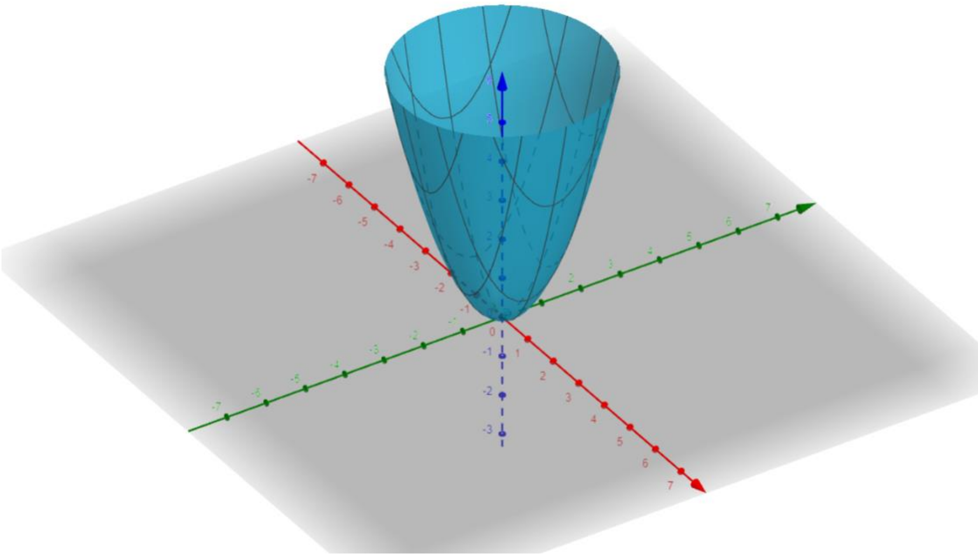
$$\frac{2.\cos 0}{-30} = -\frac{2 \times 1}{30} = -\frac{1}{15}$$

Gabarito: D

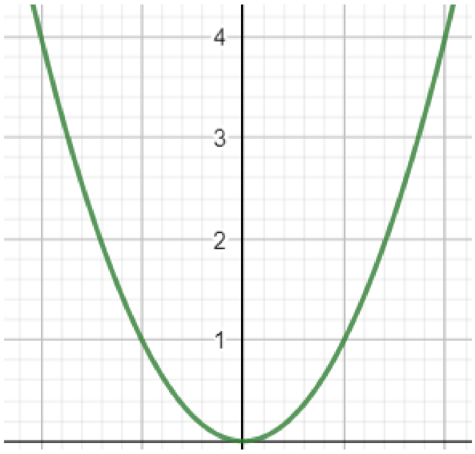
Derivadas Parciais

Derivadas parciais se aplicam para funções de mais de uma variável. Enquanto as funções de uma variável, $y = f(x)$, retornam um valor no eixo y para valores da reta x, funções de duas variáveis, por exemplo, retornam um valor no **eixo z** para valores do plano (x, y).

Para fins ilustrativos, a figura a seguir representa o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Sabemos que a função $f(x) = x^2$, ilustrada seguir, é uma parábola no eixo x, assim como a função $f(y) = y^2$ é uma parábola no eixo y. Quando consideramos os dois eixos, obtemos a versão 3D da parábola, representada acima.



Se você não conseguiu visualizar a parábola em 3D, não se preocupe. Essa explicação só serve para você se sentir um pouco mais confortável com funções de 2 variáveis, mas você não vai depender dela para resolver as questões correspondentes. Até porque as funções podem envolver 3, 4, 5... n variáveis e não vamos conseguir imaginar todas essas dimensões.

Pois bem, as derivadas parciais carregam o mesmo conceito de derivadas que vimos até agora, qual seja de **taxa de variação** da função para intervalos infinitesimais (isto é, para $\Delta x \to 0$). Mas agora temos 2 (ou mais) variáveis, então, como avaliar a taxa de crescimento da função?

Vamos avaliar a taxa de crescimento da função $f(x, y)$ **separadamente** para x e para y. Quando estivermos fazendo a análise **com relação a x**, assumimos que **y é constante**; e quando estivermos fazendo a análise **com relação a y**, assumimos que **x é constante**.

Para indicar que estamos lidando com derivadas parciais, em vez de $\frac{df}{dx}$, utilizamos um d um pouco diferente. A derivada parcial de f em relação a x é representada como:

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

E a derivada parcial de f em relação a y é representada como:

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Algumas bancas utilizam a notação $\boldsymbol{f_X(x, y)}$ para indicar a derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{f_Y(x, y)}$ para indicar a derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a $\boldsymbol{y}$.

Vamos calcular as derivadas parciais de $f(x, y) = x^2 + y^2$. Em relação a x, temos:

$$\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x}$$

Para derivar em relação a x, consideramos que $\boldsymbol{y}$ **é uma constante**. Para deixar claro que estamos lidando com uma constante, vamos representar y por $\boldsymbol{c}$ (você não precisa fazer essa substituição para resolver as questões, só precisa saber que y é de fato uma constante, quando derivamos em relação a x):

$$\frac{\partial(x^2 + c^2)}{\partial x}$$

Agora que substituímos a variável y por uma constante, calculamos a derivada normalmente, como fizemos até agora. Vamos até utilizar o mesmo símbolo d de derivada que estávamos utilizando:

$$\frac{d(x^2 + c^2)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(c^2)}{dx}$$

Calculando essas derivadas em separado, temos:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

$$\frac{d(c^2)}{dx} = 0$$

Pontue-se que uma constante ao quadrado (por exemplo, 3^2) continua sendo uma constante, por isso a sua derivada é igual a zero.

A soma desses resultados corresponde à derivada parcial de $f(x,y) = x^2 + y^2$ em relação a x:

$$\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$$

Agora, em vez de calcular a derivada parcial da mesma função em relação y, que segue o mesmo raciocínio, vamos calcular a derivada parcial de **outra função**, $f(x,y) = y^2 - 3xy + x^2$, **em relação y:**

$$\frac{\partial(y^2 - 3xy + x^2)}{\partial y} = \frac{\partial(y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(3xy)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2)}{\partial y}$$

Como estamos derivando em relação a y, vamos considerar que x **é uma constante** (agora, não vamos fazer a substituição por c, mas não esqueça que x é uma constante qualquer). Calculando essas derivadas em separado, temos:

$$\frac{\partial(y^2)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{d(3xy)}{dy} = 3x.\frac{d(y)}{dy} = 3x.1 = 3x$$

$$\frac{\partial(x^2)}{\partial y} = 0$$

Portanto:

$$\frac{\partial(y^2 - 3xy + x^2)}{\partial y} = 2y - 3x + 0 = 2y - 3x$$

Podemos calcular a derivada parcial de y para um determinado valor de x. Por exemplo, para $x = 1$, a derivada parcial da função $f(x,y) = y^2 - 3xy + x^2$ em relação a y é:

$$\frac{\partial[f(1,y)]}{\partial y} = 2y - 3(1) = 2y - 3$$

Assim como podemos derivar uma função de uma variável mais de uma vez para obter as derivadas de ordens superiores, também podemos calcular as **derivadas parciais de ordens superiores**.

Por exemplo, em relação à função $f(x,y) = x^2 + y^2$, calculamos a sua derivada parcial em relação a x:

$$\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} = 2x$$

Podemos **derivar esse resultado novamente em relação a x**:

$$\frac{\partial(2x)}{\partial x} = 2$$

Assim, obtemos a **derivada parcial de segunda ordem** de $f(x,y) = x^2 + y^2$ **em relação a x**, o que podemos representar por:

$$\frac{\boldsymbol{\partial^2(f(x,y))}}{\boldsymbol{\partial x^2}} = 2x$$

Ou por:

$$\boldsymbol{f_{XX}(x,y)} = 2x$$

Em relação à função $f(x,y) = y^2 - 3xy + x^2$, calculamos a sua derivada parcial em relação a y:

$$\frac{\partial(y^2 - 3xy + x^2)}{\partial y} = 2y - 3x$$

Podemos deri**var esse resultado novamente em relação a y**:

$$\frac{\partial(2y - 3x)}{\partial y} = \frac{\partial(2y)}{\partial y} - \frac{\partial(3x)}{\partial y} = 2 - 0 = 2$$

Lembre-se que $\frac{\partial(3x)}{\partial y} = 0$, pois derivando em relação a y, consideramos x constante.

Esse resultado corresponde à **derivada parcial de segunda ordem** de $f(x,y) = y^2 - 3xy + x^2$ **em relação a y**, que podemos representar por:

$$\frac{\boldsymbol{\partial^2(f(x,y))}}{\boldsymbol{\partial y^2}} = 2$$

Ou por $\boldsymbol{f_{YY}(x,y)}$.

Alternativamente, podemos derivar, em relação a x, o resultado da derivada parcial da função $f(x,y) = y^2 - 3xy + x^2$ em relação y, isto é, derivar em relação a x o resultado de $\frac{\partial(f(x,y))}{\partial y} = 2y - 3x$:

$$\frac{\partial(2y - 3x)}{\partial x} = \frac{\partial(2y)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial x} = 0 - 3 = -3$$

Lembre-se que $\frac{\partial(2y)}{\partial x} = 0$, pois derivando em relação a x, consideramos y constante.

Esse resultado corresponde à **derivada parcial de segunda ordem mista** (ou cruzada) de $f(x,y) = y^2 - 3xy + x^2$, que podemos representar por:

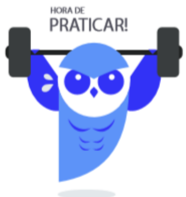
$$\frac{\boldsymbol{\partial^2(f(x,y))}}{\boldsymbol{\partial y \partial x}} = -3$$

Ou por $\boldsymbol{f_{YX}(x,y)}$.

É importante acrescentar que, exceto para casos particulares[4], as **derivadas mistas serão iguais**. Ou seja, se derivarmos uma função $f(x,y)$ primeiro em relação a x e depois em relação y, obteremos o **mesmo resultado** de derivarmos a função primeiro em relação a y e depois em relação a x:

$$\frac{\boldsymbol{\partial^2 f}}{\boldsymbol{\partial y \partial x}} = \frac{\boldsymbol{\partial^2 f}}{\boldsymbol{\partial x \partial y}}$$

Quando as **derivadas parciais** de uma função **existem e são contínuas** em uma região, podemos garantir que essa função será **continuamente diferenciável** (classe C^1) nessa região (condição suficiente).



(2018 – ADAF/AM) Dada a função $f(x,y) = 3x^2 + 4y^3 + 5x^3y^2$, determine suas derivadas parciais de segunda ordem.

a) $f_x(x,y) = 6x + 15x^2y^2$; $f_y(x,y) = 12y^2 + 10x^3y$; $f_{xy}(x,y) = 30x^2y$; $f_{yx}(x,y) = 30x^2y$

b) $f_{xx}(x,y) = 6 + 30xy^2$; $f_{yy}(x,y) = 24y + 10x^3$

c) $f_{yx}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 30x^2y$

d) $f_{xx}(x,y) = 6 + 30xy^2$; $f_{xy}(x,y) = 30x^2y$; $f_{yy}(x,y) = 24y + 10x^3$; $f_{yx}(x,y) = 30x^2y$

[4] O Teorema de Clairaut-Scharwz enuncia que essa equivalência ocorre para toda função de classe C^2.

e) $f_x(x,y) = 6x + 15x^2y^2$; $f_y(x,y) = 12y^2 + 10x^3y$; $f_{xx}(x,y) = 6 + 30xy^2$; $f_{yy}(x,y) = 24y + 10x^3$.

Comentário:

Observe que as derivadas apresentam os mesmos resultados em todas as alternativas. Para resolver essa questão, basta saber o que são derivadas parciais de segunda ordem. As derivadas parciais de segunda ordem são aquelas em que derivamos a função duas vezes em relação a x, $f_{xx}(x,y)$, duas vezes em relação a y, $f_{yy}(x,y)$, e as derivadas mistas, $f_{xy}(x,y)$ e $f_{yx}(x,y)$, em que derivamos uma vez em relação a x e outra em relação a y.

A alternativa que apresenta essas derivadas é a alternativa D. A alternativa A menciona as derivadas parciais de primeira ordem e deixa de mencionar $f_{XX}(x,y)$ e $f_{YY}(x,y)$; a alternativa B deixa de mencionar as derivadas mistas; a alternativa C menciona apenas as derivadas mistas e deixa de mencionar as derivadas $f_{XX}(x,y)$ e $f_{YY}(x,y)$; e a alternativa E menciona as derivadas parciais de primeira ordem e deixa de mencionar as derivadas parciais mistas.

De todo modo, vamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem. Para isso, primeiro precisamos calcular as derivadas parciais de primeira ordem. A derivada de $f(x,y) = 3x^2 + 4y^3 + 5x^3y^2$ em relação a x (consideramos y constante) é:

$$\frac{\partial(3x^2 + 4y^3 + 5x^3y^2)}{\partial x} = \frac{\partial(3x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(4y^3)}{\partial x} + \frac{\partial(5x^3y^2)}{\partial x}$$

Calculando em separado, temos:

$$\frac{\partial(3x^2)}{\partial x} = 3\frac{\partial(x^2)}{\partial x} = 3 \times 2x = 6x$$

$$\frac{\partial(4y^3)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(5x^3y^2)}{\partial x} = 5y^2\frac{\partial(x^3)}{\partial x} = 5y^2 \times 3x^2 = 15x^2y^2$$

E a soma é:

$$f_X(x,y) = \frac{\partial(f(x,y))}{\partial x} = 6x + 15x^2y^2$$

A derivada de $f(x,y) = 3x^2 + 4y^3 + 5x^3y^2$ em relação a y (consideramos x constante) é:

$$\frac{\partial(3x^2 + 4y^3 + 5x^3y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(4y^3)}{\partial y} + \frac{\partial(5x^3y^2)}{\partial y}$$

Calculando em separado, temos:

$$\frac{\partial(3x^2)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(4y^3)}{\partial y} = 4\frac{\partial(y^3)}{\partial y} = 4 \times 3y^2 = 12y^2$$

$$\frac{\partial(5x^3y^2)}{\partial y} = 5x^3\frac{\partial(y^2)}{\partial y} = 5x^3 \times 2y = 10x^3y$$

E a soma é:

$$f_Y(x,y) = \frac{\partial(f(x,y))}{\partial y} = 12y^2 + 10x^3y$$

Vamos primeiro calcular a derivada mista, derivando em relação a x esse último resultado (que corresponde à derivada parcial em relação a y):

$$\frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(12y^2 + 10x^3y)}{\partial x} = \frac{\partial(12y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(10x^3y)}{\partial x}$$

Calculando em separado:

$$\frac{\partial(12y^2)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(10x^3y)}{\partial x} = 10y\frac{\partial(x^3)}{\partial x} = 10y \times 3x^2 = 30x^2y$$

Logo, o resultado da derivada parcial mista de segunda ordem é:

$$f_{YX}(x,y) = \frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial y \partial x} = 30x^2y$$

Esse é o mesmo resultado que obteremos se derivarmos primeiro em relação a x e depois em relação a y. De todo modo, vamos derivar em relação a y o resultado da derivada parcial em relação a x, $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 15x^2y^2$:

$$\frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(6x + 15x^2y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(6x)}{\partial y} + \frac{\partial(15x^2y^2)}{\partial y}$$

Calculando em separado:

$$\frac{\partial(6x)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(15x^2y^2)}{\partial y} = 15x^2\frac{\partial(y^2)}{\partial y}15x^2 \times 2y = 30x^2y$$

E assim confirmamos que $f_{XY}(x,y) = f_{YX}(x,y) = 30x^2y$.

Agora, precisamos calcular $f_{XX}(x,y)$ e $f_{YY}(x,y)$. Para calcular a derivada parcial de segunda ordem em relação a x, derivamos , $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 15x^2y^2$ novamente em relação a x:

$$\frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial x^2} = \frac{\partial(6x + 15x^2y^2)}{\partial x} = \frac{\partial(6x)}{\partial x} + \frac{\partial(15x^2y^2)}{\partial x}$$

Calculando em separado:

$$\frac{\partial(6x)}{\partial x} = 6$$

$$\frac{\partial(15x^2y^2)}{\partial x} = 15y^2\frac{\partial(x^2)}{\partial y}15y^2 \times 2x = 30xy^2$$

Logo:

$$f_{XX}(x,y) = \frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial x^2} = 6 + 30xy^2$$

Para calcular a derivada parcial de segunda ordem em relação a y, derivamos ,$\frac{\partial f}{\partial y} = 12y^2 + 10x^3y$ novamente em relação a y:

$$\frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial y^2} = \frac{\partial(12y^2 + 10x^3y)}{\partial y} = \frac{\partial(12y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(10x^3y)}{\partial y}$$

Calculando em separado:

$$\frac{\partial(12y^2)}{\partial y} = 12\frac{\partial(y^2)}{\partial y} = 12 \times 2y = 24y$$

$$\frac{\partial(10x^3y)}{\partial y} = 10x^3\frac{\partial(y)}{\partial y}10x^3 \times 1 = 10x^3$$

Logo:

$$f_{YY}(x,y) = \frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial y^2} = 24y + 10x^3$$

Gabarito: D

NOÇÕES DE CÁLCULO

Integral

A integral é a operação **contrária** da **derivada**, ou seja, se a derivada de uma função $F(x)$ é $f(x)$, então a integral da função $f(x)$ será $F(x)$:

$$\frac{d[F(x)]}{dx} = f(x)$$

Rearranjando essa fórmula, temos:

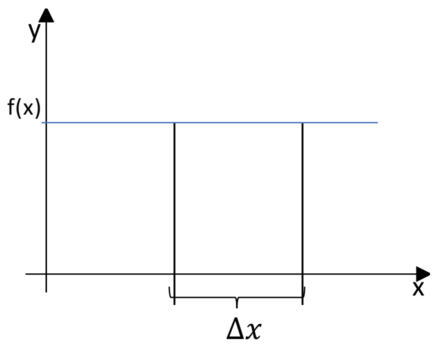
$$d[F(x)] = f(x).dx$$

Essa expressão significa que cada variação em $F(x)$ é dada pelo produto da função $f(x)$ pela variação em x, o que podemos representar por:

$$\Delta F(x) = f(x).\Delta x$$

Apenas utilizamos d em vez de Δ, pois estamos trabalhando com variações muito pequenas (infinitesimais), uma vez que o valor de $f(x)$ costuma assumir valores diferentes para diferentes valores de x.

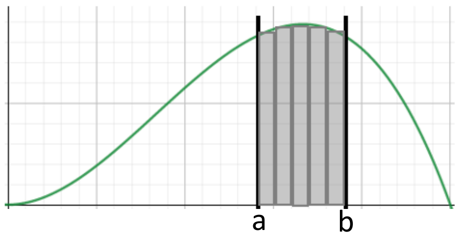
Caso $f(x)$ fosse constante (assumisse um único valor para qualquer valor de x), teríamos a situação a seguir:



Note que o produto de $f(x)$ por Δx corresponde à **área** do retângulo. Por isso, dizemos que a **integral** de uma função corresponde à sua área:

$$A = f(x).\Delta x$$

Quando a função não é constante, o valor de f(x) muda para todos os valores de x. Por isso, precisamos que as variações em x (Δx) sejam tão **pequenas** que a função possa ser considerada constante nesse pequeno intervalo:



A área de cada retângulo corresponde às pequenas parcelas da função $F(x)$ (que representa a integral da função f representada na figura). Como estamos trabalhando com grandezas infinitesimais (muito pequenas), utilizamos $\boldsymbol{dF}$ para representar a **área de cada pequeno retângulo** e dx (no lugar de Δx) para representar a pequena variação em x:

$$dF = f(x).dx$$

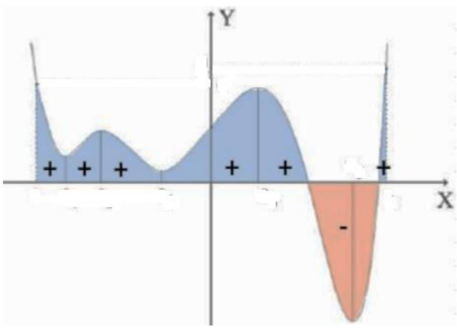
O próximo passo é **somar todas essas áreas** para encontrar a área total da função $F(x)$. No entanto, como estamos trabalhando com grandezas infinitesimais, no lugar do símbolo do somatório ($\sum$), utilizamos o símbolo da integral:

$$F(x) = \int f(x).dx$$

Na verdade, a integral corresponde à **área delimitada entre a função e o eixo x**, no intervalo considerado, quando a função está **acima do eixo x**.

Quando a função está **abaixo** do eixo x, a **integral** será um valor **negativo**, cujo módulo (isto é, o seu valor absoluto, desconsiderando o sinal negativo) é igual à **àrea delimitada entre a função e o eixo x**, no intervalo considerado.

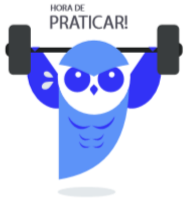
Quando a função assume valores positivos e negativos (isto é, passa acima e abaixo do eixo x em diferentes pontos), a integral corresponde à **diferença** entre a área delimitada pela função **acima** do eixo x e a área delimitada pela função **abaixo** do eixo x, conforme representado a seguir:



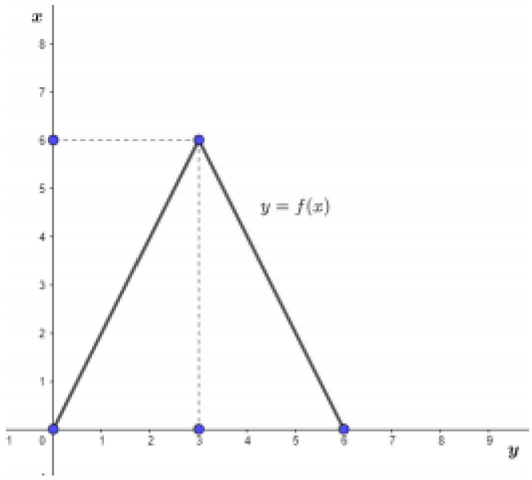
E como calculamos a integral? Para isso, precisaremos fazer a operação **inversa** da derivada.

Sabendo que a derivada de $F(x) = x^2$ é $f(x) = 2x$, então podemos afirmar que a integral de $f(x) = 2x$ é $F(x) = x^2$.

Essa função $F(x)$ que representa o **resultado** da operação de integração é chamada de **antiderivada** ou **primitiva**, enquanto a função $f(x)$ que "**sofre a operação**" é chamada de **integrando**.



(2021 – Prefeitura de São Bento do Sul/SC) Considere uma função f: [0,6] ⟶ ℝ, tal que f (x) = −|2x − 6| + 6, com o gráfico representado na figura abaixo:



Assinale a alternativa que apresenta da integral $\int_0^6 f(x)dx$

a) 18

b) -2

c) -|2|

d) 36

Comentário:

Como a integral corresponde à área sob a função, podemos calcular a área do triângulo para encontrar o valor da integral - essa forma de resolução é bem mais simples do que pelo cálculo da integral:

$$A_{triângulo} = \frac{base \times altura}{2}$$

Pelo gráfico, podemos observar que $base = 6$ e que $altura = 6$, logo:

$$A_{triângulo} = \frac{6 \times 6}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

Gabarito: A

Regras de Integração

De maneira geral, a partir das regras da derivada, definimos as seguintes regras para integrais:

- A integral de uma função da forma $f(x) = x^n$ é a **razão** entre x^{n+1} e $n+1$, para $n \neq -1$.

$$\int x^n . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Esse resultado vale para qualquer expoente diferente de -1, que corresponde a $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Por exemplo, para $n = 2$, isto é, $f(x) = x^2$, temos:

$$\int x^2 . dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$$

Para $n = 5$, isto é, $f(x) = x^5$, temos:

$$\int x^5 . dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6}$$

Para $n = 0$, isto é, $f(x) = x^0 = 1$, temos:

$$\int dx = \int 1 . dx = \int x^0 . dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} = \frac{x^1}{1} = x$$

Para $n = -2$, isto é, $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, temos:

$$\int \frac{1}{x^2} . dx = \int x^{-2} . dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

Para confirmar essa regra, vamos derivar o resultado $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, em que devemos multiplicar o valor do expoente $(n+1)$ e subtrair 1 do expoente (x^{n+1-1})

$$\frac{d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)}{dx} = (n+1) \times \frac{x^{n+1-1}}{n+1} = x^n$$

E assim confirmamos que $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ é a integral de x^n.

- Quando multiplicamos uma função por uma constante, a sua integral será multiplicada por essa constante:

$$\int a.f(x).dx = a.\int f(x).dx = a.F(x)$$

Por exemplo:

$$\int 3.x^5.dx = 3.\int x^5.dx = 3 \times \frac{x^{5+1}}{5+1} = 3 \times \frac{x^6}{6} = \frac{x^6}{2}$$

- A integral da função $f(x) = e^x$ é ela mesma:

$$\int e^x.dx = e^x$$

Essa regra decorre do fato de que a derivada da função e^x é ela mesma.

Ademais, pela regra da cadeia, vimos que a derivada de $e^{f(x)}$ é:

$$\frac{d\left(e^{f(x)}\right)}{dx} = e^{f(x)} \times f'(x)$$

Logo, a integral de $e^{f(x)} \times f'(x)$ é igual a $e^{f(x)}$:

$$\int e^{f(x)} \times f'(x).dx = e^{f(x)}$$

Por exemplo:

$$\int e^{x^3} \times 3.x^2.dx = e^{x^3}$$

- A integral da função $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ é $\ln x$:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x$$

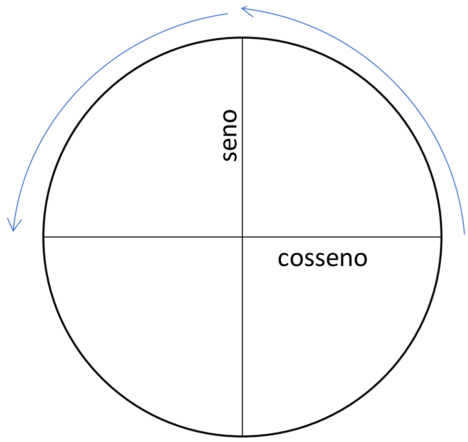
Essa regra decorre do fato de que a derivada da função $\ln x$ é $\frac{1}{x}$. Vale ressaltar também que não podemos aplicar a primeira regra da integral $\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ para $n = 1$, isto é, para $\frac{1}{x}$.

- A integral das funções trigonométricas corresponde à operação inversa da derivada das funções trigonométricas. Como a derivada do seno é o cosseno, então a integral do cosseno será o seno; como a derivada do cosseno é menos o seno, a integral do seno será menos o cosseno:

$$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)$$

$$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)$$

Por ser a operação inversa da derivada, para calcular a integral das funções seno e cosseno, podemos considerar que estamos girando 90º no sentido horário, no círculo trigonométrico.



Ademais, como a derivada da tangente é o quadrado da secante, então a integral do quadrado da secante é igual à tangente:

$$\int [\sec(x)]^2\,dx = \operatorname{tg}(x)$$

- A integral da soma ou da diferença é a soma ou diferença das integrais:

$$\int [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \pm \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]\,dx = \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,dx \pm \int \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\,dx$$

Por exemplo:

$$\int (\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x}^3)\,dx = \int \boldsymbol{x}^2\,dx + \int \boldsymbol{x}^3\,dx$$

$$\int (\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x}^3)\,dx = \frac{\boldsymbol{x}^{2+1}}{\boldsymbol{2+1}} + \frac{\boldsymbol{x}^{3+1}}{\boldsymbol{3+1}} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$$

INDO MAIS FUNDO!

Na verdade, devemos **acrescentar uma constante** aos resultados dessas integrais.

Isso decorre do fato de que a derivada de uma constante é igual a 0. Assim, quando integramos uma função $f(x)$, acrescentamos uma constante à antiderivada $F(x)$, pois a derivada dessa função $F(x)$ **somada a uma constante qualquer** corresponde exatamente à função $f(x)$, uma vez que a derivada da constante é igual a 0:

$$\int f(x).dx = F(x) + c$$

Suponha a função $x^2 + 5$. A derivada dessa função é dada por:

$$\frac{d(x^2+5)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(5)}{dx} = 2.x^{2-1} + 0 = 2x$$

Se eu tivesse a função $x^2 + 10$, ou com qualquer outra constante, a derivada teria o mesmo resultado.

Agora, vamos integrar esse resultado:

$$\int 2x.dx = \int 2x^1.dx = 2.\frac{x^{1+1}}{1+1} = 2.\frac{x^2}{2} = x^2$$

Assim, acrescentamos uma constante c ao resultado da integral, porque a derivada da função $x^2 + c$, para qualquer valor de c, é $f(x) = 2x$.

HORA DE PRATICAR!

(2018 – Prefeitura de Cabeceira Grande/MG) Considere uma função polinomial com coeficientes reais F(x) tal que sua derivada é $F'(x) = 5x^4 - 3x + 2$.

Supondo F(0) = 3, marque a alternativa que contém o valor de F(2).

a) 33

b) 54

c) -13

d) 18

Comentário:

O enunciado informa que a derivada da função F(x) é F'(x) = $5x^4 - 3x + 2$, ou seja, a função F(x) é a integral dessa função:

$$F(x) = \int (5x^4 - 3x + 2)dx = \int 5x^4\,dx - \int 3x\,dx + \int 2\,dx$$

$$F(x) = 5\frac{x^{(4+1)}}{(4+1)} - 3\frac{x^{(1+1)}}{(1+1)} + 2.\frac{x^{(0+1)}}{(0+1)} + c$$

$$F(x) = x^5 - 3\frac{x^2}{2} + 2.x + c$$

Para podermos conhecer o valor da constante, o enunciado informa que F(0) = 3:

$$F(0) = 0^5 - 3\frac{0^2}{2} + 2 \times 0 + c = 3$$

$$c = 3$$

Assim, o valor de F(2) é:

$$F(2) = 2^5 - 3\frac{2^2}{2} + 2 \times 2 + 3 = 32 - 3 \times 2 + 4 + 3 = 32 - 6 + 7 = 33$$

Gabarito: A

(2020 – Prefeitura de Jáguaribe/CE) Assinale a alternativa que representa o correto resultado para a resolução da integral indefinida: $\int(e^{2x} - sec^2x)\,dx$.

a) $2e^{2x}$+ tg x + C

b) $2e^{2x}$- tg x + C

c) $e^{2x}/2$ + tg x + C

d) $e^{2x}/2$ - tg x + C

Comentário:

O enunciado pede para resolvermos a integral indefinida:

$$\int (e^{2x} - [\sec(x)]^2)\,dx = \int e^{2x}\,dx - \int [\sec(x)]^2\,dx$$

Pela regra da cadeia, temos que a derivada de e^{2x} é o produto da derivada da função externa $g(x) = e^x$, aplicada para a função interna, $f(x) = 2x$, ou seja, $g'[f(x)] = e^{2x}$, multiplicada pela derivada da função interna, $f'(x) = 2$:

$$\frac{d(e^{2x})}{dx} = e^{2x} \times 2$$

Assim, temos que a integral de $2.e^{2x}$ é igual a e^{2x} (operação inversa):

$$\int 2.e^{2x}\,dx = 2\int e^{2x}\,dx = e^{2x}$$

Como $f'(x) = 2$ é uma constante, podemos calcular o resultado para a integral $\int e^{2x}\,dx$:

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

Ademais, a integral do quadrado da secante é igual à tangente, pois a derivada da tangente é igual ao quadrado da secante:

$$\int [\sec(x)]^2\,dx = \operatorname{tg}(x)$$

Logo, o resultado desejado é:

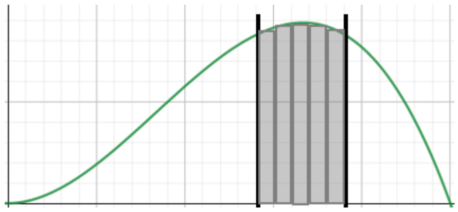
$$\int \left(e^{2x} - [\sec(x)]^2\right) dx = \frac{e^{2x}}{2} - \operatorname{tg}(x) + c$$

Gabarito: D

Teorema Fundamental do Cálculo

Até agora, estávamos resolvendo integrais sem limites, o que chamamos de **integral indefinida**.

No entanto, para calcularmos a **área** sob uma função, precisamos saber qual é o **intervalo** desejado. No gráfico replicado a seguir, representamos a área sob a função no intervalo [a, b].



Se fôssemos calcular a área desde x = 0 até x = b, o resultado seria bem **diferente**. Isso quer dizer que, para calcularmos a área sob uma função $f(x)$, precisamos dos limites do intervalo.

Embora seja possível calcular uma **função** (que chamamos de antiderivada) resultante da integração **indefinida**, para encontrar um **resultado numérico** para a integral, precisamos dos seus **limites.**

A seguir, representamos a integral da função $f(x)$ no intervalo [a, b].

$$\int_a^b f(x).\,dx$$

O **Teorema Fundamental do Cálculo** estabelece que, sendo $f(x)$ contínua no intervalo [a,b] e sendo $F(x)$ a antiderivada de $f(x)$, temos:

$$\int_{a}^{b} f(x).dx = F(b) - F(a)$$

Portanto, para calcular a integral **definida** no intervalo [a, b], aplicamos a antiderivada no **limite superior** do intervalo, b, aplicamos a antiderivada no **limite inferior** do intervalo, a, e calculamos a **diferença** entre o primeiro resultado e o segundo.

Por exemplo, para calcular a integral de $f(x) = x^2$ no intervalo [1, 3], primeiro calculamos a antiderivada (ou seja, desconsideramos os limites da integral, inicialmente):

$$\int x^2.dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$$

Aplicando essa função no limite superior $\boldsymbol{x = 3}$, temos:

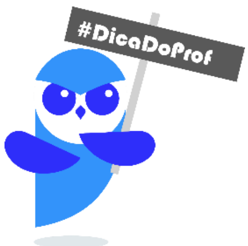
$$F(3) = \frac{3^3}{3} = \frac{27}{3}$$

Aplicando essa função no limite inferior $\boldsymbol{x = 1}$, temos:

$$F(1) = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}$$

E a diferença, que corresponde ao resultado da integral definida no intervalo [1, 3] é:

$$\int_{1}^{3} x^2.dx = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$



Não aplique na antiderivada o valor da **diferença** entre os extremos do intervalo, ou seja, **não** calcule $F(b - a)$. Para esse exemplo que vimos, a diferença $b - a = 3 - 1 = 2$ e o valor de $F(2)$ é:

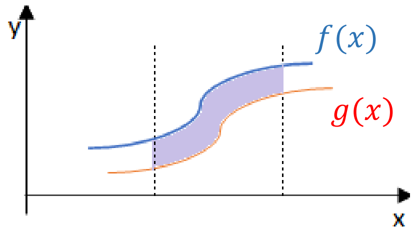
$$F(2) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$$

Que é muito diferente do resultado correto.

Para não termos que escrever diversas integrais (sem os limites e depois com os limites) quando estivermos calculando uma integral definida, representamos os limites do intervalo fora de colchetes, enquanto calculamos a antiderivada. Para o exemplo que acabamos de ver, poderíamos representar esse mesmo cálculo da seguinte forma:

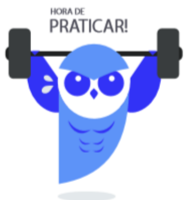
$$\int_{1}^{3} x^2 . dx = \left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right]_1^3 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Acrescenta-se que podemos calcular a **região delimitada entre** duas funções f e g em determinado intervalo, conforme ilustrado a seguir, pela **diferença** entre as integrais da função.

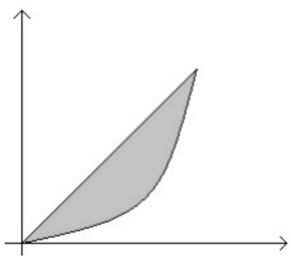


A área indicada no gráfico acima, em um intervalo [a, b] corresponde à diferença:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x) dx$$



(2018 – Prefeitura de Cristalina/GO)



A figura acima apresenta o triângulo parabólico: a região limitada pela reta y = x e pela parábola y = x². Sendo assim, a área do triângulo parabólico é igual a

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{1}{12}$

Comentário:

A região indicada no gráfico pode ser calculada pela diferença entre as integrais das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$:

$$A = \int_a^b x\,dx - \int_a^b x^2\,dx$$

A região de integração corresponde ao intervalo entre os dois pontos em que essas funções se interceptam, quais sejam $x = 0$ e $x = 1$, pois para ambos os valores temos $x = x^2$, logo:

$$A = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$$

Vamos calcular a antiderivada para a primeira integral (desconsiderando por ora os limites):

$$F_1(x) = \int x.dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2}$$

Agora, aplicamos os limites do intervalo, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_0^1 x\,dx = F_1(1) - F_1(0) = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Agora, fazemos o mesmo para a segunda integral. Desconsiderando inicialmente os limites, temos:

$$F_2(x) = \int x^2.dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$$

Aplicando os limites do intervalo, temos:

$$\int_0^1 x^2\,dx = F_2(1) - F_2(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

E a diferença entre esses dois resultados corresponde à área da região assinalada no gráfico:

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

Gabarito: C

Integrais impróprias

Integrais impróprias são integrais definidas que se encaixam em uma das situações a seguir:

- Pelo menos um dos limites do intervalo de integração é **infinito**:

$$\int_a^{\infty} f(x).dx\,,\qquad \int_{-\infty}^{b} f(x).dx\,,\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx$$

- O integrando $f(x)$ apresenta uma **descontinuidade infinita** em algum ponto do intervalo de integração.

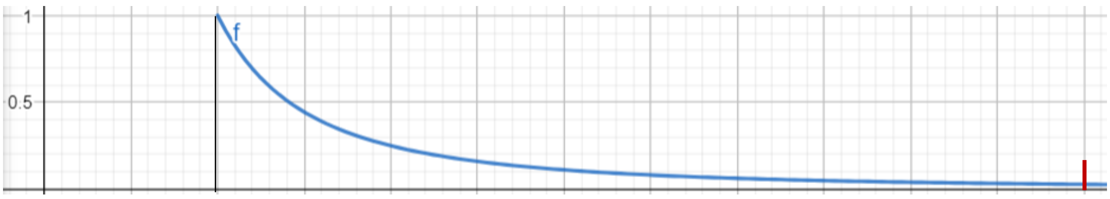
Por exemplo, a seguinte integral é imprópria, apesar de os limites serem finitos (isto é, não infinitos), pois a função **não é definida para $x = 0$**, que pertence ao intervalo de integração:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}.dx$$

Para calcular essas integrais, consideramos uma aproximação. No primeiro caso (**limites infinitos**), consideramos que o valor da integral até o infinito é muito próximo do valor da integral para números **muito grandes**. Por exemplo, suponha a integral da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no intervalo $[1, \infty)$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}.dx$$

Consideramos que o valor da área sob função em todo o intervalo $[1, \infty)$ (região **ilimitada**) é **muito próxima** da área delimitada no intervalo de 1 até números **muito grandes**, que corresponde a uma região **limitada**, conforme ilustrado a seguir.



Quanto maior for esse limite superior, mais próximo estaremos do real valor da integral. Assim, podemos dizer que a integral no intervalo $[1, \infty)$ equivale à integral em um intervalo limitado $[1, \boldsymbol{b}]$, quando $\boldsymbol{b}$ **tende a infinito**:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}.dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}.dx$$

Com isso, conseguimos calcular o valor da integral. Primeiro, calculamos a antiderivada (desconsiderando inicialmente os limites)

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2}.dx = \int x^{-2}.dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

Agora, aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo, mas utilizando o limite para o extremo superior do intervalo:

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}.dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(1)$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$F(1) = -\frac{1}{1} = -1$$

Logo, o resultado da integral imprópria é:

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}.dx = 0 - (-1) = 1$$

De modo geral, podemos substituir a integral da função $f(x)$ em um intervalo ilimitado da forma $[a, \infty)$ pelo limite da integral em um intervalo limitado $[a, b]$, quando b tende a infinito:

$$\int_a^\infty f(x).dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x).dx$$

Analogamente, podemos substituir a integral da função $f(x)$ em um intervalo da forma $(-\infty, b]$ pelo limite da integral em um intervalo limitado $[a, b]$, quando a tende a menos infinito:

$$\int_{-\infty}^b f(x).dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x).dx$$

Quando o intervalo for ilimitado nos dois extremos, substituímos a integral imprópria pela soma da integral limitada no intervalo $[a, 0]$, quando a tende a menos infinito, com a integral limitada no intervalo $[0, b]$, quando b tende a infinito:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x).dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x).dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x).dx$$

Quando esses **limites existem e são finitos**, as integrais impróprias são ditas **convergentes**; caso contrário, isto é, quando os **limites não existem ou são infinitos**, as integrais impróprias são ditas **divergentes**.

Vimos que $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}.dx = 1$, logo podemos concluir que a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}.dx$ é **convergente**.

Agora, vamos calcular a seguinte integral de $f(x) = \frac{1}{x}$ no mesmo intervalo:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}.dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}.dx$$

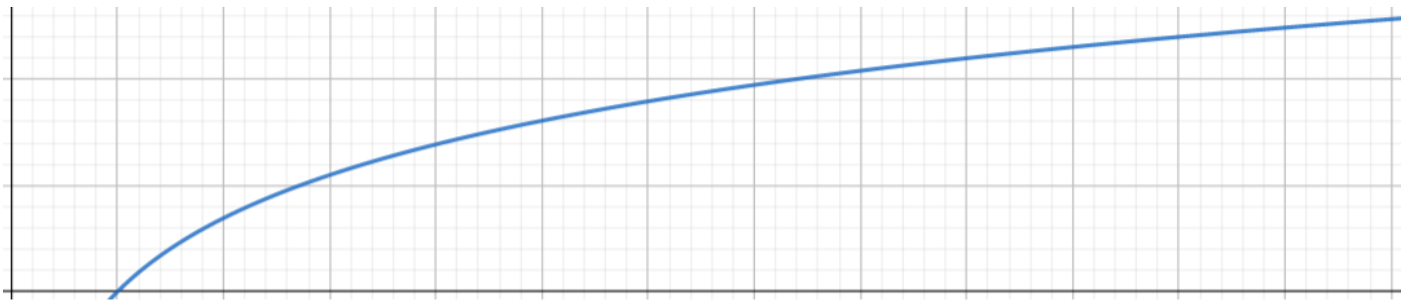
Primeiro, calculamos a antiderivada (desconsiderando inicialmente os limites)

$$\int \frac{1}{x}.dx = \ln(x)$$

Agora, aplicamos os limites:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}.dx = \lim_{x\to\infty}\ln(x) - \ln(1) = \lim_{x\to\infty}\ln(x) - 0 = \lim_{x\to\infty}\ln(x)$$

Como a função logarítmica aumenta com o aumento de x, então o limite de $\ln(x)$ quando $x \to \infty$ é infinito, conforme gráfico da função $\ln(x)$ ilustrado a seguir.



Portanto, a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{1}{x}.dx$ é **divergente**.

INDO MAIS FUNDO!

Vale destacar a seguinte propriedade de integrais definidas em intervalos ilimitados:

Se duas funções apresentarem valores positivos em um intervalo positivo $[a, \infty)$, de modo que uma seja sempre maior do que a outra, isto é, $f(x) \geq g(x) > 0$ para todo $x \geq a$, então:

- se a integral de $f(x)$ no intervalo $[a, \infty)$ converge, podemos concluir que a integral de $g(x)$ no referido intervalo converge, ou seja:

$$\text{Se } \int_a^\infty f(x).dx \text{ converge, então } \int_a^\infty g(x).dx \text{ converge}$$

- se a integral de $g(x)$ no intervalo $[a, \infty)$ diverge, podemos concluir que a integral de $f(x)$ no referido intervalo diverge, ou seja:

$$\text{Se } \int_a^\infty g(x).dx \text{ diverge, então } \int_a^\infty f(x).dx \text{ diverge}$$

Em relação ao segundo caso de integrais impróprias, em que o integrando apresenta uma **descontinuidade infinita** em um ponto c do intervalo de integração, também limitamos a região para um ponto **muito próximo** de c. Por exemplo, vamos supor a integral da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no intervalo [0, 1]:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx$$

A região associada a essa integral é **ilimitada** pois a função não está definida para $x = 0$. Assim, vamos considerar que essa região ilimitada associada ao intervalo [0, 1] é igual à região limitada no intervalo [**ε**, 1] quando ε é um valor muito pequeno, **muito próximo de 0**, conforme ilustrado a seguir.

Portanto, podemos calcular essa integral utilizando o limite da integral no intervalo $[\varepsilon, 1]$, para $\varepsilon > 0$ muito pequeno, isto é, quando ε se aproxima de 0 pela direita (valores positivos):

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx$$

Assim, conseguimos calcular a integral. A antiderivada dessa função (ignorando inicialmente os limites) é:

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}}.dx = \int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2.x^{1/2} = 2.\sqrt{x}$$

Aplicando os limites, temos:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx = F(1) - \lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x)$$

$$F(1) = 2.\sqrt{1} = 2$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x) = 2.\sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx = 2 - 0 = 2$$

Como o resultado da integral imprópria é um valor finito, concluímos que a integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx$ **converge**.

De modo geral, para calcular a integral de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$ quando a função $f(x)$ tiver uma descontinuidade infinita no limite inferior a, calculamos o limite da integral no intervalo $[\varepsilon, b]$ quando ε tende a a pela direita (isto é, para $\varepsilon > a$):

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{\varepsilon \to a^+} \int_\varepsilon^b f(x).dx$$

Analogamente, para calcular a integral de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$ quando a função $f(x)$ tiver uma descontinuidade infinita no limite superior b, podemos calcular o limite da integral no intervalo $[a, \varepsilon]$ quando ε tende a b pela esquerda (isto é, para $\varepsilon < b$):

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{\varepsilon \to b^-} \int_a^\varepsilon f(x).dx$$

Quando uma função $f(x)$ é descontínua em um ponto c no meio do intervalo de integração, $a < c < b$, substituímos a integral da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, pela soma da integral no intervalo $[a, \varepsilon]$ quando ε tende a c pela esquerda (isto é, para $\varepsilon < c$) com a integral no intervalo $[\varepsilon, b]$ quando ε tende a c pela direita (isto é, para $\varepsilon > c$):

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{\varepsilon \to c^-} \int_a^\varepsilon f(x).dx + \lim_{\varepsilon \to c^+} \int_\varepsilon^b f(x).dx$$

Assim como vimos para as integrais definidas em intervalos ilimitados, aqui também utilizamos os conceitos de **convergência** e **divergência**. Quando os respectivos limites existem e são finitos, as integrais impróprias são ditas convergentes; caso contrário, isto é, quando os limites não existem ou são infinitos, as integrais impróprias são ditas divergentes.

Técnicas de Integração

Nesta seção, veremos duas técnicas que ajudam a resolver integrais que não podem ser resolvidas pela aplicação direta das regras de integração que vimos anteriormente.

Integração por Substituição

Essa técnica consiste em **substituir** uma expressão do integrando por uma **nova variável**. Por exemplo, considere a seguinte integral:

$$\int x \cos(x^2 + 1) \; dx$$

Para resolver essa integral, vamos chamar $\boldsymbol{x^2 + 1}$ de uma variável $\boldsymbol{u}$:

$$\int x \cos\underbrace{(x^2 + 1)}_{\boldsymbol{u}} \; dx$$

Para que possamos reescrever a integral acima, precisaremos representar o **restante do integrando também como uma função de $\boldsymbol{u}$** e não mais uma função de x. Para isso, vamos calcular a derivada da função u:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(x^2 + 1)}{dx} = 2x$$

Reorganizando essa expressão, temos:

$$du = 2x.dx$$

$$x.dx = \frac{1}{2}du$$

Ou seja, a expressão $x.dx$, que faz parte do integrando original, se torna $\boldsymbol{\frac{1}{2}du}$. Logo, a integral passa a ser:

$$\int x\cos(x^2+1)\ dx = \int \cos(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\frac{1}{2}\ du} = \frac{1}{2}\int \cos(u)\ du$$

E conhecemos a integral do cosseno! Ela é igual a seno:

$$\frac{1}{2}\int \cos(u)\ du = \frac{1}{2}\text{sen}\ (u)$$

E assim foi possível calcular a integral aparentemente impossível.

Sendo a integral indefinida (sem os limites), vamos precisar escrever esse resultado em **função de $\boldsymbol{x}$** (já que a variável u foi totalmente nossa invenção). Sabendo que definimos $u = x^2+1$, o resultado da integral é:

$$\int x\cos(x^2+1)\ dx = \frac{1}{2}\text{sen}\ (x^2+1) + C$$

Por outro lado, vamos supor que a integral seja definida, por exemplo:

$$\int_0^2 x.\cos(x^2+1)\ dx$$

Nessa situação, temos dois caminhos: ou voltamos com a variável x, como acabamos de fazer, e aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo em relação aos limites indicados na integral original; ou deixamos o resultado como uma função de u e **adaptamos os limites da integral** para que se refiram a valores de $\boldsymbol{u}$.

Pelo primeiro caminho, temos:

$$\int_0^2 x.\cos(x^2+1)\ dx = F(2) - F(0)$$

Em que $F(x) = \frac{1}{2}\text{sen}\ (x^2+1)$, logo:

$$F(2) = \frac{1}{2}\text{sen}\ (2^2+1) = \frac{1}{2}\text{sen}\ (5)$$

$$F(0) = \frac{1}{2}\text{sen}\ (0^2+1) = \frac{1}{2}\text{sen}\ (1)$$

$$\int_0^2 x.\cos(x^2+1)\ dx = \frac{1}{2}[\text{sen}\ (5) - \text{sen}\ (1)]$$

Pelo segundo caminho, temos:

$$\int_0^2 x.\cos(x^2+1)\ dx = \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} \cos(u)\ du$$

Sendo $u = x^2 + 1$, para $x = 0$, o valor de u_1 é:

$$u_1 = 0^2 + 1 = 1$$

E para $x = 2$, o valor de u_2 é:

$$u_2 = 2^2 + 1 = 5$$

Assim, a integral desejada corresponde à seguinte integral:

$$\frac{1}{2}\int_1^5 \cos(u)\ du = F(5) - F(1)$$

Em que $F(u) = \frac{1}{2}\text{sen}\ (u)$, logo:

$$F(5) = \frac{1}{2}\text{sen}\ (5)$$

$$F(1) = \frac{1}{2}\text{sen}\ (1)$$

$$\frac{1}{2}\int_1^5 \cos(u)\ du = \frac{1}{2}[\text{sen}\ (5) - \text{sen}\ (1)]$$

Que é o mesmo resultado que obtivemos anteriormente.

Integral por Partes

A fórmula da integral por partes é:

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)dx$$

Em que $u(x)$ e $v(x)$ são duas funções de x e $u'(x)$ e $v'(x)$ são as derivadas dessas funções, respectivamente. Podemos representar essa equação mais simplificadamente como:

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

Para resolver uma integral por essa técnica, devemos considerar que uma parte do integrando corresponde à função $\boldsymbol{u}$ e que a outra parte corresponde à $\boldsymbol{dv}$. Em seguida, devemos calcular $\boldsymbol{du}$, pela derivada da função $\boldsymbol{u}$, e $\boldsymbol{v}$, que é a integral de $\boldsymbol{dv}$.

Suponha a seguinte integral:

$$\int x.\cos(x)\,.dx$$

Para resolvê-la, vamos considerar que x corresponde à função u e que $\cos(x)\,.dx$ corresponde a dv. Assim, a derivada de u é:

$$u = x \rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \rightarrow du = dx$$

E a integral de dv é:

$$dv = \cos(x)\,.dx \rightarrow v = \int dv = \int \cos(x)\,.dx = sen(x)$$

Substituindo esses resultados $(u = x, dv = \cos(x)\,dx, v = sen(x), du = dx)$ na fórmula da integral por partes, temos:

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$\int x.\cos(x)\,.dx = x.sen(x) - \int sen(x).dx$$

Portanto, para resolver a integral $\int x.\cos(x)\,.dx$, resta calcularmos a integral $\int sen(x).dx$, que sabemos ser menos o cosseno:

$$\int sen(x).dx = -\cos\,(x)$$

Logo, a integral desejada é:

$$\int x.\cos(x)\,.dx = x.sen(x) + \cos(x)$$

Em rigor, devemos adicionar uma constante qualquer ao resultado da integral.

Para utilizar a integração por partes, devemos escolher com as funções u e dv com cautela. Se tivéssemos escolhido cos (x) como u e $x.dx$ como dv, teríamos:

$$u = \cos(x) \to du = -sen(x)$$

$$dv = x.dx \to v = \int x.dx = \frac{x^2}{2}$$

E a integral por partes seria:

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$\int x.\cos(x).dx = -sen(x).\frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2}{2}.sen(x).dx$$

No entanto, a integral $\int \frac{x^2}{2}.sen(x).dx$ é ainda mais complicada de resolver do que a integral inicial. Assim, é importante escolher u e v, de modo que você tenha a integral $\boldsymbol{\int v.du}$ seja **mais simples** de calcular do que a integral original.

A integral por partes pode ser considerada como a **regra da derivada do produto reversa**. A derivada do produto é dada por:

$$\frac{d[f(x).g(x)]}{dx} = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Integrando essa expressão (em relação a x), temos:

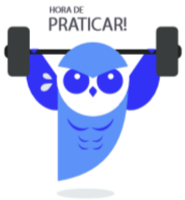
$$\int \frac{d[f(x).g(x)]}{dx} dx = \int f'(x).g(x).dx + \int f(x).g'(x).dx$$

$$f(x).g(x) = \int f'(x).g(x).dx + \int f(x).g'(x)\,dx$$

Reorganizando, temos:

$$\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x).dx$$

Que é o resultado da integração por partes, em que denotamos $f(x)$ por u e $g(x)$ por v.



(2020 – IF/MT) Sejam f(x) e g(x) funções deriváveis no intervalo I. Então a fórmula da integração por partes, envolvendo as funções f(x) e g (x) , pode ser escrita como:

a) $\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) + \int g'(x).f(x).dx$

b) $\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int g'(x).f'(x).dx$

c) $\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) + \int g(x).f'(x).dx$

d) $\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int g(x).f'(x).dx$

e) $\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int g'(x).f(x).dx$

Comentário:

A integral por partes é:

$$\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x).dx$$

Em outras palavras, temos uma diferença (-) e não uma soma (+), logo as alternativas A e C estão incorretas. Ademais, uma das integrais corresponde ao produto de uma das funções (f) pela derivada da outra função (g'); e a outra integral inverte as derivadas dessas funções, sendo o produto de g pela derivada de f.

Gabarito: D

(2021 – Prefeitura de Vista Serrana/PB) Assinale a alternativa que contenha a solução da integral:

$$\int x^2 \cos(x)\,dx$$

a) $(2 - x^2)$ cos (x) + 2xsen (x) + C

b) $(2 - x^2)$ cos (x) + 2 sen (x) + C

c) $(x^2 - 2)$ sen (x) + 2xcos (x) + C

d) $(x^2 - 2)$ sen (x) + 2cos (x) + C

e) 3 $(x^2 - 2)$ cos (x) + x $(x^2 - 6)$ sen (x) + C

Comentário:

Para resolver essa integral, vamos utilizar a integral por partes, chamando x^2 de u e $\cos(x).dx$ de dv:

$$u = x^2$$

$$dv = \cos(x).dx$$

Assim:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x \rightarrow du = 2x.dx$$

$$v = \int dv = \int \cos(x).dx = \text{sen}(x)$$

A fórmula da integral por partes é:

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2.\text{sen}(x) - \int \text{sen}(x).2x.dx$$

Novamente, precisamos da integral por partes para calcular a integral $\int \text{sen}(x).2x.dx$:

$$u_2 = 2x$$

$$dv_2 = \text{sen}(x).dx$$

Assim:

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{d(2x)}{dx} = 2 \rightarrow du_2 = 2.dx$$

$$v_2 = \int dv_2 = \int \text{sen}(x).dx = -\cos(x)$$

Pela fórmula da integral por partes, temos:

$$\int \text{sen}(x).2x.dx = 2x[-\cos(x)] - \int [-\cos(x)].2.dx$$

$$\int \text{sen}(x).2x.dx = -2x\cos(x) + 2\int \cos(x).dx$$

$$\int \text{sen}(x).2x.dx = -2x\cos(x) + 2.\text{sen}(x)$$

Agora, voltamos à primeira fórmula da integral por partes:

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2.\text{sen}(x) - \int \text{sen}(x).2x.dx$$

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2.\text{sen}(x) - [-2x\cos(x) + 2.\text{sen}(x)]$$

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2.\text{sen}(x) + 2x\cos(x) - 2.\text{sen}(x)$$

Organizando melhor esse resultado, temos:

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = (x^2 - 2).\text{sen}(x) + 2x\cos(x)$$

Lembrando que precisamos somar uma constante qualquer ao resultado de uma integral indefinida, temos:

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = (x^2 - 2).\text{sen}(x) + 2x\cos(x) + C$$

Gabarito: C

Integração Numérica

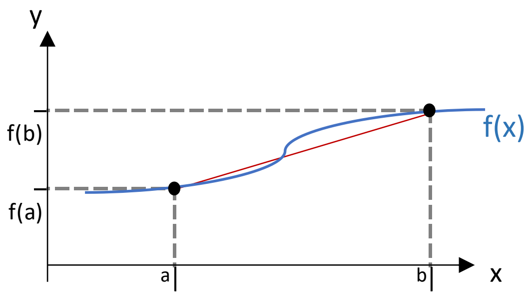
O objetivo da integração numérica é aproximar curvas genéricas a funções conhecidas, como polinômios, de modo que a integral definida das curvas possa ser **aproximada** pela integral definida dos polinômios. Essa aproximação é indicada quando não conhecemos a função da curva, apenas os seus valores em certos pontos, ou quando, apesar de conhecida, a integral da função for difícil de calcular.

A seguir, veremos dois métodos de integração baseados nas fórmulas de Newton-Cotes, as quais buscam um polinômio que interpole a função em pontos **igualmente espaçados** do intervalo desejado, a saber a Regra do Trapézio (simples e repetida) e a Regra de 1/3 de Simpson (simples).

Regra do Trapézio

A regra do trapézio consiste em aproximar uma função f(x) qualquer, em um intervalo [a, b], por uma **reta** que passe pelos pontos f(a) e f(b), de modo que a integral da função no intervalo em tela possa ser aproximada pela **área do trapézio**.

No gráfico a seguir, ilustramos a função f(x) a ser aproximada em azul, os valores da função nos limites do intervalo de interesse, f(a) e f(b), e a reta que liga os pontos (a, f(a)) e (b, f(b)), em vermelho.



Consideramos que a função f(x) possa ser aproximada pela reta em vermelho, de modo que a integral da função no intervalo [a, b], que corresponde à área sob a função no referido intervalo, possa ser aproximada pela **área delimitada pela reta vermelha** no intervalo [a, b]. Podemos observar que essa área corresponde à **área de um trapézio**, dada por:

$$A_{Trapézio} = \frac{base\ menor + Base\ maior}{2} \times altura$$

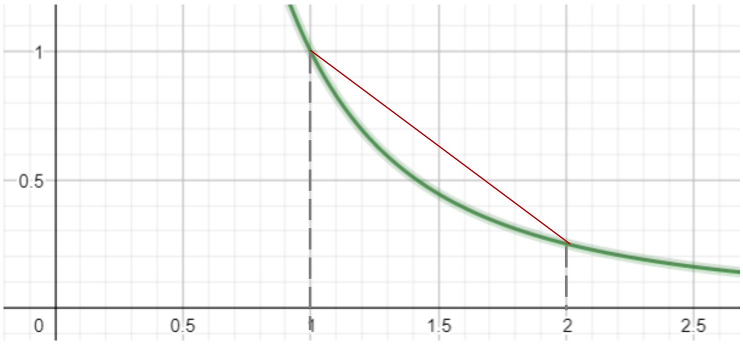
Pelo gráfico acima, observamos que a base maior desse trapézio corresponde a f(b), a base menor corresponde a f(a) e que a altura corresponde à diferença b - a (amplitude do intervalo), logo:

$$\boxed{A_{Trapézio} = \frac{f(a)+f(b)}{2} \times (b-a)}$$

Por exemplo, vamos calcular a seguinte integral pela regra do trapézio:

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}.dx$$

A função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ está ilustrada a seguir, bem como a respectiva reta de aproximação para o intervalo [1,2].



A área do trapézio é dada por:

$$A_{Trapézio} = \frac{f(a) + f(b)}{2} \times (b - a)$$

Para a = 1 e b = 2, temos:

$$A_{Trapézio} = \frac{f(1) + f(2)}{2} \times (2 - 1)$$

$$f(1) = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

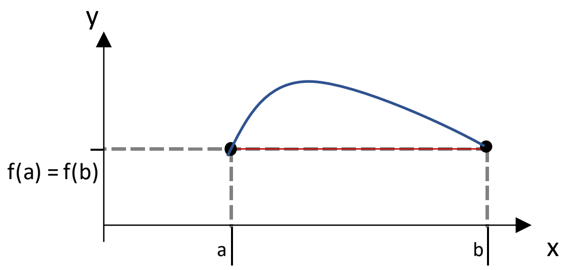
Logo:

$$A_{Trapézio} = \frac{1 + 0,25}{2} \times 1 = 0,625$$

E é essa a aproximação para $\int_1^2 \frac{1}{x^2}.dx$.

Observe que, para calcular a área do trapézio, **não** é necessário calcular a **reta** de aproximação. Também **não** é necessário **conhecer a função** f(x), desde que sejam conhecidos os valores da função nos extremos do intervalo, f(a) e f(b).

É possível que a reta de aproximação não seja propriamente um trapézio. Por exemplo, se o valor da função seja o mesmo nos dois extremos do intervalo, teremos um retângulo:



Nesse caso, a área sob a reta de aproximação seria dada por:

$$A_{Retângulo} = Base \times altura = f(a) \times (b - a)$$

Utilizando a fórmula do trapézio, teríamos:

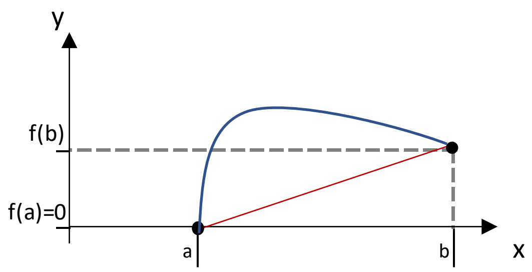
$$A_{Trapézio} = \frac{f(a) + f(b)}{2} \times (b - a)$$

Sabendo que $f(a) = f(b)$, a fórmula da área do trapézio resulta na seguinte fórmula:

$$A_{Trapézio} = \frac{f(a) + f(a)}{2} \times (b - a) = \frac{2.f(a)}{2} \times (b - a) = f(a) \times (b - a)$$

Que é o mesmo resultado que obtivemos quando calculamos a área do retângulo.

Ademais, se o valor da função em um dos extremos for nulo, teremos um triângulo:



Nesse caso, a área sob a reta de aproximação seria dada por:

$$A_{Triângulo} = \frac{Base}{2} \times altura = \frac{f(b)}{2} \times (b - a)$$

Utilizando a fórmula do trapézio, teríamos:

$$A_{Trapézio} = \frac{f(a) + f(b)}{2} \times (b - a)$$

Sabendo que $f(a) = 0$, a fórmula da área do trapézio resulta na seguinte fórmula:

$$A_{Trapézio} = \frac{0 + f(b)}{2} \times (b - a) = \frac{f(b)}{2} \times (b - a)$$

Que é o mesmo resultado que obtivemos quando calculamos a área do triângulo.

Em suma, mesmo que a área sob a reta de aproximação no intervalo desejado **não forme propriamente um trapézio**, **podemos utilizar a fórmula da regra do trapézio** para calcular o valor aproximado para a integral da função desejada.

Podemos calcular a **estimativa máxima para o erro da aproximação** pela regra do trapézio para a função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$:

$$|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12} . \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Ou seja, o valor absoluto do erro da aproximação é menor ou igual do que o produto de $\frac{(b-a)^3}{12}$ pelo valor absoluto máximo da segunda derivada da função no intervalo [a, b].

Note que o valor absoluto do erro é proporcional ao valor absoluto da **segunda derivada**, pois quanto maior o valor absoluto da segunda derivada, maior a concavidade da função e, consequentemente, mais a função se afasta da reta.

Por exemplo, para a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, as suas primeira e segunda derivadas são:

$$f'(x) = \frac{d(x^{-2})}{dx} = -2. x^{-3}$$

$$f''(x) = \frac{d(-2x^{-3})}{dx} = -2 \times (-3). x^{-4} = 6. x^{-4} = \frac{6}{x^4}$$

Para $x > 0$, quanto maior o valor de x, menor o valor de $\frac{6}{x^4}$, logo, o valor máximo de $f''(x)$ no intervalo [1, 2] ocorre para $x = 1$, em que:

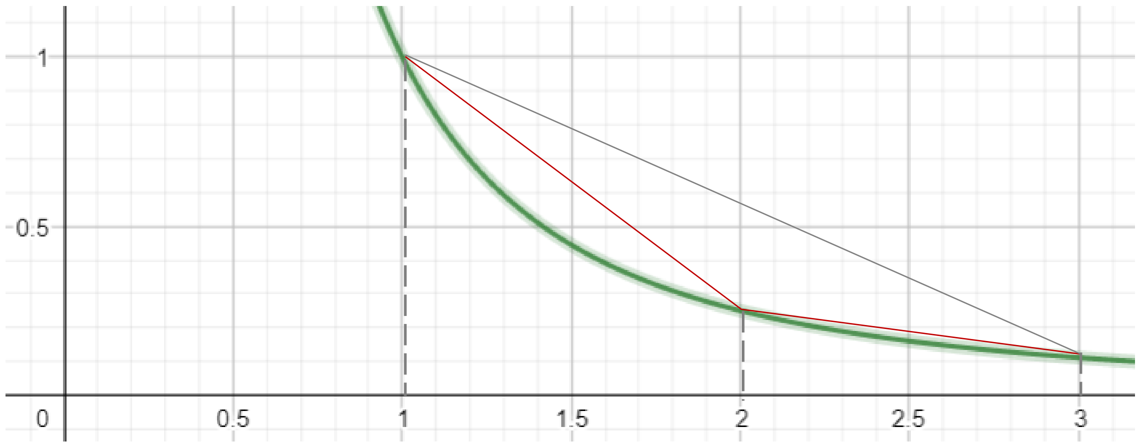
$$f''(1) = \frac{6}{1^4} = 6$$

Assim, a estimativa do erro dessa aproximação é dada por:

$$|E_T| \leq \frac{(2-1)^3}{12} . 6 = \frac{(1)^3}{2} = 0,5$$

Regra do Trapézio Repetida

Para reduzir o erro associado à aproximação, podemos **dividir o intervalo** desejado em intervalos menores. Por exemplo, vamos calcular a integral da mesma função que vimos anteriormente, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, no intervalo [1,3]. Em vez de utilizar uma única reta para todo o intervalo (reta cinza do gráfico a seguir), podemos utilizar uma reta para o intervalo [1, 2] e outra reta para o intervalo {2, 3] (retas vermelhas do gráfico a seguir).



Note como as retas vermelhas estão **mais próximas** da função do que a reta cinza. Para calcular as áreas delimitadas pelas retas vermelhas, precisamos das áreas dos dois trapézios, a do intervalo [1, 2] e a do intervalo [2, 3]. Já calculamos a área do trapézio no intervalo [1, 2]:

$$A_{[1,2]} = 0{,}625$$

Agora, precisamos calcular a área do trapézio no intervalo [2, 3]:

$$A_{Trapézio} = \frac{f(a) + f(b)}{2} \times (b - a)$$

Para a = 2 e b = 3, temos:

$$A_{Trapézio} = \frac{f(2) + f(3)}{2} \times (3 - 2)$$

$$f(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(3) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Logo:

$$A_{[2,3]} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}{2} \times 1 = \left(\frac{9}{36} + \frac{4}{36}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{13}{72} \cong 0{,}18$$

Logo, a aproximação para $\int_1^3 \frac{1}{x^2}.dx$ é a soma:

$$A_{[1,2]} + A_{[2,3]} = 0{,}625 + 0{,}18 \cong 0{,}8$$

INDO MAIS FUNDO!

A estimativa do erro da aproximação pela regra do trapézio repetida é muito similar à da regra do trapézio que vimos anteriormente, mas dividimos por n^2, em que n é o número de subdivisões do intervalo $[a, b]$:

$$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)^3}{12.\boldsymbol{n^2}} . \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Ou seja, a estimativa do erro pela regra do trapézio repetida é igual à estimativa do erro pela regra do trapézio, dividida por $\boldsymbol{n^2}$:

$$E_{TR} = \frac{E_T}{\boldsymbol{n^2}}$$

Para a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, no intervalo [1, 3], já calculamos a segunda derivada $f''(x) = \frac{6}{x^4}$ e vimos que esse valor é máximo para o menor valor x, logo:

$$\max_{x \in [1,3]} |f''(x)| = f''(1) = \frac{6}{1^4} = 6$$

Assim, a estimativa do erro pela regra do trapézio é:

$$|E_T| \leq \frac{(3-1)^3}{12} . 6 = \frac{(2)^3}{2} = 4$$

Quando dividimos esse intervalo em n = 2 subdivisões, como acabamos de fazer, a estimativa para o erro passa a ser:

$$E_{TR} = \frac{E_T}{\boldsymbol{n^2}} = \frac{4}{\boldsymbol{2^2}} = 1$$

(CESPE/2018 – IFF) Para uma função ƒ(*x*), contínua no intervalo [0, 6], são conhecidos os seguintes valores: ƒ(0) = 0, ƒ(1) = 3, ƒ(2) = 8, ƒ(3) = 15, ƒ(4) = 24, ƒ(5) = 35 e ƒ(6) = 48. Nesse caso, a área da região abaixo do gráfico de ƒ(*x*), acima do eixo das abscissas e entre *x* = 0 e *x* = 6, calculada por integração numérica pela regra do trapézio, é igual a:

a) 109.

b) 133

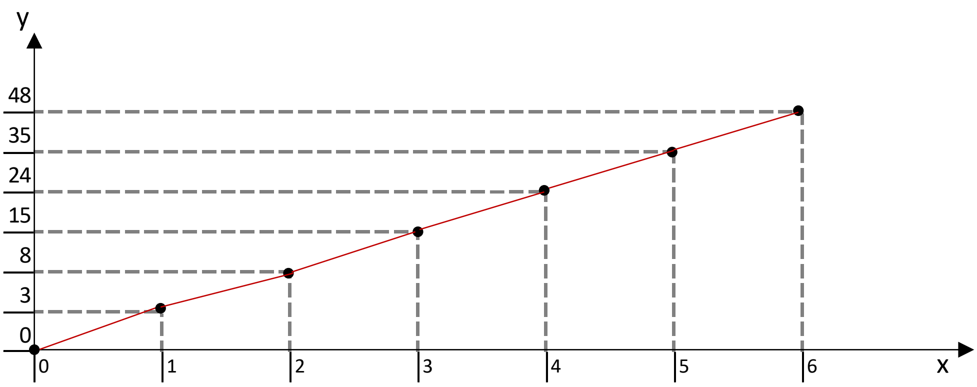
c) 218.

d) 266.

e) 623

Comentário:

O enunciado não informa qual é a função a ser aproximada pela regra do trapézio, mas informa os valores que a função assume nos pontos x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5 e x = 6. Logo, a integral da função pode ser aproximada à soma da área dos trapézios formados pelas retas que ligam os valores da função nesses pontos (regra do trapézio repetida), conforme ilustrado a seguir:



A área delimitada no intervalo [0, 1], que corresponde a um triângulo, é:

$$A_{[0,1]} = \frac{Base \times altura}{2} = \frac{f(1) \times (1-0)}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$$

A área delimitada no intervalo [1, 2], que corresponde a um trapézio, é:

$$A_{[1,2]} = \frac{base\ menor + Base\ Maior}{2} \times altura = \frac{f(1) + f(2)}{2} \times (2-1) = \frac{3+8}{2} \times 1 = \frac{11}{2}$$

A área do trapézio delimitada no intervalo [2, 3] é:

$$A_{[2,3]} = \frac{f(2) + f(3)}{2} \times (3-2) = \frac{8+15}{2} \times 1 = \frac{23}{2}$$

A área do trapézio delimitada no intervalo [3, 4] é:

$$A_{[3,4]} = \frac{f(3) + f(4)}{2} \times (4 - 3) = \frac{15 + 24}{2} \times 1 = \frac{39}{2}$$

A área do trapézio delimitada no intervalo [4, 5] é:

$$A_{[4,5]} = \frac{f(4) + f(5)}{2} \times (5 - 4) = \frac{24 + 35}{2} \times 1 = \frac{59}{2}$$

Por fim, a área do trapézio delimitada no intervalo [5, 6] é:

$$A_{[5,6]} = \frac{f(5) + f(6)}{2} \times (6 - 5) = \frac{35 + 48}{2} \times 1 = \frac{83}{2}$$

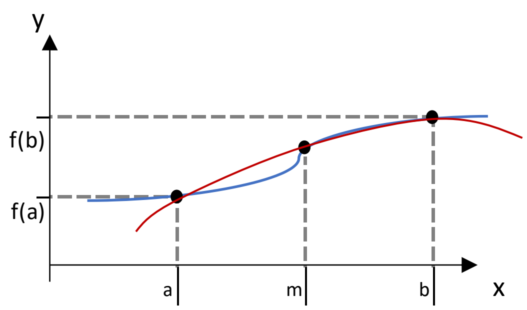
E a soma de todas as áreas é:

$$A_{[0,1]} + A_{[1,2]} + A_{[2,3]} + A_{[3,4]} + A_{[4,5]} + A_{[5,6]} = \frac{3}{2} + \frac{11}{2} + \frac{23}{2} + \frac{39}{2} + \frac{59}{2} + \frac{83}{2} = \frac{218}{2} = 109$$

Gabarito: A

Regra de 1/3 de Simpson

A Regra de Simpson consiste em aproximar uma curva, em um intervalo [a, b], a uma **parábola**, conforme ilustrado a seguir, sendo a integral da curva aproximada à integral da parábola.



Para aplicar essa regra, é necessário conhecer o valor da função nos extremos do intervalo, $f(a)$ e $f(b)$, bem como no **ponto médio** entre esses dois extremos, $f(m)$, em que:

$$m = \frac{a + b}{2}$$

O valor da integral segundo a Regra de 1/3 de Simpson é dada por:

$$I = \frac{h}{3}[f(a) + 4.f(m) + f(b)]$$

Em que h corresponde à semiamplitude do intervalo, isto é, $h = \frac{b-a}{2}$.

Assim, como na regra do trapézio, **não** é necessário conhecer a fórmula da parábola aproximante.

Por exemplo, vamos calcular a integral da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, no intervalo [1, 3], pela Regra de Simpson.

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2}.dx$$

Para aplicar a regra, precisamos do valor da função nos extremos a = 1 e b = 3, bem como no ponto médio:

$$m = \frac{1+3}{2} = 2$$

Sendo $f(x) = \frac{1}{x^2}$, temos:

$$f(a) = f(1) = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$f(m) = f(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(b) = f(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{8}$$

E a semiamplitude do intervalo é:

$$h = \frac{3-1}{2} = 1$$

Logo, o valor da integral é dado por:

$$I = \frac{h}{3}[f(a) + 4.f(m) + f(b)]$$

$$I = \frac{1}{3}\left[1 + 4 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right] = \frac{2}{3}\left[1 + 1 + \frac{1}{8}\right] = \frac{1}{3} \times \frac{17}{8} = \frac{17}{24}$$

Podemos calcular a estimativa máxima para o erro da aproximação pela Regra de Simpson para a função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$:

$$|E_S| \leq \frac{h^5}{90}. \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Em que $f^{(4)}(x)$ é a quarta derivada da função $f(x)$.

Para a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, já calculamos a segunda derivada, $f''(x) = 6.x^{-4}$. Logo, a terceira e a quarta derivadas são:

$$f^{(3)}(x) = \frac{d(6.x^{-4})}{dx} = 6 \times (-4).x^{-4-1} = -24.x^{-5}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d(-24.x^{-5})}{dx} = -24 \times (-5).x^{-5-1} = 120.x^{-6} = \frac{120}{x^6}$$

Para $x > 0$, quanto maior o valor de x, menor o valor de $\frac{120}{x^6}$, logo, o valor máximo de $f^{(4)}(x)$ no intervalo [1, 3] ocorre para $x = 1$, em que:

$$f^{(4)}(1) = \frac{120}{1^6} = 120$$

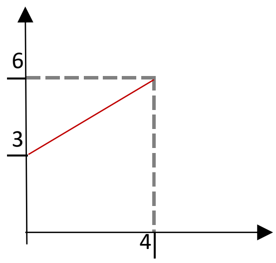
Sabendo que $h = 1$, a estimativa do erro dessa aproximação é dada por:

$$|E_S| \leq \frac{1^5}{90}.120 = \frac{4}{3}$$

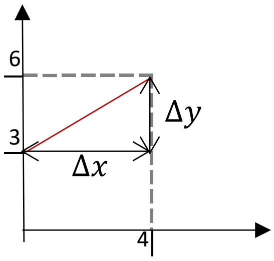
Comprimento de Arco

Suponha que iremos colocar um **barbante** em cima do gráfico de uma função, em determinado intervalo. O **tamanho do barbante** necessário para isso corresponde ao **comprimento de arco**. Como não poderemos fazer isso na prova, vamos aprender a calcular o comprimento de arco (sem precisar do barbante).

Se a função for uma reta, ou um conjunto de retas, podemos calcular o arco utilizando a fórmula de **Pitágoras**. Por exemplo, suponha a seguinte função:



O comprimento de arco dessa função, que corresponde ao tamanho desse segmento de reta, pode ser calculado utilizando-se a fórmula de Pitágoras. Isso porque o segmento de reta é a **hipotenusa** do triângulo retângulo cujos catetos são Δx, que representa o quanto a reta avança em relação ao eixo x, e Δy, que representa o quanto a reta avança em relação ao eixo y, conforme ilustrado a seguir:



Assim, o comprimento de arco de um segmento de reta, que denotamos por L, é dado por:

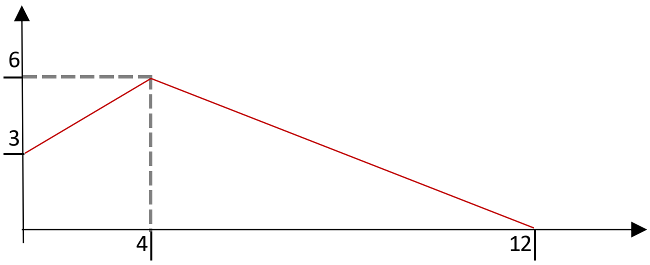
$$L^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Para esse exemplo, temos $\Delta x = 4$ e $\Delta y = 6 - 3 = 3$, logo, o comprimento de arco é:

$$L = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Quando houver múltiplos segmentos de reta, efetuamos esse procedimento para cada segmento de reta e em seguida **somamos** todos os resultados. Por exemplo, suponha a seguinte função:



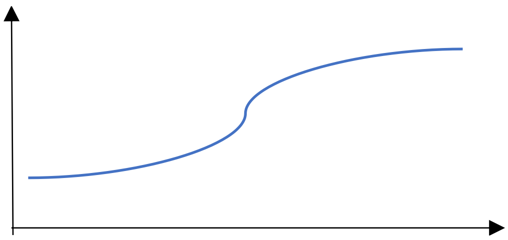
Já calculamos o comprimento de arco do primeiro segmento, $L_1 = 5$. Agora, vamos calcular o comprimento de arco para o segundo segmento, em que $\Delta x = 12 - 4 = 8$ e $\Delta y = 6$:

$$L_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(8)^2 + (6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

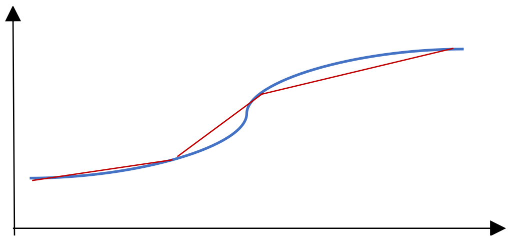
Logo, o comprimento total do arco é a soma:

$$L = L_1 + L_2 = 5 + 10 = 15$$

E quando a função for uma **curva**? Ou seja, quando ela não for formada por segmentos de reta?



Nesse caso, iremos transformar essa função em um conjunto de segmentos de retas, como ilustrado a seguir:



E o arco de cada segmento será calculado como:

$$L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Em seguida, devemos somar todos os arcos para calcular o arco total da curva:

$$L = \sum L_i$$

Quanto **menor** forem os segmentos de retas, **melhor será a aproximação** do arco da curva pela soma dos arcos dos segmentos de reta. Assim, em vez de Δx e Δy, vamos utilizar $\boldsymbol{dx}$ e $\boldsymbol{dy}$, quais sejam as representações infinitesimais (isto é, para $\Delta x \to 0$) das variações em x e em y.

Assim, cada segmento de arco, que podemos representar por dL (pelo fato de estarmos trabalhando com variações infinitesimais) é calculado como:

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Sabemos que a razão entre dy e dx corresponde à **derivada** da função:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Reorganizando essa fórmula, temos:

$$dy = f'(x).dx$$

Substituindo dy por essa expressão na fórmula de dL, temos:

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + [f'(x).dx]^2}$$

Agora, vamos reorganizar o radicando:

$$(dx)^2 + [f'(x).dx]^2 = (dx)^2 + [f'(x)]^2 \times (dx)^2 = (dx)^2(1 + [f'(x)]^2)$$

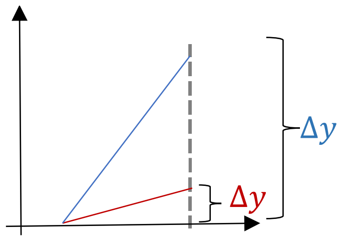
Logo, temos a seguinte raiz:

$$dL = \sqrt{(dx)^2(1 + [f'(x)]^2)} = dx\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

Por fim, precisamos somar todos esses "pedaços" de arco. No entanto, como estamos trabalhando com grandezas infinitesimais, em vez do somatório, utilizamos a integral. Portanto, o comprimento do arco de uma função $f(x)$ em um intervalo [a, b] é dada por:

$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

Vale notar que quanto **maior a derivada** da função, $f'(x)$, isto é, maior a taxa de variação da função, **maior o comprimento de arco**. Na ilustração a seguir, a taxa de variação da curva em azul é maior do que a taxa de variação da curva em vermelho ($f'(x) > f'(x)$). Isso leva a um maior comprimento de arco (o barbante terá que ser maior para cobrir a reta azul dentro do mesmo intervalo).



Afinal, para um mesmo intervalo temos um maior valor de Δy para a curva azul ($\Delta y > \Delta y$) e, consequentemente, um maior valor para $L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ($L > L$).

Por exemplo, vamos calcular o comprimento de arco da seguinte curva, entre os pontos (1,1) e (4,8):

$$f(x) = x^{3/2}$$

Sabendo que um ponto é representado como (x,y), esses pontos corresponde ao intervalo entre x = 1, que corresponde ao ponto (1,1), e x = 4, que corresponde ao ponto (4,8).

Primeiro, calculamos a derivada da função:

$$f'(x) = \frac{3}{2} . x^{(3/2 - 1)} = \frac{3}{2} . x^{1/2}$$

Agora, elevamos essa função ao quadrado[1]:

$$[f'(x)]^2 = \left(\frac{3}{2} . x^{1/2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} . \left(x^{1/2}\right)^2 = \frac{9}{4} x$$

[1] É importante conhecer as seguintes propriedades de funções exponenciais:

$$b^{(x+y)} = b^x \times b^y$$

$$(b^x)^y = b^{x \times y}$$

Agora, integramos a raiz desse resultado somado a 1, em relação a x, no intervalo entre x = 1 e x = 4:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}. dx$$

E é essa a integral que precisa ser resolvida para calcular o comprimento de arco.

INDO MAIS FUNDO!

Como a integral de $\sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$ em relação a x não é conhecida, vamos utilizar uma mudança de variáveis, chamando a soma $\left(1 + \frac{9}{4}x\right)$ de uma variável u:

$$u = 1 + \frac{9}{4}x$$

E a derivada de u é:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\left(1 + \frac{9}{4}x\right)}{dx} = \frac{9}{4}$$

Reorganizando essa fórmula, podemos encontrar a expressão equivalente a dx:

$$du = \frac{9}{4}dx$$

$$dx = \frac{4}{9}du$$

Além disso, precisaremos transformar os limites de x para valores de u. Para x = 1, temos:

$$u = 1 + \frac{9}{4} \times 1 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$$

Para x = 4, temos:

$$u = 1 + \frac{9}{4} \times 4 = 1 + 9 = 10$$

Logo, a integral $\int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}. dx$ corresponde a:

$$L = \int_{13/4}^{10} \left(\sqrt{u}. \frac{4}{9}\right). du = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \left(u^{1/2}\right). du$$

Resolvendo a integral sem os limites, temos:

$$\frac{4}{9}\int\left(u^{1/2}\right).du = \frac{4}{9}\times\frac{u^{(1/2+1)}}{1/2+1} = \frac{4}{9}\times\frac{u^{(3/2)}}{3/2} = \frac{4}{9}\times\frac{2}{3}.u^{(3/2)} = \frac{8}{27}\times\sqrt{u^3}$$

Agora aplicamos os pontos u = $\frac{13}{4}$ e u = 10:

$$F\left(\frac{13}{4}\right) = \frac{8}{27}\times\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} = \frac{8}{27}\times\frac{13\sqrt{13}}{4\sqrt{4}} = \frac{8}{27}\times\frac{13\sqrt{13}}{8} = \frac{13\sqrt{13}}{27}$$

$$F(10) = \frac{8}{27}\times\sqrt{(10)^3} = \frac{8}{27}\times 10\sqrt{10} = \frac{80\sqrt{10}}{27}$$

A diferença corresponde ao comprimento de arco da curva $f(x) = x^{3/2}$, no intervalo [1,4]:

$$L = \frac{80\sqrt{10}-13\sqrt{13}}{27}$$

(2018 – Prefeitura de Cristalina/GO) Para se calcular o comprimento da parábola y = x^2 entre os pontos (0, 0) e $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, é necessário calcular a integral

a) $\int_0^{1/2} x^2 dx$

b) $\int_0^{1/2} 1 + x^2\ dx$

c) $\int_0^{1/2} \sqrt{1 + x^2}\ dx$

d) $\int_0^{1/2} \sqrt{1 + 4x^2}\ dx$

e) $\int_0^{1/2} \sqrt{1 + 16x^2}\ dx$

Comentários:

O comprimento de arco, no intervalo [a, b], é dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Como o par ordenado é representado como (x, y), o ponto (0,0) é o ponto em que x = 0 e o ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ é o ponto em que x = $\frac{1}{2}$. Assim, temos uma integral de x = 0 até x = $\frac{1}{2}$, conforme indicado nas alternativas.

O primeiro passo é calcular a derivada da função:

$$f'(x) = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

Agora, elevamos esse resultado ao quadrado:

$$[f'(x)]^2 = (2x)^2 = 4.x^2$$

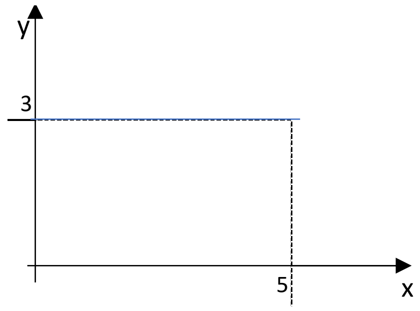
O comprimento de arco será a raiz de 1 mais esse resultado, no intervalo de x = 0 até x = $\frac{1}{2}$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + 4.x^2}\, dx$$

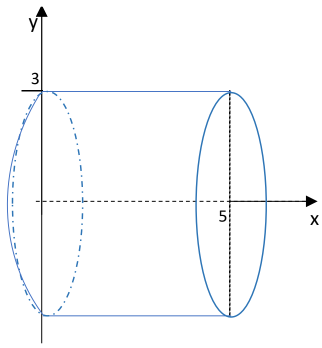
Gabarito: D

Área de Superfície de Revolução

A área de superfície de revolução é consequência da **rotação de um arco em torno de um eixo**. Por exemplo, considere a função $f(x) = 3$, no intervalo $x \in [0, 5]$, representada abaixo:



A rotação dessa reta em torno do eixo x gera um **cilindro**, sem preenchimento (como se fosse feito de papel), conforme ilustrado a seguir:



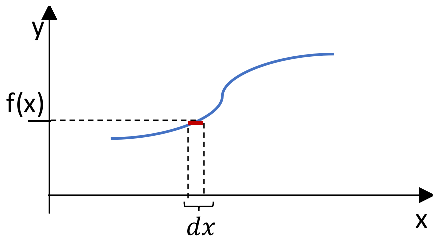
A área da superfície desse cilindro corresponde à área de um retângulo, cuja base é o perímetro do círculo e a altura é a altura do cilindro (imagine que você está abrindo o cilindro de papel):

$$A_{lateral\ cilindro} = 2.\pi.r \times h$$

Note que o raio do cilindro corresponde ao valor da função (no caso, $r = f(x) = 3$); e que a altura do cilindro corresponde ao comprimento do arco da função (no caso, o tamanho da reta, qual seja $h = 5$), logo:

$$A_{lateral\ cilindro} = 2.\pi.3 \times 5 = 30\pi$$

Quando a função não formar um sólido cuja área possamos calcular pelas fórmulas geométricas, iremos considerar a rotação de cada pequeno pedaço da função, que formará um **cilindro** oco:



Assim, iremos utilizar a mesma fórmula da área lateral do cilindro:

$$A_{lateral\ cilindro} = 2.\pi.r \times h$$

Nessa situação o raio corresponde ao valor da função em cada ponto, $r = f(x)$, e a pequena altura do cilindro corresponde ao comprimento do arco infinitesimal. Na seção anterior, vimos que o comprimento do arco pode ser calculado como:

$$dh = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Logo, cada pequena área do cilindro é dada por:

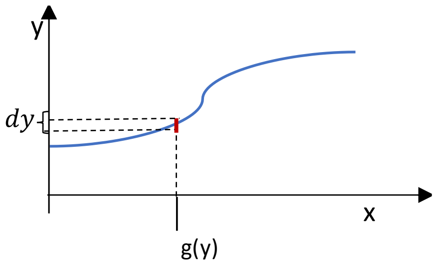
$$dA = 2.\pi.f(x).\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

E para calcular a área total, integramos essas áreas infinitesimais no intervalo desejado:

$$A = \int_{x_i}^{x_s} 2.\pi.f(x).\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

$$\boldsymbol{A = 2.\pi.\int_{x_i}^{x_s} f(x).\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx}$$

Para rotacionar em torno do eixo y, temos uma situação parecida, mas nessa situação, iremos formar pequenos cilindros na outra direção:



Novamente, utilizamos a fórmula da área do cilindro:

$$A_{lateral\ cilindro} = 2.\pi.r \times h$$

Nessa situação, o raio corresponde ao valor da função de y, $g(y)$, e a altura corresponde ao comprimento do arco dessa função:

$$dh = \sqrt{1 + [g'(y)]^2}dy$$

Assim, a área de cada pequeno cilindro é:

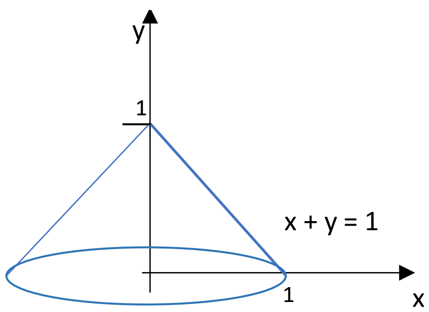
$$dA = 2.\pi.g(y).\sqrt{1 + [g'(y)]^2}dy$$

E a área total é:

$$A = \int_{y_i}^{y_f} 2.\pi.g(y).\sqrt{1 + [g'(y)]^2}dy$$

$$\boldsymbol{A = 2.\pi.\int_{y_i}^{y_f} g(y).\sqrt{1 + [g'(y)]^2}dy}$$

Por exemplo, vamos supor que estejamos rotacionando a função $g(y) = 1 - y$ no intervalo $y \in [0,1]$ em torno do eixo y, conforme representado a seguir:



Para isso, vamos utilizar a fórmula da área da superfície de revolução que acabamos de ver:

$$A = 2.\pi.\int_{y_i}^{y_f} g(y).\sqrt{1+[g'(y)]^2}dy$$

Vamos precisar da derivada da função:

$$g'(y) = \frac{d(1-y)}{dy} = -1$$

Agora, vamos calcular $\sqrt{1+[g'(y)]^2}$:

$$\sqrt{1+[g'(y)]^2} = \sqrt{1+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

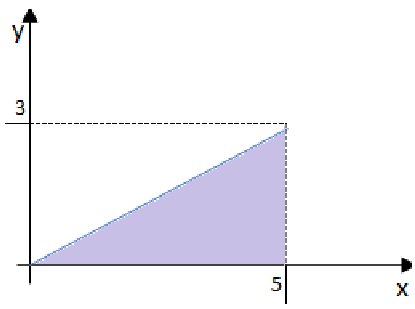
$$A = 2.\pi.\int_0^1 (1-y).\sqrt{2}.dy = A = 2.\pi.\sqrt{2}.\int_0^1 (1-y).dy$$

$$A = 2.\pi.\sqrt{2}\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2.\pi.\sqrt{2}\left[(1-0)-\left(\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)\right] = 2.\pi.\sqrt{2}\left[1-\frac{1}{2}\right] = \pi.\sqrt{2}$$

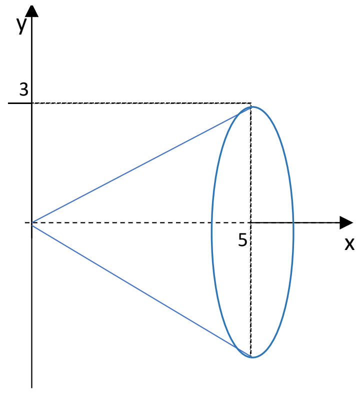
Volume de Sólidos de Revolução

Os sólidos de revolução são gerados quando **giramos uma superfície**, **em torno de um eixo**.

Por exemplo, suponha a função $f(x) = \frac{3}{5}x$, em que a área sob a função delimitada no intervalo $x \in [0,5]$ está representada abaixo:



Girando essa superfície em torno do eixo x (o que chamamos de revolução), obtemos um cone sólido (totalmente preenchido, não oco), ilustrado a seguir.



O objetivo desta seção é aprendermos a calcular o volume dessa forma, após a revolução.

Então, basta saber como calcular o volume do cone!

Nesse caso, sim! O volume do **cone** é:

$$V_{cone} = \pi r^2 . \frac{h}{3}$$

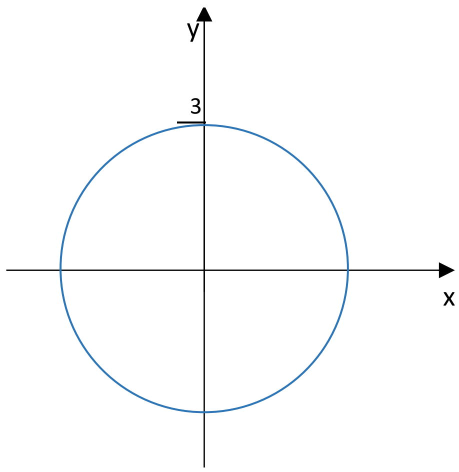
Em que r é o raio da base do cone (no caso, $r = 3$) e h é a altura do cone (no caso, $h = 5$). Logo, o volume do cone é:

$$V_{cone} = \pi \times 3^2 . \frac{5}{3} = 15\pi$$

E se tivermos um **círculo**? Um círculo pode ser representado por uma função da forma:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Em que x_c e y_c são as coordenadas do centro do círculo (valores constantes) e r é o raio do círculo. A seguir representamos o círculo associado à função $x^2 + y^2 = 9$, isto é, centrado na origem, pois $x_c = 0$ e $y_c = 0$, com raio $r = 3$, pois $r^2 = 9$:

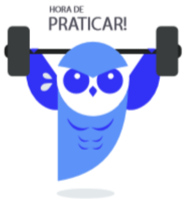


Nesse caso, se rotacionarmos a área do círculo em torno de qualquer eixo, obteremos uma **esfera**, cujo volume é dado por:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Para o nosso exemplo, temos $r = 3$, logo:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi.3^3 = 36\pi$$



(2019 – Prefeitura de Aracruz/ES) O volume do sólido de revolução cuja função é $x^2 + y^2 = 4$ é:

a) $\frac{32}{3}\pi$

b) $\frac{64}{3}\pi$

c) 8π

d) 16π

e) 18π

Comentário:

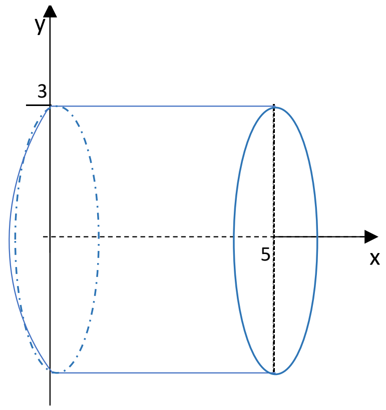
A curva $x^2 + y^2 = 4$ corresponde a um círculo, em que $r^2 = 4$. Logo, o raio do círculo é r = 2. O volume da esfera gerada com a revolução da área delimitada por esse círculo (em qualquer eixo) é:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi.r^3 = \frac{4}{3}\pi.2^3 = \frac{4}{3}\pi.8 = \frac{32}{3}\pi$$

Gabarito: A

E se tivermos uma função constante, por exemplo, $f(x) = 3$?

Nesse caso, o sólido de revolução formado quando rotacionamos a área sob essa função em torno do eixo x corresponde a um cilindro sólido (não oco):



E o volume do cilindro é dado por:

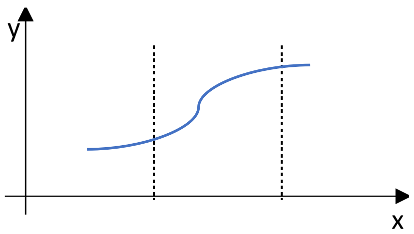
$$V_{cilindro} = \pi r^2 . h$$

Em que r é o raio da base do cilindro (no caso, $r = 3$) e h é a altura do cilindro (no caso, $h = 5$). Logo, o volume do cilindro é:

$$V_{cilindro} = \pi . 3^2 . 5 = 45\pi$$

Mas, e se rotação da função em torno de um eixo não formar uma figura conhecida?

Por exemplo, como seria o volume do sólido obtido com a rotação em torno do eixo x da área delimitada sob a seguinte função:



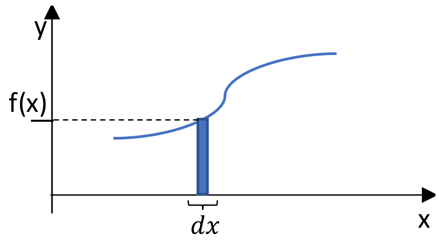
Nessa situação, precisaremos dividir o sólido em **partes infinitesimais** para calcular o seu volume.

Como essa rotação pode acontecer de algumas formas distintas, temos **diferentes métodos** para calcular o seu volume.

Método do Disco

O método do disco é aplicado quando o **eixo de rotação é parte da superfície que sofre a rotação**. O exemplo que acabamos de ver é um desses casos, pois **a área sob a curva inclui o eixo x, que é o eixo de rotação**.

Nessa situação, vamos calcular o volume gerado com a rotação da área delimitada por cada pedacinho da função, conforme ilustrado a seguir.



Com a rotação desse pequeno retângulo em torno do eixo x, teremos um pequeno cilindro de raio $r = f(x)$ e altura $h = dx$. O volume desse pequeno cilindro é calculado pela fórmula do volume do cilindro que vimos anteriormente:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 . h$$

$$dV = \pi[f(x)]^2 . dx$$

E o volume total do sólido corresponde à soma dos volumes de todos esses pedacinhos no intervalo desejado. Como estamos trabalhando com grandezas infinitesimais, utilizamos a integral para calcular a soma:

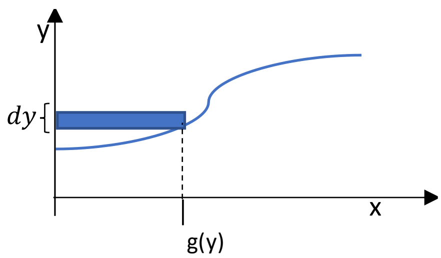
$$V = \int_{x_i}^{x_s} \pi[f(x)]^2 . dx$$

$$\boldsymbol{V = \pi \int_{x_i}^{x_s} [f(x)]^2 . dx}$$

Por exemplo, vamos calcular o volume do sólido obtido pela rotação da função $f(x) = \sqrt{x}$, no intervalo [0,1]:

$$V = \pi \int_0^1 [\sqrt{x}]^2 . dx = \pi \int_0^1 x . dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \pi \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$$

Quando giramos **em torno do eixo y**, precisamos de uma função de y, g(y), conforme ilustrado a seguir.



O volume também será calculado pelo volume de um cilindro, cujo raio é $r = g(y)$ e a altura é $h = dy$:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 . h$$

$$dV = \pi[g(y)]^2 . dy$$

E o volume corresponde à integral de dV no intervalo desejado:

$$V = \int_{y_i}^{y_s} \pi[g(y)]^2 . dy$$

$$V = \pi \int_{y_i}^{y_s} [g(y)]^2 . dy$$

Ou seja, a fórmula é similar, mas agora utilizamos y no lugar de x.

Caso a questão forneça uma função de x, $y = f(x)$, precisaremos calcular a função **inversa** f^{-1}:

$$g(y) = f^{-1}(y)$$

Por exemplo, vamos calcular o volume do sólido obtido pela rotação da função $y = x^3$ no intervalo entre $y = 0$ e $y = 8$, em torno do eixo y.

O primeiro passo é calcular a função inversa. Fazemos isso, isolando x na função $f(x)$ dada:

$$y = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$$

Essa é a função $g(y) = f^{-1}(y)$. Logo, o volume é dado por:

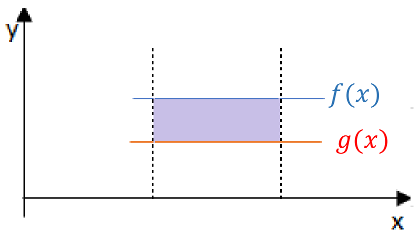
$$V = \pi \int_0^8 \left[y^{1/3}\right]^2 . dy = \pi \int_0^8 y^{2/3} . dy = \pi \left[\frac{y^{(2/3+1)}}{2/3 + 1}\right]_0^8 = \pi \left[\frac{y^{5/3}}{5/3}\right]_0^8 = \frac{3}{5}\pi \left[y^{5/3}\right]_0^8$$

$$V = \frac{3}{5}\pi \left[8^{5/3} - 0^{5/3}\right] = \frac{3}{5}\pi \times 2^5 = \frac{96}{5}\pi$$

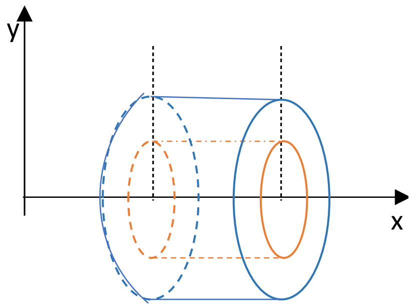
Método da Arruela

O método da arruela é aplicado quando o **eixo de rotação não faz parte da superfície que sofre a rotação**.

Suponha que a seguinte região, delimitada entre duas retas, f e g, rotacione em torno do **eixo x**.



O sólido resultante corresponderia a um cilindro parcialmente oco, como ilustrado a seguir:



O volume desse sólido pode ser calculado pela **diferença** entre os volumes dos dois cilindros:

$$V = V_{Cilindro\ Maior} - V_{cilindro\ menor}$$

Observa-se que a altura dos cilindros é a mesma. Considerando que R é o raio da base do cilindro maior e que r é o raio da base do cilindro menor, temos:

$$V = \pi.R^2.h - \pi.r^2.h = \pi.(R^2 - r^2).h$$

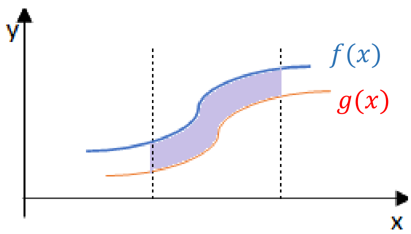
Observe que os valores dos **raios** da base do cilindro correspondem aos **valores das funções**, que nesse exemplo são constantes, e que a **altura** do cilindro h corresponde ao tamanho do intervalo $\Delta\boldsymbol{x}$:

$$V = \pi.([f(x)]^2 - [g(x)]^2).\Delta x$$

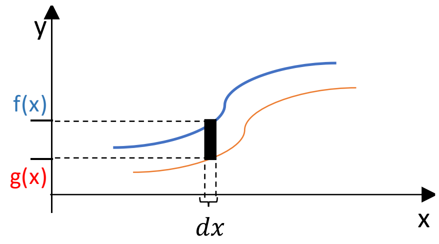
Assim, supondo $f(x) = R = 5$, $g(x) = r = 3$, o volume do sólido de revolução, no intervalo [4, 6], de modo que a altura dos cilindros é $\Delta x = h$ = 6 - 4 = 2, corresponde a:

$$V = \pi.(5^2 - 3^2).2 = \pi.(25 - 9).2 = 32\pi$$

E quando a rotação das funções não resultar em algum sólido conhecido? Por exemplo, suponha a rotação da área delimitada entre as funções f e g indicadas a seguir:



Nessa situação, iremos calcular o volume gerado pela rotação de cada pedacinho de superfície. O intervalo será tão pequeno que a superfície poderá ser aproximada por um retângulo, conforme ilustrado a seguir:



Como vimos anteriormente, a rotação de um retângulo resulta em um cilindro parcialmente oco, cujo volume é dado por:

$$V = \pi.([f(x)]^2 - [g(x)]^2).\Delta x$$

Como estamos trabalhando com intervalos muito pequenos, chamamos Δx de dx e o volume V de dV (em vez de um cilindro oco, temos uma arruela fininha):

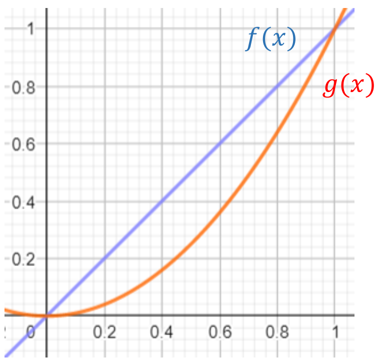
$$dV = \pi.([f(x)]^2 - [g(x)]^2).dx$$

E o volume total do sólido, em todo o intervalo desejado, corresponde à soma desses volumes dV. Como estamos trabalhando com grandezas infinitesimais (muito pequenas), utilizamos a integral no lugar da soma:

$$V = \int_{x_i}^{x_s} \pi.([f(x)]^2 - [g(x)]^2).dx$$

$$\boldsymbol{V = \pi \int_{x_i}^{x_s} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2).dx}$$

Por exemplo, vamos calcular o volume do sólido gerado pela rotação das curvas $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$, em torno do eixo x. Essas funções estão representadas a seguir:



Pode-se observar que a região delimitada por essas funções pertence ao intervalo [0, 1]. Assim, o volume do sólido de revolução é dado por:

$$V = \pi \int_{x_i}^{x_s} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2).dx$$

$$V = \pi \int_0^1 ([x]^2 - [x^2]^2).dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4).dx = \pi \left[\int_0^1 x^2.dx - \int_0^1 x^4.dx \right]$$

Calculando as integrais em separado, temos:

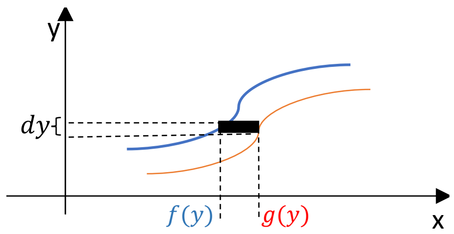
$$\int_0^1 x^2.dx = \left[\frac{x^{2+1}}{2+1} \right]_0^1 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x^4.dx = \left[\frac{x^{4+1}}{4+1} \right]_0^1 = \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right] = \frac{1}{5}$$

Logo, o volume é:

$$V = \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \pi \left[\frac{5-3}{15} \right] = \frac{2\pi}{15}$$

Analogamente, quando giramos **em torno do eixo y**, precisamos das funções **em relação a y** e consideramos pequenos intervalos dy, conforme representado a seguir. As funções de y também corresponderão aos raios dos pequenos cilindros e dy será a sua altura.



Assim, o volume é dado por:

$$V = \pi \int_{y_i}^{y_s} ([g(y)]^2 - [f(y)]^2).dy$$

Observe que quando analisamos as funções em relação ao eixo y, a função $g(y)$ é **maior** que $f(y)$, pois $g(y)$ está **mais longe** do eixo y do que $f(y)$, formando assim um **raio maior**.

Vamos calcular o volume do sólido gerado pela rotação das mesmas curvas $y = x$ e $y = x^2$, mas agora em torno do **eixo y**.

O primeiro passo é **inverter as funções**, isolando x em vez de y, para que se tornem funções de y. A função $y = x$ permanece a mesma. E a função $y = x^2$ se torna:

$$y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y}$$

Em relação ao intervalo de integração, como os limites do intervalo pertencem à reta $y = x$, então os limites do intervalo para y serão os mesmos que vimos para x, ou seja, [0, 1]. Logo, o volume do sólido de revolução é dado por:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - [y]^2 \right).dy = \pi \int_0^1 (y - y^2).dy = \pi \left[\int_0^1 y.dy - \int_0^1 y^2.dy \right]$$

Os resultados das integrais são:

$$\int_0^1 y.dy = \left[\frac{y^{1+1}}{1+1}\right]_0^1 = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 y^2.dy = \left[\frac{y^{2+1}}{2+1}\right]_0^1 = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{1}{3}$$

E o resultado do volume é:

$$V = \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \pi \left[\frac{3-2}{6}\right] = \frac{\pi}{6}$$

Integrais Múltiplas

Quando temos uma função com mais de uma variável e integramos em relação a elas, utilizamos a integral múltipla. Para uma função com duas variáveis, por exemplo, $f(x, y)$, teremos uma integral dupla:

$$\int \int f(x, y).dx\,dy$$

No cálculo da integral dupla, começamos calculando a **integral de dentro**, no caso, a **em relação a x** (azul) e depois passamos para a **integral de fora**, no caso, **em relação a y** (em vermelho).

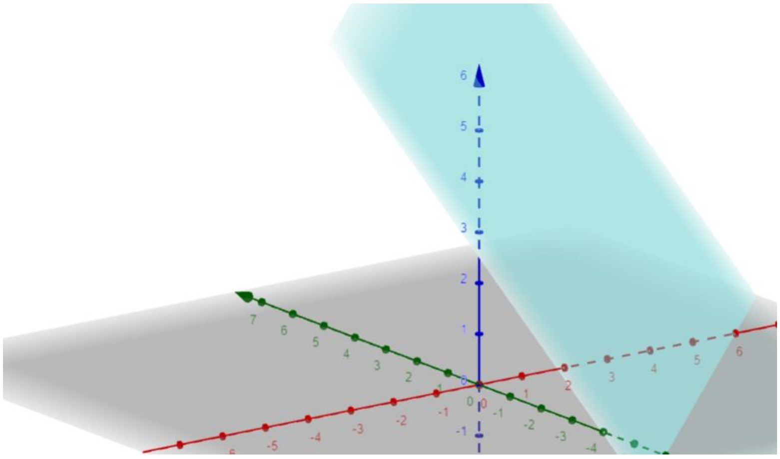
Isso será importante para quando tivermos integrais múltiplas definidas em determinado intervalo. Por exemplo:

$$\int_0^2 \int_0^4 f(x,y).\,dx\,dy$$

Para resolver essa integral, precisamos saber que o intervalo [0, 4] se refere a x e que o intervalo [0, 2] se refere a y.

Assim como a integral simples corresponde à área delimitada pela função, a integral dupla corresponde ao **volume delimitado pela função**.

Suponha a função $f(x,y) = 6 - x + y$, representada pelo plano tridimensional a seguir:



A integral dupla dessa função irá representar o **volume** sob a função para o intervalo desejado.

Se você não conseguiu entender esse gráfico, não se preocupe. Você não vai precisar dele para calcular a integral.

Vamos começar calculando a integral dupla **indefinida** para essa função:

$$\int \int (6 - x + y).\,dx\,dy$$

Primeiro calculamos a **integral de dentro, em relação a x**, como se fosse uma integral simples, sendo **y uma constante qualquer**:

$$\int (6 - x + y).\,dx = \int 6.\,dx - \int x.\,dx + \int y.\,dx$$

Calculando essas integrais em separado, temos:

$$\int 6.\,dx = 6 \int x^0.\,dx = 6 \times \frac{x^{0+1}}{0+1} = 6x$$

$$\int x.\,dx = \int x^1.\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2}$$

$$\int y.dx = y\int .x^0.dx = y \times \frac{x^{0+1}}{0+1} = y.x$$

Logo, o resultado da integral em relação a x é:

$$\int (6 - x + y).dx = 6x - \frac{x^2}{2} + yx$$

Agora, calculamos a **integral desse resultado em relação a y**, como se **x fosse uma constante qualquer**:

$$\int \left(6x - \frac{x^2}{2} + yx\right) dy = \int 6x.dy - \int \frac{x^2}{2} dy + \int yx.dy$$

Calculando novamente em separado:

$$\int 6x.dy = 6x\int y^0.dy = 6x \times \frac{y^{0+1}}{0+1} = 6xy$$

$$\int \frac{x^2}{2} dy = \frac{x^2}{2}\int y^0.dy = \frac{x^2}{2} \times \frac{y^{0+1}}{0+1} = \frac{x^2}{2} y$$

$$\int yx.dy = x\int y^1.dy = x \times \frac{y^{1+1}}{1+1} = x\frac{y^2}{2}$$

Por fim, somamos uma constante qualquer para o resultado da integral dupla indefinida:

$$\int\int (6 - x + y).dx\,dy = 6xy - \frac{x^2}{2}y + x\frac{y^2}{2} + c$$

Agora, vamos utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular essa integral dupla **no intervalo** $x \in [0, 4]$ e $y \in [0, 2]$.

$$\int_0^2 \int_0^4 (6 - x + y).dx\,dy$$

Novamente, devemos calcular **cada integral em separado**. Primeiro calculamos a **integral de dentro (em relação a x)**:

$$\int_0^4 (6 - x + y).dx = F(4) - F(0)$$

Já calculamos a antiderivada $F(x)$:

$$F(x) = 6x - \frac{x^2}{2} + yx$$

Logo, devemos **aplicar** essa função **nos limites do intervalo para x**:

$$F(4) = 6 \times 4 - \frac{4^2}{2} + y \times 4 = 24 - 8 + 4y = 16 + 4y$$

$$F(0) = 6 \times 0 - \frac{0^2}{2} + 0 \times 4 = 0$$

E calcular a diferença:

$$F(4) - F(0) = 16 + 4y - 0 = 16 + 4y$$

Agora, **integramos esse resultado em relação a y**, no intervalo [0, 2]

$$\int_0^2 (16 + 4y).dy = F(2) - F(0)$$

TOME NOTA!

Note que o integrando é uma **função de y**. Portanto, quando a integral da função $f(x, y)$ **em relação a x** corresponde **à integral interna**, o seu resultado é uma **função de y**:

$$\int_{y_i}^{y_s} \overbrace{\int_{x_i}^{x_s} f(x, y).dx}^{\text{Função de } y} dy$$

Se a ordem das integrais fosse invertida, isto é, se a integral **em relação a y fosse a integral interna**, o seu resultado se**ria uma função de x**:

$$\int_{x_i}^{x_s} \overbrace{\int_{y_i}^{y_s} f(x, y).dy}^{\text{Função de x}} dx$$

Primeiro, calculamos a antiderivada da função $F(y)$, ignorando os limites:

$$\int (16 + 4y).dy = \int 16.dy + \int 4y.dy$$

Em separado, temos:

$$\int 16.dy = 16 \int y^0.dy = 16 \times \frac{y^{0+1}}{0+1} = 16.y$$

$$\int 4y.dy = 4\int y^1.dy = 4 \times \frac{y^{1+1}}{1+1} = 4.\frac{y^2}{2} = 2y^2$$

Logo, a antiderivada é:

$$F(y) = \int (16+4y).dy = 16y + 2y^2$$

Agora, calculamos a função nos limites do intervalo de y:

$$F(2) = 16 \times 2 + 2 \times 2^2 = 32 + 8 = 40$$

$$F(0) = 16 \times 0 + 2 \times 0^2 = 0$$

E a diferença corresponde ao resultado da integral dupla no intervalo desejado:

$$\int_0^2 \int_0^4 (6 - x + y).dx\,dy = 40 - 0 = 40$$

Inversão da ordem de integração

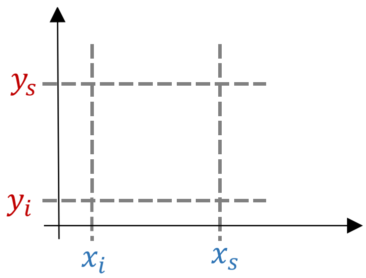
Sabia que podemos **inverter** a ordem de integração?

A integral dupla corresponde a um **volume**, ou seja, de certa forma, estamos calculando o produto comprimento x largura x altura. Se multiplicarmos primeiro comprimento x altura e depois multiplicarmos pela largura isso dará o **mesmo resultado** que se multiplicarmos primeiro largura x altura e depois multiplicarmos pela altura, certo?

No cálculo da integral, temos uma situação similar. Quando os intervalos forem **constantes**, isto é, quando os intervalos forem **números** e **não funções** de uma variável, podemos simplesmente **inverter** a ordem das integrais:

$$\int_{y_i}^{y_s} \int_{x_i}^{x_s} f(x,y).dx\,dy = \int_{x_i}^{x_s} \int_{y_i}^{y_s} f(x,y).dy\,dx$$

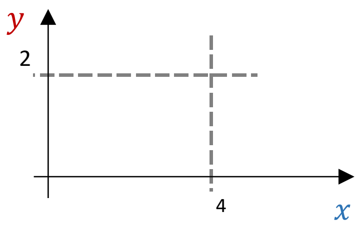
Em que x_i e x_s são os limites inferior e superior (constantes) de x; e y_i e y_s são os limites inferior e superior (constantes) de y. Nessa situação, dizemos que os limites correspondem a uma **região retangular**:



Em relação ao exemplo que vimos anteriormente, temos:

$$\int_0^2 \int_0^4 (6 - x + y).\,dx\,dy = \int_0^4 \int_0^2 (6 - x + y).\,dy\,dx$$

Isso porque a região de integração corresponde ao seguinte retângulo:



Para ilustrar, vamos calcular o resultado da integral dupla à direita, pois já calculamos o resultado da intergal dupla à esquerda (igual a 40).

Começamos pela integral interna, em relação a y (**considerando x constante**). Desconsiderando inicialmente os limites, temos:

$$\int (6 - x + y).\,dy = \int 6.\,dy - \int x.\,dy + \int y.\,dy$$

Calculando cada integral em separado:

$$\int 6.\,dy = 6\int dy = 6y$$

$$\int x.\,dy = x\int y^0.\,dy = x \times \frac{y^{0+1}}{0+1} = xy$$

$$\int y.\,dy = \int y^1.\,dy = \frac{y^{1+1}}{1+1} = \frac{y^2}{2}$$

Juntando tudo, temos:

$$\int (6 - x + y).\,dy = 6y - xy + \frac{y^2}{2}$$

Aplicando os limites de y, quais sejam $y_i = 0$ e $y_s = 2$:

$$\int_0^2 (6 - x + y).\,dy = F(2) - F(0)$$

$$F(2) = 6 \times 2 - x \times 2 + \frac{2^2}{2} = 12 - 2x + 2 = 14 - 2x$$

$$F(0) = 6 \times 0 - x \times 0 + \frac{0^2}{2} = 0$$

Logo:

$$\int_0^2 (6 - x + y).dy = 14 - 2x - 0 = 14 - 2x$$

Como a **integral interna foi uma integral em relação a y**, obtivemos como resultado uma **função de x**, como vimos anteriormente:

$$\int_{x_i}^{x_s} \overbrace{\int_{y_i}^{y_s} f(x,y).dy}^{\text{Função de x}} dx$$

Agora, precisamos **integrar esse resultado em relação a x**. Desconsiderando inicialmente os limites do intervalo, temos:

$$\int (14 - 2x).dx = \int 14.dx - \int 2x.dx$$

$$\int 14.dx = 14 \int x^0.dx = 14 \times \frac{x^{0+1}}{0+1} = 14.x$$

$$\int 2x.dx = 2 \int x^1.dx = 2 \times \frac{x^{1+1}}{1+1} = 2 \times \frac{x^2}{2} = x^2$$

Logo:

$$\int (14 - 2x).dx = 14x - x^2$$

Aplicando os limites da integral, temos:

$$\int_0^4 (14 - 2x).dx = F(4) - F(0)$$

$$F(4) = 14 \times 4 - 4^2 = 56 - 16 = 40$$

$$F(0) = 14 \times 0 - 0^2 = 0$$

E assim concluímos que o resultado da integral dupla é:

$$\int_0^4 \int_0^2 (6 - x + y).\,dy\,dx = 40 - 0 = 40$$

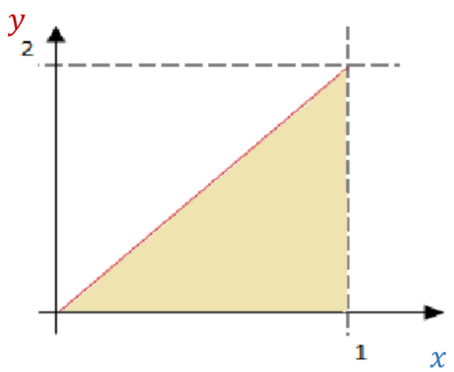
Que é o mesmo resultado que havíamos obtido anteriormente.

No entanto, é importante ressaltar que quando os limites da integral de uma integral são descritos como uma **função** de uma outra variável, precisaremos trabalhar um pouco esses limites antes de inverter a ordem.

Suponha uma integral dupla com os seguintes limites:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 f(x, y).\,dx\,dy$$

Note que o limite inferior da integral interna, em relação a x, é uma função de y, $x_i = \frac{y}{2}$. Considerando que o limite superior de x é igual a 1, enquanto y varia entre o e 2, a região de integração corresponde à seguinte região, que é **triangular** e não retangular:



Para reordenar essa integral dupla, não basta inverter a ordem das integrais, isto é, deixar a integral em relação a x como a integral externa, com os mesmos limites, porque os limites da integral externa não podem ser uma função de outra variável. Logo, precisamos **transformar** os **limites em função de y** da integral em relação a x **em limites em função de x** para a integral em relação a y.

Para isso, o primeiro passo é **isolar y** na função $x = \frac{y}{2}$:

$$x = \frac{y}{2} \rightarrow y = 2x$$

Como $\frac{y}{2}$ é o limite **inferior** de x, temos:

$$x \geq \frac{y}{2} \rightarrow y \leq 2x$$

De fato, podemos observar no gráfico acima que a região hachurada corresponde aos valores de y **abaixo** da reta. Assim, encontramos o **limite superior** de y, $y_s = 2x$.

O limite mínimo de y continua sendo $y_i = 0$, como consta na integral dupla original, assim como o limite superior de x, $x_s = 1$.

O **novo limite inferior** de x pode ser calculado pela relação $x = \frac{y}{2}$ **para o valor mínimo de y** indicado na integral dupla original, qual seja $y_i = 0$, logo:

$$x_i = \frac{y_i}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Esse valor mínimo de x também pode ser observado diretamente a partir do gráfico. Logo, a integral desejada corresponde à seguinte integral:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 f(x,y).\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{2x} f(x,y).\,dy\,dx$$

Note que para calcularmos os **limites** da integral dupla com a ordem das variáveis invertida, **não** dependemos do integrando ($f(x,y)$).

E por que preciso saber como inverter a ordem da integral dupla?

Primeiro, porque essa pergunta pode cair na sua prova. Segundo, porque essa técnica pode ajudá-lo a **resolver integrais**. Suponha a seguinte integral, por exemplo:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 \cos(x^2)\,.\,dx\,dy$$

A integral de dentro $\int_{y/2}^1 \cos(x^2)\,.\,dx$ é bem difícil de calcular. Então, para resolver essa integral dupla, vamos **inverter a ordem de integração**.

Sabemos que ao inverter a ordem de integração, obtemos a seguinte integral dupla:

$$\int_0^1 \int_0^{2x} \cos(x^2)\,.\,dy\,dx$$

Como a integral de dentro é uma função de y, então o integrando $\cos(x^2)$ é considerado uma **constante**:

$$\int_0^{2x} \cos(x^2).dy = \cos(x^2).\int_0^{2x} y^0 dy = \cos(x^2)\left[\frac{y^1}{1}\right]_0^{2x} = \cos(x^2)\,(2x-0) = 2x\cos(x^2)$$

Agora, passemos para a integral externa, em relação a x:

$$\int_0^1 2x\cos(x^2)\,dx$$

Para calcular essa integral, vamos substituir x^2 por u. Assim:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x \quad \rightarrow \quad du = 2x.dx$$

E os limites $[0,1]$ para x se tornam, em relação a $u = x^2$:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad u = 0^2 = 0$$

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad u = 1^2 = 1$$

Assim, a integral $\int_0^1 2x\cos(x^2)\,dx$ se torna:

$$\int_0^1 \cos(u)du = [\mathrm{sen}(u)]_0^1 = \mathrm{sen}(1) - \mathrm{sen}(0) = \mathrm{sen}(1)$$

RESUMO DA AULA

Limite

Valor da função quando x tende a a: $\lim_{x \to a} f(x)$

Forma de calcular: substituir o valor do limite no lugar de x

- Quando o resultado for indeterminado $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, **fugir da indeterminação**
  - Para $x \to \infty$, dividir cada termo pela maior potência de x do denominador;
  - Demais casos: **simplificar** a expressão utilizando produtos notáveis, encontrando as raízes ou substituindo as variáveis ($\sqrt{x} \to y$)
  - Casos extremos: L´Hôpital (**derivar** o numerador e o denominador): $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Assíntota: quando a função se aproxima de uma reta sem interceptá-la

- **Assíntota Vertical**: quando a função tende a infinito ou menos infinito para determinado valor de x:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

- **Assíntota Horizontal**: quando a função tende a determinado resultado quando x tende a infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$$

Condição de existência de limite: **limites laterais iguais**

Funções Contínuas: Limite **existe** e é **igual ao valor da função** para todos os pontos do intervalo

- Limite pode ser infinito em um ou ambos os extremos do intervalo

Derivada

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Taxa de **variação** da função / **inclinação da reta tangente**

- $f' > 0$: função crescente no ponto
- $f' < 0$: função decrescente no ponto

Derivada de **2a ordem** (derivar a função 2 vezes): **concavidade**

- $f'' > 0$: concavidade para cima
- $f'' < 0$: concavidade para baixo

Pontos **críticos** (máximo ou mínimo da função): igualar **derivada** a **zero**

Principais Regras de Derivação:

- Derivada de uma potência de x: $\frac{d(x^n)}{dx} = \boldsymbol{n}.x^{\boldsymbol{n-1}}$, para $n \neq 0$
- Derivada de uma constante $\frac{d(a)}{dx} = \mathbf{0}$
- Quando **multiplicamos** um termo por uma constante, a derivada é multiplicada pela constante
- A derivada de $\boldsymbol{e^x}$ é ela mesma
- Derivada de $\ln x$: $\frac{d[\ln(x)]}{dx} = \frac{1}{x}$
- Derivada das razões trigonométricas: $\frac{d[sen(x)]}{dx} = \cos(x)$ e $\frac{d[cos(x)]}{dx} = -\text{sen}(x)$
- Regra da Cadeia (funções compostas): $\frac{d[g(f(x))]}{dx} = g'(f(x)) \times f'(x)$

Derivadas parciais: para funções com mais de uma variável $f(x, y)$

- Analisar uma variável de cada vez: a outra é considerada **constante**

Integral

Operação contrária da derivada / **Área** entre a função e o eixo x no intervalo

Principais Regras de Integração:

- Integral de uma potência de x: $\int x^{\boldsymbol{n}}.dx = \frac{x^{\boldsymbol{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}}$, para $n \neq -1$
  - Para $n = -1$: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$
- Quando multiplicamos um termo por uma constante, a integral é multiplicada pela constante
- A integral de $\boldsymbol{e^x}$ é ela mesma
- Integral das razões trigonométricas: $\int \cos(x)\, dx = \text{sen}(x)$ e $\int \text{sen}(x)\, dx = -\cos(x)$
- Integral por partes: $\int u.dv = u.v - \int v.du$

Teorema Fundamental do Cálculo: $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(x).dx = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a})$

Integração Numérica: integral de funções aproximada por área sob funções conhecidas

- Regra do Trapézio: $I = \frac{f(a)+f(b)}{2} \times (b-a)$, Erro: $|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12} . \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$
- Regra de Simpson: $I = \frac{h}{3}[f(a) + 4. f(m) + f(b)]$, com $m = \frac{a+b}{2}$ e $h = \frac{b-a}{2}$

Aplicações do Cálculo Integral:

- **Comprimento do Arco**: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
- **Área de Superfície de Revolução**: $A = 2. \pi. \int_{x_i}^{x_s} f(x). \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
- **Volume do Sólido de Revolução**:
  - Método do Disco: $V = \pi \int_{x_i}^{x_s} [f(x)]^2 . dx$
  - Método da Arruela: $V = \pi \int_{x_i}^{x_s} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2). dx$

Integrais múltiplas: para funções com mais de uma variável $\int \int f(x, y). dx\, dy$

- Integrar de dentro para fora
- Uma variável de cada vez: a outra é considerada constante

QUESTÕES COMENTADAS – CESPE

Limites

1. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Acerca da função $f(x) = arctg\ x$, que é a função inversa de $g(x) = tg(x)$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, julgue os itens a seguir.

A reta $y = -\frac{\pi}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

Comentários:

Por definição, a $arctg(x)$ é a função inversa da função tangente $tg(x)$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

A função tangente possui assíntotas verticais $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$, pois $tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ e $cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Além disso, o gráfico da função inversa f^{-1} de uma função f é obtido a partir do gráfico de f pela reflexão sobre a linha $y = x$, que transforma linhas verticais em linhas horizontais.

Assim, as assíntotas verticais $x = \pm\frac{\pi}{2}$ para $y = tg(x)$ correspondem nesta reflexão às assíntotas horizontais $y = \pm\frac{\pi}{2}$ para $x = arctg(y)$.

Gabarito: Certo.

2. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Considere, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, as seguintes informações acerca de uma função y = f (x):

(a) D = domínio da função $f = R - -1, 1$

(b) f é contínua em todos os pontos de seu domínio;

(c) sua segunda derivada, f", é positiva em todo o seu domínio;

(d) sua primeira derivada, f', se anula somente em x = 0;

(e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

As retas x = 1 e x = -1 são assíntotas verticais para a função f.

Comentários:

Uma reta de equação x = a, sendo a um número real, é uma assíntota vertical do gráfico de uma função real de variável real se pelo menos um dos limites laterais de , quando x tende para o valor de a for um infinitamente grande, ou seja, se e só se for verificada pelo menos uma das condições: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Conforme a propriedade (e), o que se verifica é exatamente a ocorrência das condições necessárias para a existência de assíntotas em x = 1 e x = -1, pois $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$. Portanto, a assertiva está correta.

Gabarito: Certo.

3. (CESPE/DETRAN-PA/2006) O valor de $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+x+5}{4-7x^2}$ é igual a:

a) 0.

b) ∞.

c) 1.

d) -1.

Comentários:

Nessa questão, basta substituirmos -1 no limite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+x+5}{4-7x^2} = \frac{(-1)^3+(-1)+5}{4-7(-1)^2}$$

$$= \frac{-1-1+5}{4-7}$$

$$= \frac{+3}{-3}$$

$$= -1$$

Gabarito: D.

QUESTÕES COMENTADAS – CESPE

Derivadas

1. (CESPE/PGE-PE/2019) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética, seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de máximos e mínimos de funções, da regra de trapézio para cálculo aproximado de integrais e de análise combinatória. Uma caixa, sem tampa superior, deve ter a forma de um paralelepípedo reto-retângulo, de base quadrada e volume igual a 4.000 cm^3. A espessura do material a ser utilizado para a confecção dessa caixa é desprezível.

Nesse caso, para a confecção da caixa com as referidas especificações, serão necessários, pelo menos, 1.200 cm^2 de material.

Comentários:

Nessa questão, vamos usar o conceito de derivada para calcular a área mínima necessária do material em questão. Sabemos que o volume será igual a 4.000 e que a caixa tem base quadrada, logo, temos que:

$$V(b,h) = b^2h = 4000$$

Assim, podemos representar a altura da caixa em função da base:

$$h(b) = \frac{4000}{b^2}$$

Além disso, também podemos expressar a área do material utilizando os valores da base e da altura, que é constituída pela base e quatro paredes laterais. Vejamos:

$$A(b,h) = b^2 + 4bh$$

Vamos colocar tudo em função da base:

$$A(b) = b^2 + 4b\left(\frac{4000}{b^2}\right)$$

$$A(b) = b^2 + \left(\frac{16.000}{b}\right)$$

Agora, podemos encontrar a área mínima necessária, que ocorre quando a derivada da função da área se anula:

$$A'(b) = 2b - \left(\frac{16.000}{b^2}\right) = 0$$

$$2b = \frac{16.000}{b^2}$$

$$b^3 = 8.000$$

$$b = 20$$

Portanto, a área mínima ocorre quando a base é 20

$$A(20) = 20^2 + \left(\frac{16.000}{20}\right)$$

$$A(20) = 400 + 800 = 1.200$$

Logo, a área mínima é 1.200.

Gabarito: Certo.

2. (CESPE/PGE-PE/2019) Julgue os próximos itens, relativos à função $f(x, y) = 4 + cos(x + y)$, para (x, y) restritos ao domínio $0 \leq x \leq 2\pi$ e $0 \leq y \leq 2\pi$.

A função $f(x, y)$ tem infinitos pontos críticos em seu domínio.

Comentários:

Para encontrar os pontos críticos, precisamos derivar a função $f(x, y)$ e encontrar os pontos em que a derivada é igual a zero:

$$f'^{(x,y)} = -sen(x + y) = 0$$

Agora, precisamos descobrir em que situações a função $sen(x + y)$ é igual a zero:

$$sen(x + y) = 0$$

Temos as seguintes soluções possíveis:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1\pi \\ x + y = 2\pi \\ x + y = 3\pi \\ x + y = 4\pi \end{cases}$$

Para cada solução, temos infinitos pontos x, y que satisfazem as condições encontradas:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = -x + 1\pi \\ y = -x + 2\pi \\ y = -x + 3\pi \\ y = -x + 4\pi \end{cases}$$

Gabarito: Certo.

3. (CESPE/PGE-PE/2019) A respeito da função $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$, em que $-\infty < x < \infty$, julgue o item a seguir.

Os mínimos locais da função $y = f(x)$ estão localizados nos pontos de abcissas $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$, que também são pontos de mínimo absoluto; o ponto de abcissa $x_3 = 0$ é de máximo local, mas não de máximo absoluto.

Comentários:

Para encontrar os mínimos e máximos locais, devemos derivar a função $f(x)$ e encontrar os pontos em que a derivada se anula. A derivada é

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$$

$$4x^3 - 16x = 0$$

$$4x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = +2$$

$$x = -2$$

Agora, com o auxílio da derivada segunda, vamos verificar se são mínimos ou máximos:

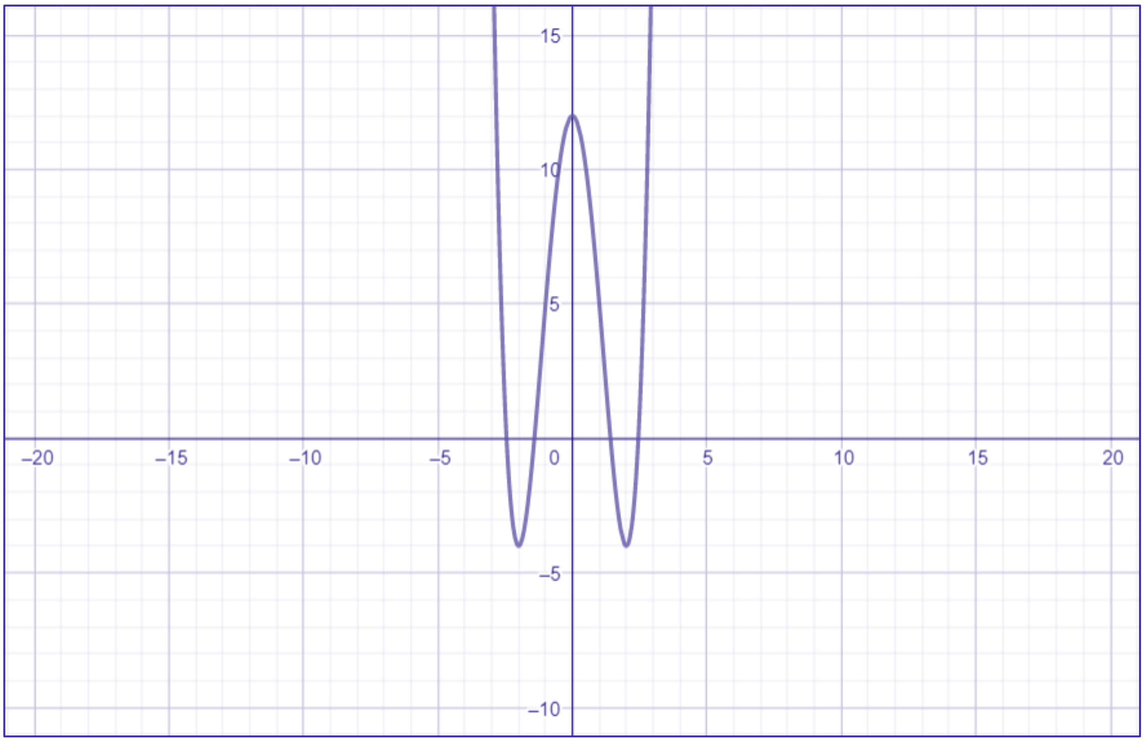
$$f''(x) = 12x^2 - 16 = 0$$

$$f''(x) = 12 \times (-2)^2 - 16 = 32 \; (f''(x) > 0, \text{ ponto de mínimo absoluto})$$

$$f''(x) = 12 \times 0^2 - 16 = -16 \; (f''(x) > 0, \text{ ponto de máximo local})$$

$$f''(x) = 12 \times 2^2 - 16 = 32 \; (f''(x) > 0, \text{ ponto de mínimo absoluto})$$

Por último, devemos verificar se são pontos de mínimo absoluto e máximo local. Para isso, podemos testar alguns valores ou, havendo viabilidade, representá-los de forma gráfica. Vejamos o comportamento dessa função:



Gabarito: Certo.

4. (CESPE/PGE-PE/2019) A respeito da função $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$, em que $-\infty < x < \infty$, julgue o item a seguir.

No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, a reta de equação y + 12x = 17 é tangente ao gráfico da função y = f(x) no ponto de abcissa x = -1.

Comentários:

Vamos encontrar a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 8 \times 2x = 4x^3 - 16x$$

Agora, precisamos do coeficiente de inclinação da reta tangente no ponto x = -1:

$$m = f'(-1) = 4 \times (-1)^3 - 16 \times (-1) = -4 + 16 = 12$$

Em seguida, precisamos identificar o ponto em que a reta tangente toca o eixo y. No ponto x = -1, y = 5:

$$f(-1) = (-1)^4 - 8 \times (-1)^2 + 12 = 1 - 8 + 12 = 5$$

Sabendo disso, podemos encontrar equação da reta tangente:

$$y = mx + b$$

$$5 = 12(-1) + b$$

$$5 = -12 + b$$

$$b = 17$$

$$y = 12x + 17$$

Gabarito: Errado.

5. (CESPE/PGE-PE/2019) A respeito da função $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$, em que $-\infty < x < \infty$, julgue o item a seguir.

No intervalo -2 < x < 0, essa função é crescente.

Comentários:

No intervalo analisado, a função parte de um ponto de mínimo absoluto (-2) para um ponto de máximo local (0). Portanto, a função é crescente nesse intervalo.

Gabarito: Certo.

6. (CESPE/ABIN/2018) Considerando a função $f: D \rightarrow R$, em que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 10$ para $x \in D = \{x \in R | -2 \leq x \leq 3\}$, julgue o item a seguir.

Para a função f, x = 0 é um ponto de máximo local que também é de máximo absoluto.

Comentários:

Para identificar se x é um ponto de máximo, temos que derivar a função que nos foi apresentada e verificar em quais pontos a derivada se anula:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Vejamos em quais pontos a derivada é nula:

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

Agora, por meio da derivada segunda, vamos verificar se são pontos de máximo ou mínimo:

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(0) = -6 \text{ } (f''(0) < 0, \text{ ponto de máximo})$$

$$f''(2) = 6 \text{ } (f''(2) > 0, \text{ ponto de mínimo})$$

Finalmente, vamos analisar os valores do domínio, para verificar se os pontos identificados são de máximo/mínimo local/absoluto. Vejamos:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 10$$

$$f(x) = (-2)^3 - 3(-2)^2 + 10 = -8 - 12 + 10 = -10$$

$$f(x) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 10 = -1 - 3 + 10 = 6$$

$$f(x) = (0)^3 - 3(0)^2 + 10 = 10$$

$$f(x) = (1)^3 - 3(1)^2 + 10 = 1 - 3 + 10 = 8$$

$$f(x) = (2)^3 - 3(2)^2 + 10 = 8 - 12 + 10 = 6$$

$$f(x) = (3)^3 - 3(3)^2 + 10 = 27 - 27 + 10 = 10$$

Portanto, no domínio especificado, x = 0 é um ponto de máximo local que também é de máximo absoluto, pois o maior valor é 10.

Gabarito: Certo.

7. (CESPE/ABIN/2018) Considerando a função $f\colon \boldsymbol{D} \rightarrow \boldsymbol{R}$, em que $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3 - 3\boldsymbol{x}^2 + 10$ para $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} | -2 \leq \boldsymbol{x} \leq 3\}$, julgue o item a seguir.

A função f muda a concavidade de negativa, ou para baixo, para positiva, ou para cima, em x = 1.

Comentários:

Para verificar quando a concavidade deixa de ser negativa e passa a ser positiva, devemos encontrar o ponto em que a derivada segunda da função $f(x)$ se anula:

$$f''(x) = 6x - 6$$

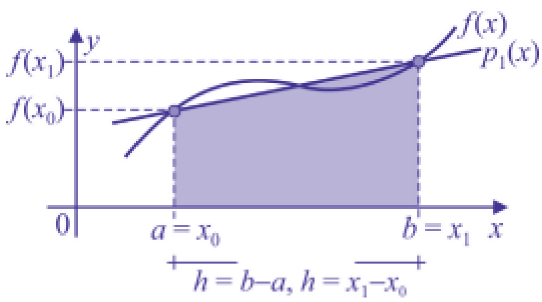
$$6x - 6 = 0$$

$$x = 1$$

Portanto, a função f muda a concavidade de negativa, ou para baixo, para positiva, ou para cima, em x = 1.

Gabarito: Certo.

8. (CESPE/IFF/2018)



A figura precedente ilustra a regra do trapézio, um método de integração numérica que aproxima a área sob o gráfico da função f(x) pela área de um trapézio, em um intervalo [a, b] contido no domínio da função. Nessa aproximação, o erro ET é estimado na forma $|E_T| \leq [h^3/12] \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$, em que h = b – a é o comprimento do intervalo [a, b] e f"(x) é a derivada segunda de f(x).

Tendo como referência essas informações, assinale a opção que apresenta a estimativa do erro E_T para a função f(x) = $-x^{-2}$ em um intervalo [a, b] contido no semieixo positivo Ox.

a) $|E_T| \leq [(b-a)^3/2] \times a^{-4}$

b) $|E_T| \leq [(b-a)^3/2] \times a^4$

c) $|E_T| \leq [(b-a)^3/6] \times b^4$

d) $|E_T| \leq [(b-a)^3/2] \times b^4$

e) $|E_T| \leq [(b-a)^3/12] \times a^{-4}$

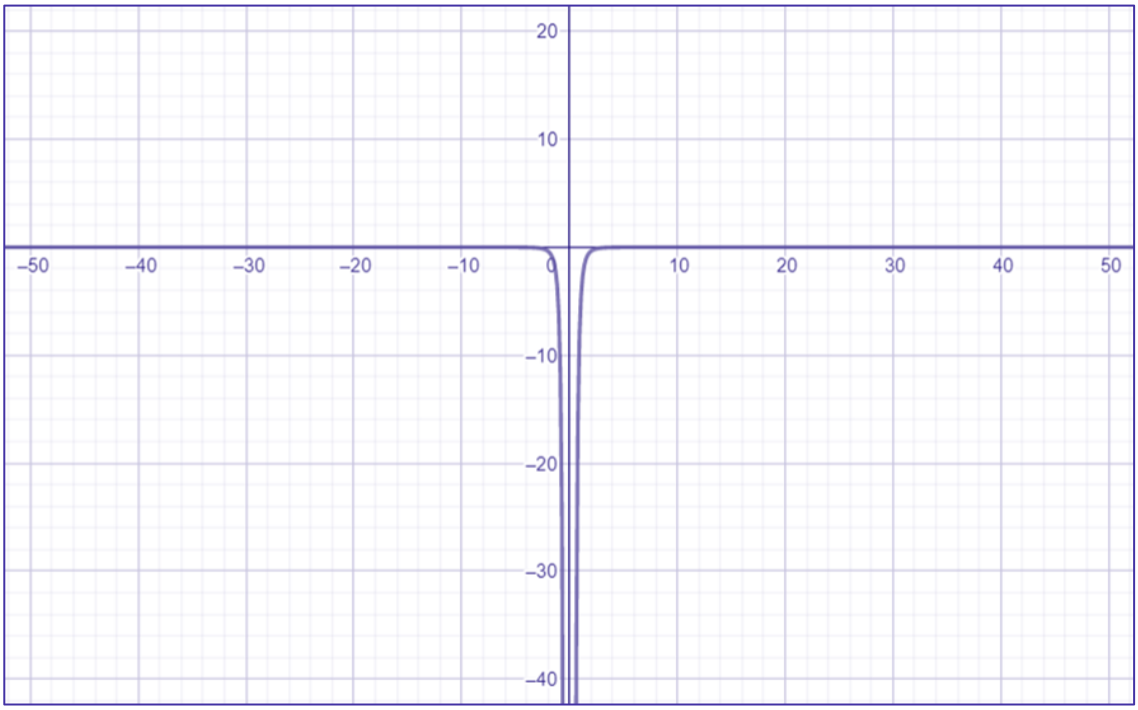
Comentários:

Nessa questão, inicialmente, temos que descobrir a derivada segunda da função $f(x) = -x^{-2}$.

$$f'(x) = (-2) \times (-x^{-2-1}) = 2x^{-3}$$

$$f"(x) = (-3) \times (2x^{-3-1}) = -6\,x^{-4}.$$

O módulo da derivada segunda, $f"(x) = -6\,x^{-4}$, tem valor máximo quanto mais se aproxima de $x = 0$; isto é, quanto mais próximo do valor de a, conforme podemos ver no gráfico a seguir:



Finalmente, podemos substituir os valores na expressão $|E_T| \leq [h^3/12] \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$:

$$\left[\frac{(b-a)^3}{12}\right] \times |-6\, a^{-4}| =$$

$$\left[\frac{(b-a)^3}{12}\right] \times 6\, a^{-4} =$$

$$\left[\frac{(b-a)^3}{2}\right] a^{-4}$$

Gabarito: A.

9. (CESPE/Pref. São Luís/2017)

Texto 11A3CCC Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, considere a função f, definida da seguinte forma:

f(x) = x, para 0 ≤ x < 10; e f(x) = 8, para x ≥ 10.

A derivada, f '(x), da função f apresentada no texto 11A3CCC pode ser calculada para diversos valores x do domínio da f. Dessa forma, f '(x) será expressa por

a) f '(x) = 1, para 0 < x < 10; e f '(x) = 0, para x >10.

b) f '(x) = 1, para 0 < x < 10; e f '(x) = 0, para x ≥10.

c) f '(x) = 1, para 0 ≤ x ≤ 10; e f '(x) = 0, para x >10.

d) f '(x) = 1, para 0 ≤ x ≤ 10; e f '(x) = 0, para x ≥10.

e) f '(x) = 1, para 0 ≤ x < 10; e f '(x) = 0, para x ≥10.

Comentários:

Quando $x > 10$ a função $f(x)$ é constante, portanto, sua derivada é nula.

Quando $x < 10$, a função $f(x)$ é de primeiro grau:

$$f(x) = x$$

Portanto,

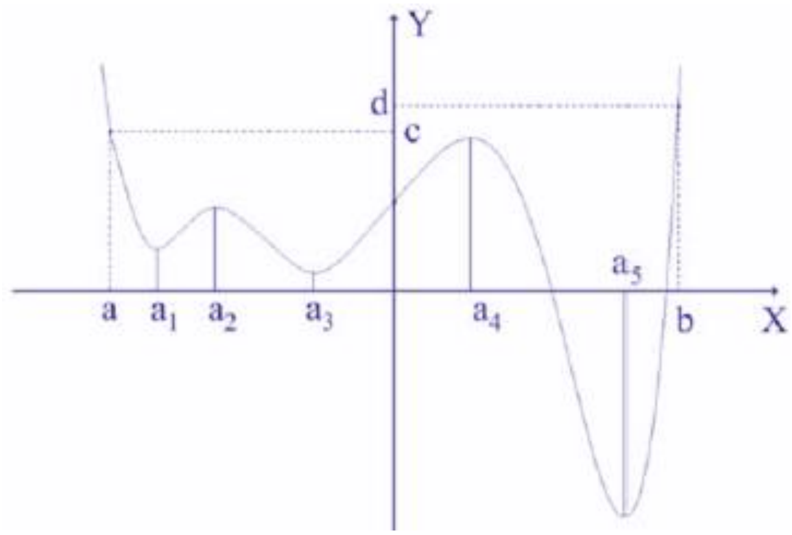
$$f'(x) = 1$$

Quando $x = 10$, a função $f(x)$ apresenta um ponto de descontinuidade, portanto, não é derivável.

A única alternativa que desconsidera o ponto de descontinuidade é a letra A, portanto, é a nossa alternativa correta.

Gabarito: A.

10. (CESPE/ANAC/2012)



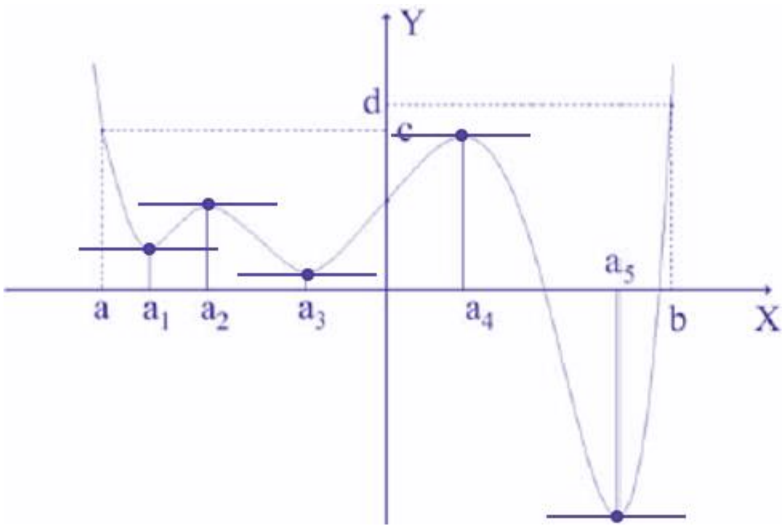
A figura acima apresenta parte do gráfico de uma função polinomial $y = f(x)$ definida em toda a reta real. Sabe-se que somente nos pontos $(a_i, f(a_i))$, com i =1, 2, 3, 4 e 5, as retas tangentes ao gráfico são parelalas ao eixo das abscissas, e a derivada de $f(x)$ não se anula em nenhum ponto fora do intervalo $[a, b]$.

A partir dessas informações e com base no gráfico apresentado, julgue os itens que se seguem.

A derivada de f(x) tem pelo menos três raízes reais e distintas.

Comentários:

A derivada de f(x) tem pelo menos **cinco** raízes reais e distintas, que são os pontos em que a derivada se anula (a reta fica paralela ao eixo de x).



Gabarito: Certo.

11. (CESPE/ANAC/2012) Para produzir o tecido utilizado na cobertura dos bancos de passageiros de aviões, determinada companhia utiliza dois tipos diferentes de fibras, denominadas fibra I e fibra II. Considere que a função $C(x,y) = 24x^2 + 20y^2 - 32xy - 40x - 56y + 250$ represente o custo de produção, em reais, de um metro desse tecido, em função da utilização de x metros da fibra I e y metros da fibra II. Com base nessas informações, julgue os itens subsequentes.

A função $C(x,y)$ é contínua em todos os pontos do plano $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial^2 C(x,y)}{\partial x \partial y} = -32$

Comentários:

A questão pede a derivada parcial de segunda ordem mista em relação às variáveis x e y. Para calcular essa derivada, vamos primeiro derivar a função $C(x,y)$ em relação a x:

$$\frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = 24 \times 2x + 0 - 32y - 40 - 0 + 0$$

$$\frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = 48x - 32y - 40$$

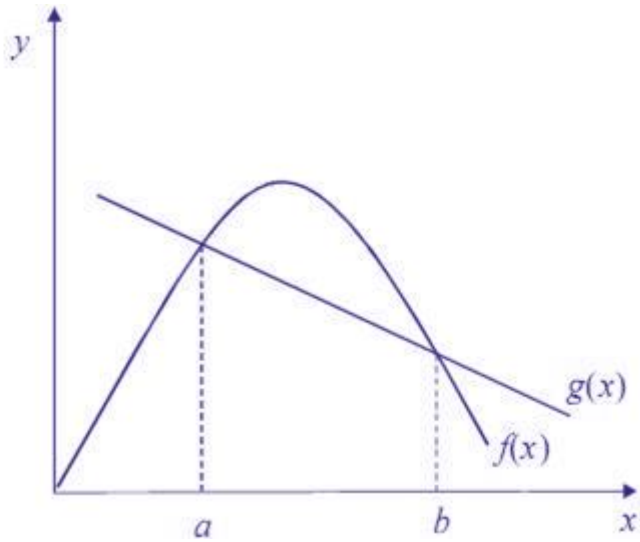
Agora, vamos derivar $\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}$ em relação à variável y:

$$\frac{\partial^2 C(x,y)}{\partial x \partial y} = 0 - 32 - 0 = -32$$

Uma função é contínua em todos os pontos do plano $\mathbb{R}^2$ quando é derivável em todos os pontos desse plano, que é o caso da função $C(x,y)$, como acabamos de ver.

Gabarito: Certo.

12. (CESPE/SEPLAG-DF/2008)

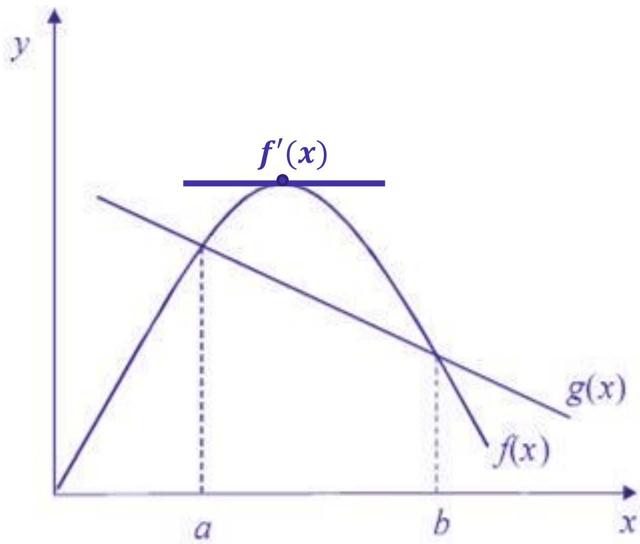


A figura acima ilustra os gráficos das funções f e g, em que f é uma função derivável e g é uma função linear. A partir desses gráficos, julgue os itens seguintes.

A função f tem ponto crítico no intervalo [a, b].

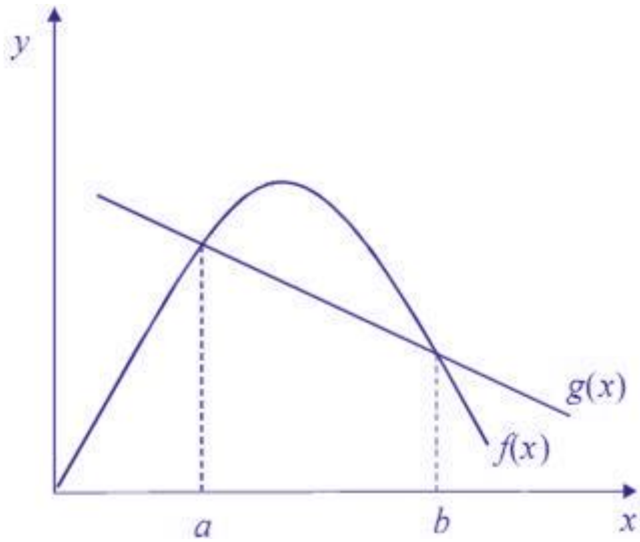
Comentários:

Os pontos críticos de uma função são os pontos em que a derivada (taxa de variação) dessa função se torna zero. Há sim um ponto crítico na função f(x), justamente no ponto mais alto da parábola:



Gabarito: Certo.

13. (CESPE/SEPLAG-DF/2008)

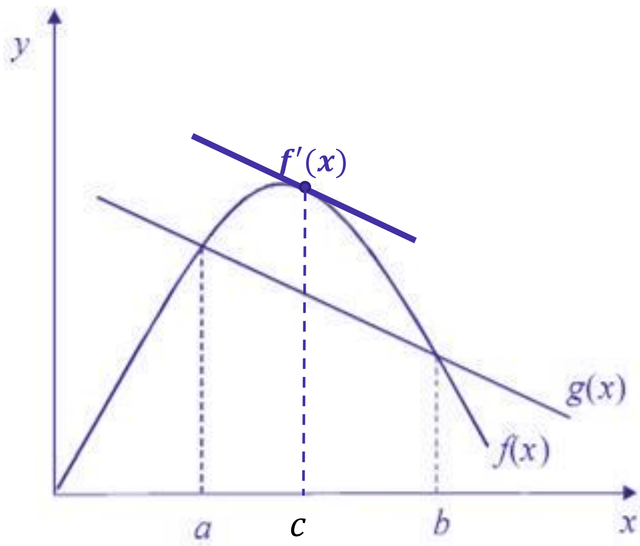


A figura acima ilustra os gráficos das funções f e g, em que f é uma função derivável e g é uma função linear. A partir desses gráficos, julgue os itens seguintes.

Para algum número real c tal que $a < c < b$, tem-se que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

Comentários:

Como f(x) é derivável em todos os pontos de seu domínio, sempre haverá um ponto c, tal que a inclinação da reta no ponto c seja igual à inclinação da reta g(x), representada por $\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$. Vejamos isso graficamente:



Gabarito: Certo.

14. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Considere, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, as seguintes informações acerca de uma função y = f (x):

(a) D = domínio da função $f = R - -1, 1$

(b) f é contínua em todos os pontos de seu domínio;

(c) sua segunda derivada, f'', é positiva em todo o seu domínio;

(d) sua primeira derivada, f', se anula somente em x = 0;

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty.$

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

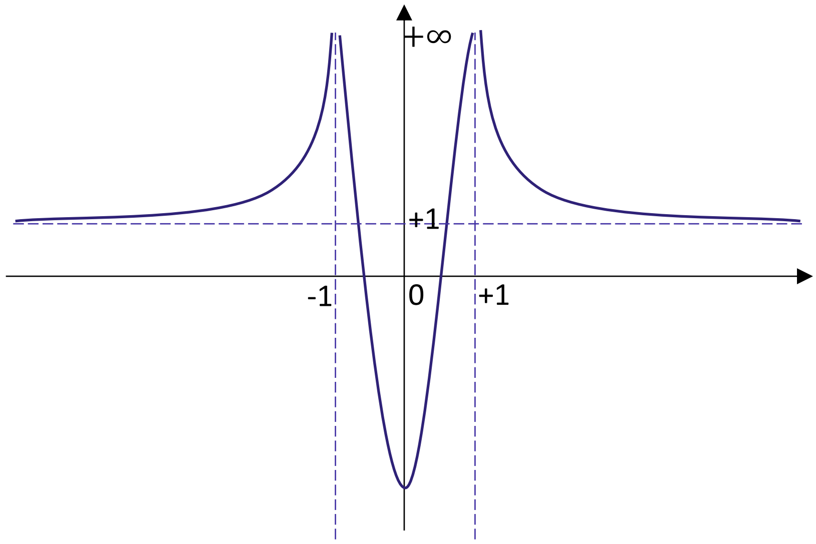
O gráfico da função não possui pontos nos quadrantes 3.º e 4.º.

Comentários:

O enunciado explicita o comportamento da função apenas quando x se aproxima de -1 e 1 e ao se afastar do eixo y, mas não o especifica em x=0.

Além disso, a questão diz que deve haver um ponto de mínimo local, dado que a primeira derivada se anula em x=0 e a segunda é positiva em todo o domínio.

Assim, podemos imaginar o mínimo local em qualquer ponto (0,y).



Portanto, não podemos afirmar que a função não possui pontos nos quadrantes 3.º e 4.º.

Gabarito: Errado.

15. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Considere, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, as seguintes informações acerca de uma função y = f (x):

(a) D = domínio da função $f = R - -1, 1$

(b) f é contínua em todos os pontos de seu domínio;

(c) sua segunda derivada, f'', é positiva em todo o seu domínio;

(d) sua primeira derivada, f', se anula somente em x = 0;

(e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

Em x = 0, a função f tem um ponto de mínimo local.

Comentários:

A questão especifica que a função possui ponto de mínimo local, pois a primeira derivada se anula em x=0 e a segunda é positiva em todo o domínio. O ponto de mínimo local pode estar localizado em qualquer ponto (0,y).

Gabarito: Errado.

16. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Considere, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, as seguintes informações acerca de uma função y = f (x):

(a) D = domínio da função $f = R - -1, 1$

(b) f é contínua em todos os pontos de seu domínio;

(c) sua segunda derivada, f'', é positiva em todo o seu domínio;

(d) sua primeira derivada, f', se anula somente em x = 0;

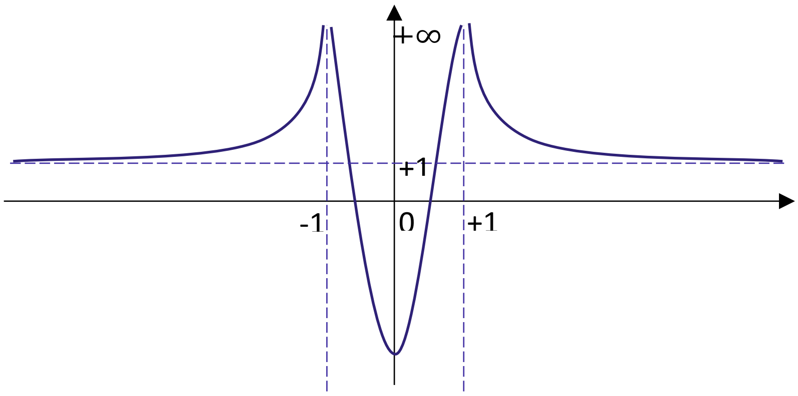
(e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

A função $f'(x)$ é estritamente crescente.

Comentários:

A questão diz que deve haver um ponto de mínimo local, dado que a primeira derivada se anula em x=0 e a segunda é positiva em todo o domínio. O ponto de mínimo nos diz que há um momento em que a função decresce até atingir o mínimo, para, depois, voltar a crescer.



Gabarito: Errado.

QUESTÕES COMENTADAS – CESPE

Integrais

1. (CESPE/PGE-PE/2019) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética, seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de máximos e mínimos de funções, da regra de trapézio para cálculo aproximado de integrais e de análise combinatória.

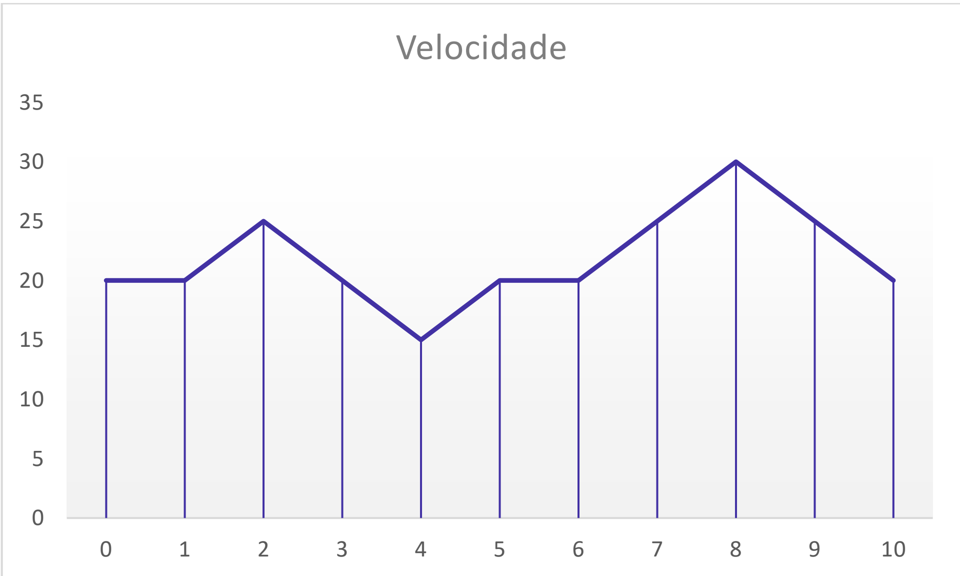
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v(t)$	20	20	25	20	15	20	20	25	30	25	20

Um observador mediu a velocidade $v(t)$, em metros por segundo, de um móvel, entre os instantes t = 0s e t = 10s, e anotou os dados na tabela a seguir.

Se entre t = 0s e t = 10s o móvel tiver percorrido $S = \int_0^{10} v(t)\, dt$ metros, então, depreende-se do cálculo dessa integral pela regra do trapézio que $S < 230\ m$.

Comentários:

Pela regra do trapézio, a integral é calculada por meio da soma das áreas de trapézios, utilizando a fórmula $A = \frac{(b+B)\times h}{2}$, em que a altura está representada no eixo x e as bases estão representadas no eixo y.



Portanto, nossa integral será:

$$S = \int_0^{10} v(t)\,dt$$
$$= \frac{(20+20)\times 1}{2} + \frac{(20+25)\times 1}{2} + \frac{(25+20)\times 1}{2} + \frac{(20+15)\times 1}{2} + \frac{(15+20)\times 1}{2}$$
$$+ \frac{(20+20)\times 1}{2} + \frac{(20+25)\times 1}{2} + \frac{(25+30)\times 1}{2} + \frac{(30+25)\times 1}{2} + \frac{(25+20)\times 1}{2}$$

Reorganizando os termos, temos que:

$$S = 10 + 2\times\frac{20}{2} + 2\times\frac{25}{2} + 2\times\frac{20}{2} + 2\times\frac{15}{2} + 2\times\frac{20}{2} + 2\times\frac{20}{2} + 2\times\frac{25}{2} + 2\times\frac{30}{2} + 2\times\frac{25}{2} + 10$$

$$S = 10 + 20 + 25 + 20 + 15 + 20 + 20 + 25 + 30 + 25 + 10$$

$$S = 220\ m$$

Gabarito: Certo.

2. (CESPE/PGE-PE/2019) Julgue os próximos itens, relativos à função $f(x,y) = 4 + cos(x+y)$, para (x, y) restritos ao domínio $0 \le x \le 2\pi$ e $0 \le y \le 2\pi$.

O volume de um sólido compreendido entre o gráfico da função $z = f(x,y)$ e o plano xOy é inferior a 144 unidades de volume.

Comentários:

Nessa questão, temos que calcular a integral dupla da função $f(x,y)$ na região definida, $0 \le x \le 2\pi$ e $0 \le y \le 2\pi$.

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dxdy$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 4 + cos(x+y)\,dxdy$$

Inicialmente, vamos trabalhar apenas com a integral interna:

$$\int_0^{2\pi} 4 + cos(x+y)dx = [4x + sen(x+y)]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} 4 + cos(x+y)dx = [4\times 2\pi + sen(2\pi + y)] - [4\times 0 + sen(0+y)]$$

$$\int_0^{2\pi} 4 + cos(x+y)dx = 8\pi + sen(2\pi + y) - sen(y)$$

$$\int_0^{2\pi} 4 + cos(x+y)dx = 8\pi + sen(y) - sen(y)$$

$$\int_0^{2\pi} 4 + cos(x+y)dx = 8\pi$$

Agora, vamos levar essa expressão para nossa integral original:

$$V = 8\pi \int_0^{2\pi} dy = [y]_0^{2\pi}$$

$$V = \int_0^{2\pi} 8\pi \, dy = 8\pi \times 2\pi - 8\pi \times 0$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 4 + cos(x+y) \, dxdy = 16\pi^2$$

$$V = 16 \times 3{,}14^2 \cong 157{,}75$$

Portanto, a área é superior a 144m².

Gabarito: Errado.

3. (CESPE/IFF/2018) Para uma função f(x), contínua no intervalo [0, 6], são conhecidos os seguintes valores: f(0) = 0, f(1) = 3, f(2) = 8, f(3) = 15, f(4) = 24, f(5) = 35 e f(6) = 48. Nesse caso, a área da região abaixo do gráfico de f(x), acima do eixo das abscissas e entre x = 0 e x = 6, calculada por integração numérica pela regra do trapézio, é igual a

a) 109.

b) 133.

c) 218.

d) 266.

e) 623.

Comentários:

Pela regra do trapézio, a integral é calculada por meio da soma das áreas de trapézios, utilizando a fórmula $A = \frac{(b+B)\times h}{2}$, em que a altura está representada no eixo x e as bases estão representadas no eixo y.

$$\int_0^6 f(x)dx = \frac{0+3}{2} \times 1 + \frac{3+8}{2} \times 1 + \frac{8+15}{2} \times 1 + \frac{15+24}{2} \times 1 + \frac{24+35}{2} \times 1 + \frac{35+48}{2} \times 1$$

$$\int_0^6 f(x)dx = \frac{3}{2} + \frac{3+8}{2} + \frac{8+15}{2} + \frac{15+24}{2} + \frac{24+35}{2} + \frac{35+48}{2}$$

Reorganizando os termos, temos:

$$\int_0^6 f(x)dx = \frac{3+3}{2} + \frac{8+8}{2} + \frac{15+15}{2} + \frac{24+24}{2} + \frac{35+35}{2} + \frac{48}{2}$$

$$\int_0^6 f(x)dx = \frac{2\times 3}{2} + \frac{2\times 8}{2} + \frac{2\times 15}{2} + \frac{2\times 24}{2} + \frac{2\times 35}{2} + 24$$

$$\int_0^6 f(x)dx = 3 + 8 + 15 + 24 + 35 + 24$$

$$\int_0^6 f(x)dx = 3 + 8 + 15 + 24 + 35 + 24$$

$$\int_0^6 f(x)dx = 109$$

Gabarito: A.

4. (CESPE/ABIN/2018) A respeito de aproximação numérica de integrais definidas, julgue o item subsequente.

O valor aproximado da integral da função f(x) = sen 2x, no intervalo [0, π/2], calculado pela regra de Simpson usando-se um único arco da parábola que passa pelos pontos de abscissas x = 0, x = π/4 e x = π/2, é igual a π/3.

Comentários:

A regra de Simpson resulta da integração da função f(x) no intervalo [a, b] a partir da aproximação polinomial de segundo grau de Lagrange, com pontos igualmente espaçados a, b e c = a + h, onde h = (b - a)/2.

A integral desejada será dada por:

$$S(f) = \big(f(a) + 4 \times f(c) + f(b)\big) \times (h/3)$$

Calculando os termos dessa fórmula:

$$h = \frac{\pi/2 - 0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$f(a) = f(0) = sen(2 \times 0) = sen(0) = 0$$

$$f(c) = f(\pi/4) = sen(2 \times \pi/4) = sen(\pi/2) = 1$$

$$f(b) = f(\pi/2) = sen(2 \times \pi/2) = sen(\pi) = 0$$

Agora, vamos substituí-los na fórmula de Simpson:

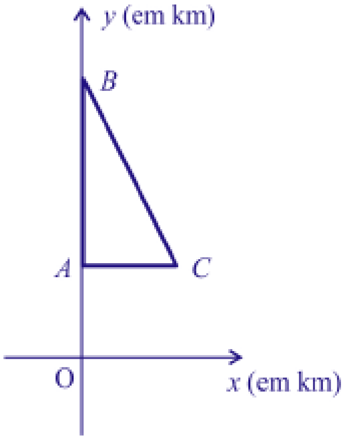
$$S(f) = (0 + 4 \times 1 + 0) \times (\pi/4/3)$$

$$S(f) = 4 \times (\pi/12) = \pi/3$$

Portanto, a área é igual a $\pi/3$.

Gabarito: Certo.

5. (CESPE/SEDF/2017)



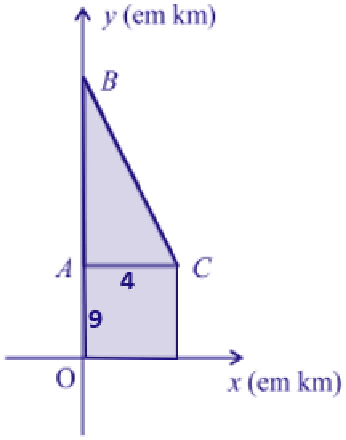
Um fazendeiro proprietário de 18 km² de terras resolveu reparti-las entre seus dois filhos. Para tal, representou suas terras em um sistema cartesiano de coordenadas ortogonais xOy, em que o km é a unidade de medida em ambos os eixos. Nesse sistema de referência, a fazenda corresponde a um triângulo de vértices A(0, 9), B(0, 18) e C(4, 9), conforme apresentado na figura precedente. Para fazer a divisão, ele vai usar uma cerca que, no modelo, será paralela ao eixo y, ou seja, uma reta de equação x = k, em que k é uma constante.

A respeito dessa situação hipotética, julgue o próximo item.

Se $f(x)$ for a função linear da reta que passa pelos pontos B e C, então a área da propriedade pode ser determinada por $\int_0^4 f(x)\,dx$.

Comentários:

A área de integral em relação a x, com x variando de 0 a 4, é igual à área do triângulo mais a área do retângulo 9x4 abaixo dele.



Portanto, a integral é igual ao retângulo mais o triângulo dado por:

$$A = (9 \times 4) + \left(\frac{9 \times 4}{2}\right) = 54.$$

Gabarito: Errado.

6. (CESPE/SEDF/2017)

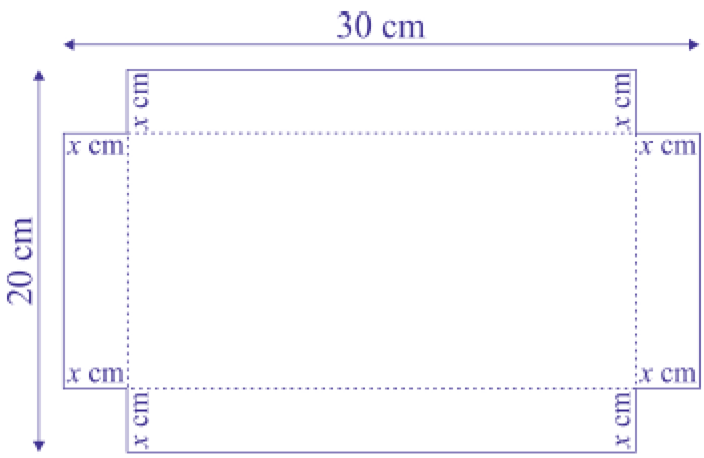


Figura I

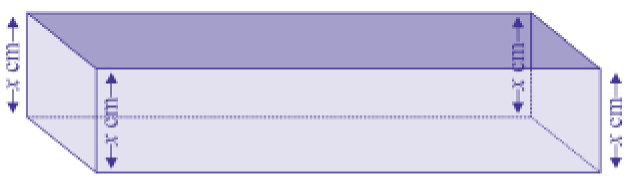


Figura II

Uma caixa retangular sem tampa será construída a partir da retirada de 4 quadrados de lado x cm de comprimento dos cantos de uma folha de papelão retangular de dimensões 30 cm × 20 cm, conforme mostra a figura I precedente. A figura II representa a caixa, após dobrarem-se as abas perpendicularmente à folha. O paralelepípedo reto (sem uma das faces) obtido tem altura de x cm.

A partir dessa situação, julgue o item a seguir.

Se $A(x)$ é o valor da área da base da caixa (paralelepípedo), em que A(0) = 600 cm² é o valor da área da folha antes da retirada dos quadrados, então $\int_0^3 A(x)\,dx > 1.400$.

Comentários:

Podemos expressar o valor da área da base da caixa, $A(x)$, com relação aos lados do retângulo, excluindo duas vezes o valor de x, por conta das laterais da caixa:

$$A(x) = (30 - 2x) \times (20 - 2x)$$

$$A(x) = 30 \times 20 - 60x - 40x + 4x^2$$

$$A(x) = 600 - 100x + 4x^2$$

Agora, basta integrar a função que descreve a área da base com relação à variável x:

$$\int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 (600 - 100x + 4x^2)\,dx$$

$$\int_0^3 (600 - 100x + 4x^2)\,dx = \left[600x - \frac{100x^2}{2} + \frac{4x^3}{3}\right]_0^3$$

$$\int_0^3 (600 - 100x + 4x^2)\,dx = 600 \times 3 - 50 \times 3^2 + 4 \times \frac{3^3}{3}$$

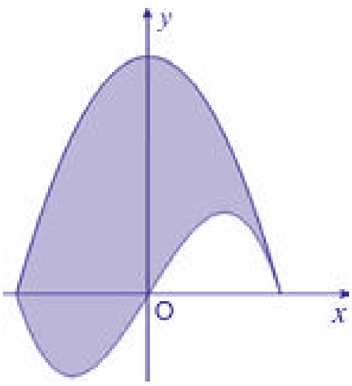
$$\int_0^3 (600 - 100x + 4x^2)\,dx = 1.800 - 450 + 36$$

$$\int_0^3 (600 - 100x + 4x^2)\,dx = 1.386$$

Portanto, a área é inferior a 1.400.

Gabarito: Errado.

7. (CESPE/SEE-AL/2013)



A figura acima, ilustrada em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, em que a unidade de medidas é o centímetro, foi escolhida para compor a logomarca de uma escola. Essa logomarca

corresponde a uma região no plano cartesiano limitada pelos gráficos das funções y = f(x) = 28 - 7/25 x^2 e y = g(x) = 5/2 x - 1/40 x^3, para x no intervalo [-10, 10]. Tendo como referência essa logomarca, julgue o item.

A área da figura é superior a 370 cm2 .

Comentários:

Nessa questão, a área é calculada como a integral da diferença entre as duas funções. A função f(x) representa a parábola na parte superior da logomarca, enquanto a função g(x) representa o detalhe na parte inferior. Portanto, temos que encontrar:

$$\int_{-10}^{10} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-10}^{10} f(x)\, dx - \int_{-10}^{10} g(x)\, dx$$

Calculando a integral $\int_{-10}^{10} f(x)\, dx$:

$$\int_{-10}^{10} f(x)\, dx = \int_{-10}^{10} \left[28 - \frac{7}{25}x^2\right] dx$$

$$\int_{-10}^{10} f(x)\, dx = \left[28x - \frac{7x^3}{75}\right]_{-10}^{10}$$

$$= \left[28 \times 10 - \frac{7 \times 10^3}{75}\right] - \left[28 \times (-10) - \frac{7 \times (-10)^3}{75}\right]$$

$$= \left[280 - \frac{7000}{75}\right] - \left[-280 + \frac{7000}{75}\right]$$

$$= [280 - 93{,}33] - [-280 + 93{,}33]$$

$$= 186{,}67 - [-186{,}67]$$

$$= 373{,}33$$

Calculando a integral $\int_{-10}^{10} g(x)\, dx$:

$$\int_{-10}^{10} g(x)\, dx = \int_{-10}^{10} \left[\frac{5}{2}x - \frac{1}{40}x^3\right] dx$$

$$\int_{-10}^{10} g(x)\, dx = \left[\frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{160}x^4\right]_{-10}^{10}$$

$$= \left[\frac{5}{4} \times 10^2 - \frac{1}{160} \times 10^4\right] - \left[\frac{5}{4} \times (-10)^2 - \frac{1}{160} \times (-10)^4\right]$$

$$= \left[\frac{500}{4} - \frac{10.000}{160}\right] - \left[\frac{500}{4} - \frac{10.000}{160}\right]$$

$$= [125 - 62{,}5] - [125 - 62{,}5] = 0$$

Por fim, temos que jogar esses valores na nossa integral:

$$\int_{-10}^{10} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-10}^{10} f(x)\, dx - \int_{-10}^{10} g(x)\, dx$$

$$\int_{-10}^{10} [f(x) - g(x)]\, dx = 373{,}33 - 0$$

$$\int_{-10}^{10} [f(x) - g(x)]\, dx = 373{,}33$$

Gabarito: Certo.

8. (CESPE/CPRM/2013) Tendo em vista que, em determinado mês de 31 dias, a precipitação pluvial média diária em uma localidade é representada, em mm, $P(t) = 25e^{-(t-16)^2}$, para t de 1 a 31, julgue os itens subsequentes.

Considerando que a precipitação pluvial média total nesse mês se expressa pela integral $\int_1^{31} P(t)\, dt$, então essa precipitação total será inferior a 800mm.

Comentários:

A questão pede o resultado da integral $\int_1^{31} P(t)\, dt$. Contudo, dificilmente alguém conseguiria calcular essa integral no momento da prova, tendo em vista que não é uma integral trivial. Isso nos levaria a crer que deve haver um outro método para resolver a questão, certo?

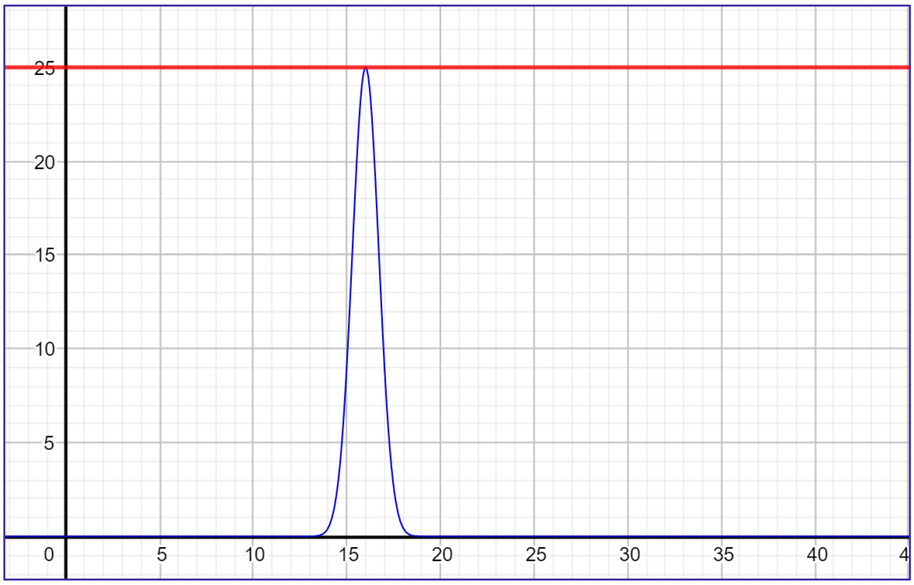
Pois bem, primeiro devemos analisar o valor máximo da função de precipitação, que ocorre quando t=16:

$$P(t) = 25e^{-(t-16)^2}$$

$$P(t) = 25 \times \frac{1}{e^{(t-16)^2}}$$

$$P(16) = 25 \times \frac{1}{e^{(16-16)^2}} = 25 \times \frac{1}{e^0} = 25 \times \frac{1}{1} = 25$$

Vejamos o gráfico da função de precipitação:



Observamos, portanto, que a função de precipitação é sempre inferior a 25, logo, podemos afirmar que:

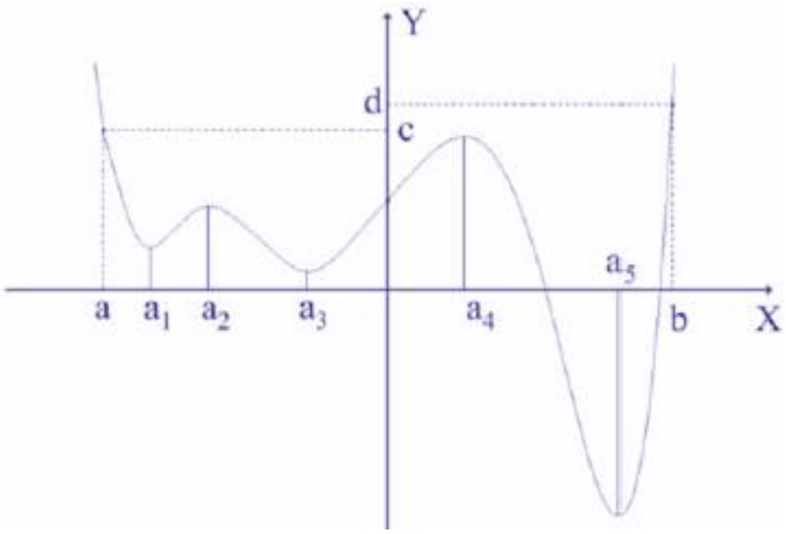
$$\int_{1}^{31} P(t)\, dt < 31 \times 25$$

$$\int_{1}^{31} P(t)\, dt < 775$$

Portanto, sem calcular a integral apresentada no enunciado, conseguimos concluir que a assertiva é verdadeira.

Gabarito: Certo.

9. (CESPE/ANAC/2012)



A figura acima apresenta parte do gráfico de uma função polinomial $y = f(x)$ definida em toda a reta real. Sabe-se que somente nos pontos $(a_i, f(a_i))$, com i =1, 2, 3, 4 e 5, as retas tangentes ao gráfico são parelalas ao eixo das abscissas, e a derivada de $f(x)$ não se anula em nenhum ponto fora do intervalo $[a, b]$.

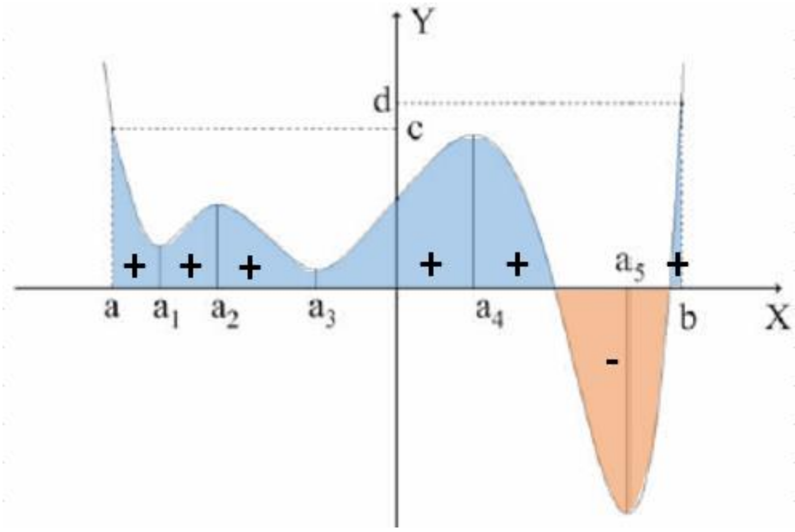
A partir dessas informações e com base no gráfico apresentado, julgue os itens que se seguem.

No intervalo $[a, b]$, o valor da integral de $f(x)$ corresponde à área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo das abscissas, e entre as retas verticais a e b.

Comentários:

No intervalo $[a, b]$, o valor da integral de $f(x)$ corresponde à **área líquida** entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo das abscissas, e entre as retas verticais a e b.

Como a função $f(x)$ possui valores negativos, a área (em laranja, no gráfico a seguir) calculada por meio da integral resulta em um valor negativo, reduzindo a parte positiva (em azul). Assim, o que temos é a área líquida, e não a área total.



A assertiva estaria correta se $f(x) > 0$ no intervalo $[a, b]$.

Gabarito: Errado.

10. (CESPE/ANAC/2012) Para produzir o tecido utilizado na cobertura dos bancos de passageiros de aviões, determinada companhia utiliza dois tipos diferentes de fibras, denominadas fibra I e fibra II. Considere que a função $C(x, y) = 24x^2 + 20y^2 - 32xy - 40x - 56y + 250$ represente o custo de produção, em reais, de um metro desse tecido, em função da utilização de x metros da fibra I e y metros da fibra II. Com base nessas informações, julgue os itens subsequentes.

O valor da integral dupla $\iint_R C(x, y)dxdy$ - em que R é a seguinte região do plano: $R = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \ e \ 0 \leq y \leq 2$ - é superior a 750.

Comentários:

A questão pede o valor da integral dupla da função C(x,y) na região R: $0 \leq x \leq 2 \; e \; 0 \leq y \leq 2$. A integral em questão é a seguinte:

$$\iint_R C(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_0^2 (24x^2 + 20y^2 - 32xy - 40x - 56y + 250)dxdy$$

Primeiro, vamos resolver apenas a integral interna, em relação a x. Depois que encontrarmos o resultado dessa integral, vamos resolver em relação a y. Vejamos:

$$\int_0^2 (24x^2 + 20y^2 - 32xy - 40x - 56y + 250)dx$$

Tudo o que for referente apenas à variável y deve ser tratado como constante, assim temos:

$$= \left[\frac{24x^3}{3} + 20xy^2 - \frac{32x^2y}{2} - \frac{40x^2}{2} - 56xy + 250x\right]_0^2$$

$$= [8x^3 + 20xy^2 - 16x^2y - 20x^2 - 56xy + 250x]_0^2$$

$$= [8 \times 2^3 + 20 \times 2 \times y^2 - 16 \times 2^2 \times y - 20 \times 2^2 - 56 \times 2 \times y + 250 \times 2]$$

$$= [64 + 40y^2 - 64y - 80 - 112y + 500]$$

$$= 40y^2 - 176y + 484$$

Vejam que a nossa integral interna resultou em uma função de y. Agora, vamos resolver nossa integral externa com base na função obtida:

$$\int_0^2 (40y^2 - 176y + 484)dy$$

$$= \left[\frac{40y^3}{3} - \frac{176y^2}{2} + 484y\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{40 \times 2^3}{3} - \frac{176 \times 2^2}{2} + 484 \times 2\right]$$

$$= \left[\frac{40 \times 8}{3} - 352 + 968\right]$$

$$= \frac{320}{3} + 616$$

$$= 106{,}67 + 616$$

$$= 722{,}67$$

Portanto, nossa integral dupla se resumir à realização do procedimento de integração duas vezes.

Gabarito: Errado.

11. (CESPE/TJ-ES/2011) Julgue o item abaixo sabendo que $sen\ (0)\ =\ cos(\pi/2) = 0$, que $\int sen(x)dx = -cos(x)$ e que $\int cos(x)dx = sen(x)$.

Para que a função $f(x,y) = k \times sen\left(\frac{\pi \times (x+y)}{2}\right)$, definida para $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, seja uma densidade conjunta de probabilidade, é necessário que k seja igual a $1/8\ \pi^2$.

Comentários:

Para que uma função seja considerada como uma função de densidade de probabilidade, a área do gráfico abaixo dessa função deve ser 1. Portanto, temos que calcular a integral dupla da função $f(x,y)$ na região mencionada e verificar o valor de k para que a área seja igual a 1. Vejamos:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 k \times sen\left(\frac{\pi \times (x+y)}{2}\right) dxdy$$

Primeiro, vamos resolver apenas a integral interna, em relação a x. Depois que encontrarmos o resultado dessa integral, vamos resolver em relação a y. Vejamos:

$$\int_0^1 k \times sen\left(\frac{\pi \times (x+y)}{2}\right) dx$$

Para essa integral, vamos aplicar uma substituição de variável, chamaremos tudo que está dentro da função seno de u:

$$\frac{\pi \times (x+y)}{2} = u$$

Os limites da nova integral são:

$$x = 0 \to \frac{\pi}{2} y$$

$$x = 1 \to \frac{\pi}{2}(y+1)$$

Nosso dx também deve ser substituído:

$$\frac{\pi}{2} dx = du$$

$$dx = \frac{2}{\pi} du$$

Assim, a integral interna passa a ser:

$$\int_0^1 k \times sen\left(\frac{\pi \times (x+y)}{2}\right) dx = \frac{2k}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}y}^{\frac{\pi}{2}(y+1)} sen(u)du$$

Dessa forma, temos que:

$$= \frac{2k}{\pi}[-cos(u)]_{\frac{\pi}{2}y}^{\frac{\pi}{2}(y+1)}$$

$$= \frac{2k}{\pi}\left[-cos\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right)\right] - \frac{2k}{\pi}\left[-cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right]$$

$$= \frac{2k}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right] - \frac{2k}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right)\right]$$

Agora, vamos jogar essa função de y na integral externa:

$$\int_0^1 \frac{2k}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right] - \frac{2k}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right)\right]dy = \int_0^1 \frac{2k}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right]dy - \int_0^1 \frac{2k}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right)\right]dy$$

Vamos resolver a primeira integral, $\int_0^1 \frac{2k}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right]dy$:

$$\int_0^1 \frac{2k}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right]dy = \frac{2k}{\pi}\int_0^1 cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)dy$$

Vamos aplicar a substituição:

$$\frac{\pi}{2}y = w$$

Calculando os novos limites da integral:

$$y = 0 \to w = 0$$

$$y = 1 \to w = \frac{\pi}{2}$$

Substituindo dy:

$$\frac{\pi}{2}dy = dw$$

$$dy = \frac{2}{\pi}dw$$

Assim, chegamos à integral do cosseno:

$$= \frac{2k}{\pi}\int_0^1 cos(w)\frac{2}{\pi}dw = \frac{4k}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(w)dw$$

$$= \frac{4k}{\pi^2}[sen(w)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4k}{\pi^2}\left[sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0)\right]$$

$$= \frac{4k}{\pi^2}[1 - 0]$$

$$= \frac{4k}{\pi^2}$$

Vamos agora para a segunda integral:

$$\int_0^1 \frac{2k}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right)\right]dy = \frac{2k}{\pi}\int_0^1 cos\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right)dy$$

Aplicamos a substituição:

$$\frac{\pi}{2}(y+1) = w$$

Calculamos os novos limites:

$$y = 0 \rightarrow w = \frac{\pi}{2}$$

$$y = 1 \rightarrow w = \pi$$

Encontramos o novo dy:

$$\frac{\pi}{2}dy = dw$$

$$dy = \frac{2}{\pi}dw$$

Jogamos essas informações na integral:

$$= \frac{2k}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos(w)\frac{2}{\pi}dw = \frac{4k}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos(w)dw$$

$$= \frac{4k}{\pi^2}[sen(w)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{4k}{\pi^2}\left[sen(\pi) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{4k}{\pi^2}[0 - 1]$$

$$= -\frac{4k}{\pi^2}$$

Dessa forma, concluímos que:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = \frac{4k}{\pi^2} - \left(-\frac{4k}{\pi^2}\right) = \frac{8k}{\pi^2}$$

Para ser uma função de densidade de probabilidade, o valor dessa integral deve ser 1:

$$\frac{8k}{\pi^2} = 1$$

$$k = \frac{\pi^2}{8}$$

Gabarito: Certo.

12. (CESPE/TRE-ES/2011) Acerca da função $f(x) = exp(-x)$, julgue o item abaixo.

A integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente.

Comentários:

Uma integral imprópria do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente quando $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ e $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ convergem.

Sendo f uma função integrável em $[a,b]$ para todo $b > a$, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$. Se o limite existe e é um número real, dizemos que a integral imprópria converge. No caso de o limite não existir ou não ser finito, dizemos que a integral imprópria diverge.

Sendo f uma função integrável em $[a,b]$ para todo $a > b$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$. Novamente, se o limite existe e é um número real, dizemos que a integral imprópria converge. No caso de o limite não existir ou não ser finito, dizemos que a integral imprópria diverge.

Assim, teremos que verificar duas situações:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx$$

e

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^{-x}\,dx$$

Na última definição dizemos que a integral imprópria converge quando ambas as integrais do segundo membro são convergentes.

$$\int_a^b e^{-x}\,dx$$

Faremos a substituição:

$$-x = u$$

Os novos limites são:

$$x = a \ \rightarrow \ u = -a$$

$$x = b \ \rightarrow \ u = -b$$

Substituindo dx:

$$-dx = du$$

$$dx = -du$$

Chegamos à integral:

$$\int_a^b e^{-x}\,dx = \int_{-a}^{-b} e^u\,(-du) = -\int_{-a}^{-b} e^u\,du = -[e^u]_{-a}^{-b} = -e^{-b} - (-e^{-a})$$

$$\int_a^b e^{-x}\,dx = -e^{-b} + e^{-a} = \frac{1}{e^a} - \frac{1}{e^b}$$

Verificando os limites:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \frac{1}{e^0} - \frac{1}{e^{\infty}} = 1 - 0 = 1 \text{ (Converge)}$$

e

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^{-x}\,dx = \frac{1}{e^{-\infty}} - \frac{1}{e^0} - \frac{1}{e^0} = \infty - 1 = +\infty \text{ (Diverge)}$$

Portanto, a integral diverge para $x \ < \ 0$.

Gabarito: Errado.

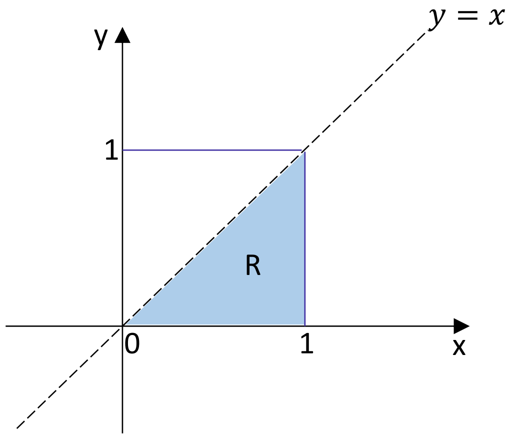
13. (CESPE/TRE-ES/2011) Considerando a função $f(x,y) = ln(x^2 - y^2 + k)$, em que k é uma constante real, julgue os próximos itens.

Considere $f(x,y) = ln(x^2 - y^2 + 4)$ definida no quadrado $[0;1] \times [0;1]$. Então

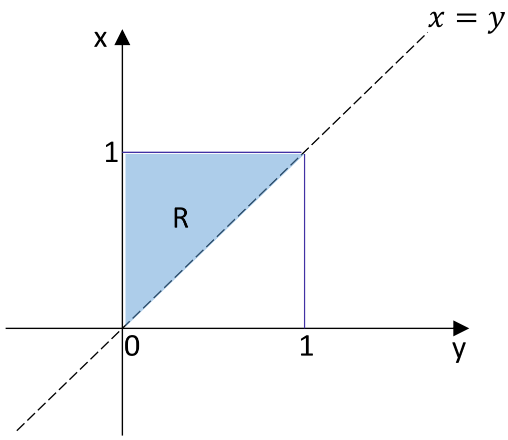
$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy$$

Comentários:

A integral dupla à esquerda está sendo calculada na região $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le x$, representada na figura a seguir:



Ao alterarmos a ordem de integração, é como se invertêssemos o plano cartesiano. A região de integração continua sendo a mesma, mas os eixos que trocam de lugar. Vejam que, agora, para calcularmos R em relação ao eixo y, precisamos pegar a região limitada entre x = y e x = 1.



Portanto, por estarem integrando a mesma região,

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy$$

Gabarito: Certo.

14. (CESPE/BASA/2010) Com relação ao cálculo de probabilidades, julgue o item.

Ao se aplicar a regra de Simpson, com h = 1, para aproximar o resultado da integral $\int x^2 dx$,obtém-se um erro de aproximação igual a 0,01.

Comentários:

A regra de Simpson resulta da integração da função f(x) no intervalo [a, b] a partir da aproximação polinomial de segundo grau de Lagrange, com pontos igualmente espaçados a, b e c = a + h, onde h = (b - a)/2.

A integral desejada será dada por:

$$S(f) = \big(f(a) + 4 \times f(c) + f(b)\big) \times (h/3)$$

Calculando os termos dessa fórmula:

$$h = 1$$

$$f(a) = f(0) = 0^2 = 0$$

$$f(c) = f(1) = 1^2 = 1$$

$$f(b) = f(2) = 2^2 = 4$$

Aplicando na fórmula de Simpson:

$$S(f) = (0 + 4 \times 1 + 4) \times (1/3)$$

$$S(f) = 8 \times (1/3) = 2{,}67$$

Agora, vejamos qual o valor da integral calculada pelo método tradicional:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}67$$

Portanto, o erro é zero.

Gabarito: Errado.

15. (CESPE/ANTAQ/2009) Um estudo foi realizado para avaliar a proporção de carga perdida X nos transbordos de cargas de granéis sólidos. Sabe-se que a distribuição da perda X segue uma distribuição beta cuja densidade é dada por f, em que $0 < x < 1$, e $a > 0$ e $b > 0$ são os parâmetros desconhecidos da distribuição, e $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$ é chamada de função beta. Uma amostra aleatória simples X será retirada dessa distribuição de perdas. Considerando essa situação hipotética e as informações apresentadas, julgue os itens que se seguem.

$B(1{,}5) = B(5{,}1)$

Comentários:

Conforme o enunciado, devemos verificar se $B(1{,}5) = B(5{,}1)$:

$$B(1{,}5) = \int_0^1 x^{1-1}(1-x)^{5-1}\, dx$$

$$B(1{,}5) = \int_0^1 (1-x)^4\, dx$$

Fazendo a substituição por $u = 1 - x$, temos que:

$$du = -dx$$

$$dx = -du$$

Os novos limites da integral são:

$$x = 0 \rightarrow u = 1$$

$$x = 1 \rightarrow u = 0$$

Aplicando a substituição, ficamos com a integral:

$$B(1{,}5) = -\int_1^0 u^4\,du = -\left[\frac{u^5}{5}\right]_1^0 = -\left(\frac{0^5}{5} - \frac{1^5}{5}\right) = \frac{1^5}{5} = \frac{1}{5}$$

Agora, vamos calcular $B(5{,}1)$:

$$B(5{,}1) = \int_0^1 x^{5-1}(1-x)^{1-1}\,dx$$

$$B(5{,}1) = \int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1^5}{5} = \frac{1}{5}$$

Portanto, $B(1{,}5) = B(5{,}1) = {}^1/_5$.

Gabarito: Certo.

16. (CESPE/ANAC/2009) Acerca da função $f(x) = xsenx;\ 0 \leq x < \pi$, julgue os itens seguintes.

A área da região compreendida entre o gráfico de $y = f(x);\ 0 \leq x < \pi$ e o eixo x é inferior a π unidades de área.

Comentários:

Para calcular a área da região compreendida entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x, devemos calcular a integral de $\int x\,senx\,dx$ na região mencionada na questão, $0 \leq x < \pi$.

Para a resolução dessa integral, vamos utilizar a técnica de integração por partes, chamando x de u e $sen(x)dx$ de dv:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Fazendo a substituição de x por u:

$$u = x$$

$$du = dx$$

Fazendo a substituição de $sen(x)dx$ por dv:

$$dv = sen(x)dx$$

$$\int dv = \int sen(x)dx$$

$$v = -cos(x)$$

Substituindo essas expressões na integral por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\,(senx\,dx) = x \times \big(-cos(x)\big) - \int \big(-cos(x)\big)\,dx$$

$$\int x\,(senx\,dx) = -x\,cos(x) + \int cos(x)\,dx$$

$$\int x\,senx\,dx = -x\,cos(x) + senx + C$$

Calculando a integral na região solicitada:

$$\int_0^{\pi} x\,senx\,dx = [-x\,cos(x) + senx]_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} x\,senx\,dx = \big(-\pi\,cos(\pi) + sen(\pi)\big) - \big(-0\,cos(0) + sen(0)\big)$$

$$\int_0^{\pi} x\,senx\,dx = (-\pi \times (-1) + 0) - (-0 \times 1 + 0)$$

$$\int_0^{\pi} x\,senx\,dx = \pi$$

Portanto, a área não é inferior a π.

Gabarito: Errado.

17. (CESPE/ANAC/2009) Acerca da função $f(x) = xsenx;\ 0 \leq x < \pi$, julgue os itens seguintes.

Sabendo-se que o volume do sólido obtido, ao se girar o gráfico da função y = f(x) em torno do eixo x, é dado por $V = \pi \int_0^{\pi} f(x)^2 dx$ é correto afirmar que V é superior a $\frac{\pi^4}{6}$ unidades de volume.

Comentários:

Para responder à questão, temos que calcular o volume de um sólido de revolução por meio da fórmula apresentada na questão:

$$V = \pi \int_0^{\pi} f(x)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} x^2 \ (senx)^2 dx$$

Para a resolução dessa integral, vamos utilizar a técnica de integração por partes, chamando x^2 de u e $sen^2(x)dx$ de dv:

$$\int u \ dv = uv - \int v \ du$$

Fazendo a substituição de x por u:

$$u = \ x^2$$

$$du = 2xdx$$

Fazendo a substituição de $sen(x)dx$ por dv:

$$dv = sen^2(x)dx$$

$$\int dv = \int sen^2(x)dx$$

$$v = \frac{x}{2} - \frac{sen(2x)}{4}$$

Substituindo essas expressões na integral por partes:

$$\int u \ dv = uv - \int v \ du$$

$$\int x^2 \ (senx)^2 dx = x^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{sen(2x)}{4}\right) - \int \left(\frac{x}{2} - \frac{sen(2x)}{4}\right) \times 2xdx$$

$$\int x^2 \ (senx)^2 dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2 \times sen(2x)}{4}\right) - \int \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{2x \times sen(2x)}{4}\right) dx$$

$$\int x^2 \ (senx)^2 dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2 \times sen(2x)}{4}\right) - \int \left(x^2 - \frac{x \times sen(2x)}{2}\right) dx$$

Novamente, vamos usar a técnica de integração por partes para resolver $\int \left(x^2 - \frac{x \times sen(2x)}{2}\right) dx$

$$\int \left(x^2 - \frac{x \times sen(2x)}{2}\right) dx = \int (x^2)dx - \frac{1}{2}\int x \times sen(2x) \ dx$$

$$\int \left(x^2 - \frac{x \times sen(2x)}{2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\int x \times sen(2x) \ dx$$

Mais uma vez, utilizamos a integração por partes para resolver $\int x \times sen(2x)\, dx$:

$$\int x \times sen(2x)\, dx = -\frac{x \times cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int cos(2x)\, dx$$

$$\int x \times sen(2x)\, dx = -\frac{x \times cos(2x)}{2} + \frac{1}{4} sen(2x)$$

Voltando à integral $\int \left(x^2 - \frac{x \times sen(2x)}{2}\right) dx$:

$$\int \left(x^2 - \frac{x \times sen(2x)}{2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\int x \times sen(2x)\, dx$$

Agora, sabemos que $\int x \times sen(2x)\, dx = -\frac{x \times cos(2x)}{2} + \frac{1}{4} sen(2x)$. Logo,

$$\int \left(x^2 - \frac{x \times sen(2x)}{2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x \times cos(2x)}{2} + \frac{1}{4} sen(2x)\right)$$

$$\int \left(x^2 - \frac{x \times sen(2x)}{2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x \times cos(2x)}{4} - \frac{1}{8} sen(2x)$$

Voltando à integral $\int x^2\, (senx)^2 dx$:

$$\int x^2\, (senx)^2 dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2 \times sen(2x)}{4}\right) - \int \left(x^2 - \frac{x \times sen(2x)}{2}\right) dx$$

$$\int x^2\, (senx)^2 dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2 \times sen(2x)}{4}\right) - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x \times cos(2x)}{4} - \frac{1}{8} sen(2x)\right)$$

$$\int x^2\, (senx)^2 dx = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2 \times sen(2x)}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x \times cos(2x)}{4} + \frac{1}{8} sen(2x)$$

$$\int_0^\pi x^2\, (senx)^2 dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^2 \times sen(2x)}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x \times cos(2x)}{4} + \frac{1}{8} sen(2x)\right]_0^\pi$$

$$= \left[\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^2 \times sen(2\pi)}{4} - \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi \times cos(2\pi)}{4} + \frac{1}{8} sen(2\pi)\right] - \left[\frac{0^3}{2} - \frac{0\pi^2 \times sen(2 \times 0)}{4} - \frac{0^3}{3} - \frac{0 \times cos(2 \times 0)}{4} + \frac{1}{8} sen(2 \times 0)\right]$$

$$= \left[\frac{\pi^3}{2} - 0 - \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi \times 1}{4} + 0\right] - [0]$$

$$= \left[\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}\right]$$

Como $V = \pi \int_0^{\pi} x^2\,(senx)^2 dx$, ainda precisamos multiplicar esse resultado por π:

$$V = \pi \times \left(\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$V = \frac{\pi^4}{6} - \frac{\pi^2}{4}$$

Gabarito: Errado.

18. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) A partir da integral $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx$, julgue os itens que se seguem.

A substituição $x = 2 \times sen\ t$, no integrando de I, resulta que $I = 2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - cos\ t]dt$.

Comentários:

Vejamos o que aconteceria se fizéssemos a substituição mencionada na questão:

$$x = 2 \times sen\ t$$

O dx da integral inicial seria substituído por:

$$dx = 2 \times cos\ t\ dt$$

Os limites originais passariam a ser:

$$x = 0 \rightarrow 2 \times sen\ t = 0$$

$$sen\ t = 0$$

$$t = 0$$

$$x = 2 \rightarrow 2 \times sen\ t = 2$$

$$sen\ t = 1$$

$$t = \frac{\pi}{2}$$

Assim, chegaríamos na seguinte integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - (2 \times sen\ t)^2}\,(2 \times cos\ t\ dt) =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4 \times (sen\ t)^2}\,(2 \times cos\ t\ dt)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\left(1 - sen^2(t)\right)}\,(2 \times \cos t\; dt)$$

Nesse ponto, vamos utilizar a identidade geométrica $sen^2(t) + cos^2(t) = 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \times \sqrt{cos^2(t)}\,(2 \times \cos t\; dt)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \times \cos t \times \cos t\; dt$$

Portanto, chegaríamos à seguinte integral:

$$4 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)\, dt$$

Gabarito: Errado.

19. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) A partir da integral $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx$, julgue os itens que se seguem.

O volume do sólido obtido ao se girar, de 360º, a região compreendida entre o gráfico da função $y = \sqrt{4 - x^2}$, para $0 \leq x \leq 2$, o eixo Ox e o eixo Oy, em torno do eixo Oy, é igual a $\frac{4}{3} \times I$ unidades de volume.

Comentários:

O volume de um sólido de revolução em relação ao eixo Oy é calculado por meio da fórmula:

$$V = \pi \int_a^b f(y)^2 dy$$

Primeiro, precisamos encontrar $f(y)$:

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$x^2 = 4 - y^2$$

$$f(y) = x = \sqrt{4 - y^2}$$

Os limites da integral para o eixo Oy são:

$$x = 0 \rightarrow y = 2$$

$$x = 2 \rightarrow y = 0$$

Portanto,

$$0 \leq \mathrm{y} \leq 2$$

Substituindo $f(y)^2$ pela expressão dada na questão, teremos:

$$V = \pi \times \int_0^2 \left(\sqrt{4 - y^2}\right)^2 dy$$

$$V = \pi \times \int_0^2 (4 - y^2)\, dy$$

$$V = \pi \times \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$V = \pi \times \left[\left(4 \times 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \times 0 - \frac{0^3}{3}\right)\right]$$

$$V = \pi \times \left(8 - \frac{8}{3}\right)$$

$$V = \pi \times \left(\frac{24 - 8}{3}\right)$$

$$V = \frac{16\pi}{3}$$

Portanto, o volume do sólido de revolução é $V = \frac{16\pi}{3}$.

Agora, vamos verificar qual o valor de I. Já sabemos que:

$$I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = 4 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)\, dt$$

Usando a identidade $cos^2(t) = \frac{1+cos(2t)}{2}$:

$$I = 4 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos(2t)}{2}\, dt$$

Vamos quebrar essa integral em duas partes:

$$I = 4 \times \left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2t)\, dt\right)$$

$$I = 4 \times \left(\frac{1}{2}[t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{sen(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$I = 4 \times \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{sen\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{sen(2 \times 0)}{2}\right)\right)$$

$$I = 4 \times \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{sen(\pi)}{2} - \frac{sen(0)}{2}\right)\right)$$

$$I = 4 \times \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(0 - 0)\right)$$

$$I = 4 \times \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$I = \pi$$

Portanto, $V = \frac{16}{3} I$.

Gabarito: Errado.

20. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) A partir da integral $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$, julgue os itens que se seguem.

O volume do sólido obtido ao se girar, de 360º, a região compreendida entre o gráfico da função $y = (4 - x^2)^{\frac{1}{4}}$, para $0 \leq x \leq 2$, o eixo Ox e o eixo Oy, em torno do eixo Oy, é igual a $\pi \times I$ unidades de volume.

Comentários:

O volume de um sólido de revolução é calculado por meio da fórmula:

$$V = \pi \int_0^2 f(x)^2 dx$$

Substituindo $f(x)^2$ pela expressão dada na questão, teremos:

$$V = \pi \times \int_0^2 \left((4 - x^2)^{\frac{1}{4}}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \times \int_0^2 (4 - x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$V = \pi \times \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

$$V = \pi \times I$$

Gabarito: Certo.

21. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) A partir da integral $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$, julgue os itens que se seguem.

O gráfico da função integranda, no intervalo considerado, representa a parte, no primeiro quadrante, da circunferência de centro (0, 0) e raio 2 e, portanto, I = π unidades de área.

Comentários:

É exatamente isso. O gráfico da função $\sqrt{4-x^2}$, no intervalo de 0 a 2, representa o primeiro quadrante de uma circunferência de raio 2 centrada na origem do plano cartesiano. Devemos lembrar que a equação de uma circunferência é dada por:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Como $y = \sqrt{4-x^2}$, temos que:

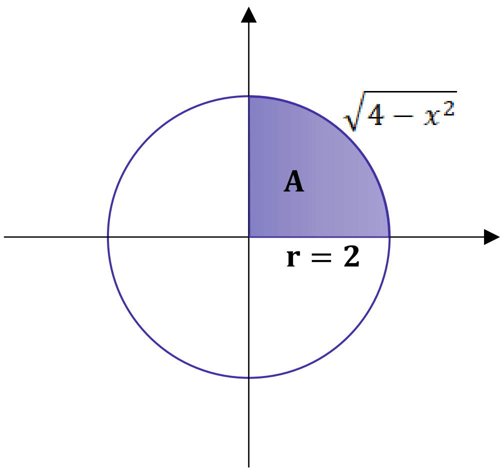
$$y^2 = 4 - x^2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 2^2$$

Portanto, como a área de uma circunferência é $A = \pi \times r^2$, temos que a área do primeiro quadrante equivale a 1/4 da área total:

$$A = \frac{\pi \times r^2}{4} = \frac{\pi \times 2^2}{4} = \frac{\pi \times 4}{4} = \pi$$



Gabarito: Certo.

LISTA DE QUESTÕES – CESPE

Limites

1. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Acerca da função $f(x) = arctg\ x$, que é a função inversa de $g(x) = tg(x)$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, julgue os itens a seguir.

A reta $y = -\frac{\pi}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

2. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Considere, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, as seguintes informações acerca de uma função y = f (x):

(a) D = domínio da função $f = R - -1, 1$

(b) f é contínua em todos os pontos de seu domínio;

(c) sua segunda derivada, f'', é positiva em todo o seu domínio;

(d) sua primeira derivada, f', se anula somente em x = 0;

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

As retas x = 1 e x = -1 são assíntotas verticais para a função f.

3. (CESPE/DETRAN-PA/2006) O valor de $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+x+5}{4-7x^2}$ é igual a:

a) 0.

b) ∞.

c) 1.

d) -1.

Gabarito – CESPE

Limites

1. CERTO
2. CERTO
3. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES – CESPE

Derivadas

1. (CESPE/PGE-PE/2019) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética, seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de máximos e mínimos de funções, da regra de trapézio para cálculo aproximado de integrais e de análise combinatória. Uma caixa, sem tampa superior, deve ter a forma de um paralelepípedo reto-retângulo, de base quadrada e volume igual a 4.000 cm³. A espessura do material a ser utilizado para a confecção dessa caixa é desprezível.

Nesse caso, para a confecção da caixa com as referidas especificações, serão necessários, pelo menos, 1.200 cm² de material.

2. (CESPE/PGE-PE/2019) Julgue os próximos itens, relativos à função $f(x,y) = 4 + cos(x + y)$, para (x, y) restritos ao domínio $0 \leq x \leq 2\pi$ e $0 \leq y \leq 2\pi$.

A função $f(x,y)$ tem infinitos pontos críticos em seu domínio.

3. (CESPE/PGE-PE/2019) A respeito da função $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$, em que $-\infty < x < \infty$, julgue o item a seguir.

Os mínimos locais da função $y = f(x)$ estão localizados nos pontos de abcissas $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$, que também são pontos de mínimo absoluto; o ponto de abcissa $x_3 = 0$ é de máximo local, mas não de máximo absoluto.

4. (CESPE/PGE-PE/2019) A respeito da função $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$, em que $-\infty < x < \infty$, julgue o item a seguir.

No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, a reta de equação y + 12x = 17 é tangente ao gráfico da função y = f(x) no ponto de abcissa x = -1.

5. (CESPE/PGE-PE/2019) A respeito da função $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$, em que $-\infty < x < \infty$, julgue o item a seguir.

No intervalo -2 < x < 0, essa função é crescente.

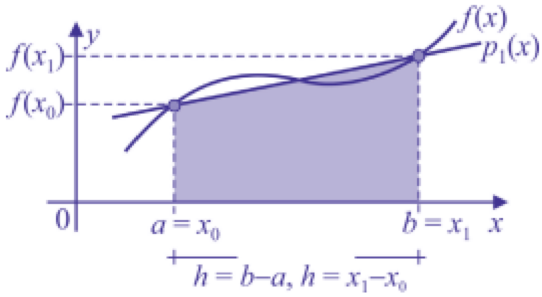
6. (CESPE/ABIN/2018) Considerando a função $f: D \rightarrow R$, em que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 10$ para $x \in D = \{x \in R | -2 \leq x \leq 3\}$, julgue o item a seguir.

Para a função f, x = 0 é um ponto de máximo local que também é de máximo absoluto.

7. (CESPE/ABIN/2018) Considerando a função $f: D \to R$, em que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 10$ para $x \in D = \{x \in R | -2 \leq x \leq 3\}$, julgue o item a seguir.

A função f muda a concavidade de negativa, ou para baixo, para positiva, ou para cima, em x = 1.

8. (CESPE/IFF/2018)



A figura precedente ilustra a regra do trapézio, um método de integração numérica que aproxima a área sob o gráfico da função f(x) pela área de um trapézio, em um intervalo [a, b] contido no domínio da função. Nessa aproximação, o erro ET é estimado na forma $|E_T| \leq [h^3/12] \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$, em que h = b – a é o comprimento do intervalo [a, b] e f''(x) é a derivada segunda de f(x).

Tendo como referência essas informações, assinale a opção que apresenta a estimativa do erro E_T para a função $f(x) = -x^{-2}$ em um intervalo [a, b] contido no semieixo positivo Ox.

a) $| E_T | \leq [(b - a)^3 /2] \times a^{-4}$

b) $| E_T | \leq [(b - a)^3 /2] \times a^4$

c) $| E_T | \leq [(b - a)^3 /6] \times b^4$

d) $| E_T | \leq [(b - a)^3 /2] \times b^4$

e) $| E_T | \leq [(b - a)^3 /12] \times a^{-4}$

9. (CESPE/Pref. São Luís/2017)

Texto 11A3CCC Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, considere a função f, definida da seguinte forma:

f(x) = x, para 0 ≤ x < 10; e f(x) = 8, para x ≥ 10.

A derivada, f '(x), da função f apresentada no texto 11A3CCC pode ser calculada para diversos valores x do domínio da f. Dessa forma, f '(x) será expressa por

a) f '(x) = 1, para 0 < x < 10; e f '(x) = 0, para x >10.

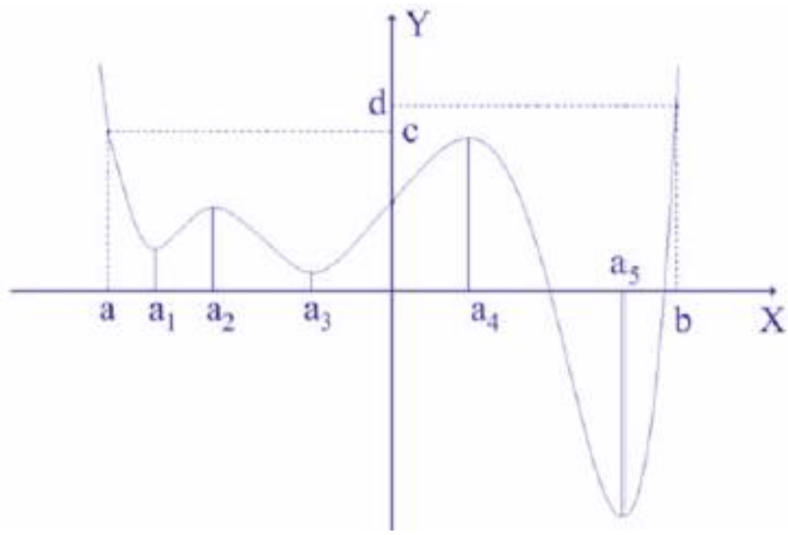
b) f '(x) = 1, para 0 < x < 10; e f '(x) = 0, para x ≥10.

c) f '(x) = 1, para 0 ≤ x ≤ 10; e f '(x) = 0, para x >10.

d) f '(x) = 1, para 0 ≤ x ≤ 10; e f '(x) = 0, para x ≥10.

e) f '(x) = 1, para 0 ≤ x < 10; e f '(x) = 0, para x ≥10.

10. (CESPE/ANAC/2012)



A figura acima apresenta parte do gráfico de uma função polinomial $y = f(x)$ definida em toda a reta real. Sabe-se que somente nos pontos $(a_i, f(a_i))$, com i =1, 2, 3, 4 e 5, as retas tangentes ao gráfico são parelalas ao eixo das abscissas, e a derivada de $f(x)$ não se anula em nenhum ponto fora do intervalo $[a, b]$.

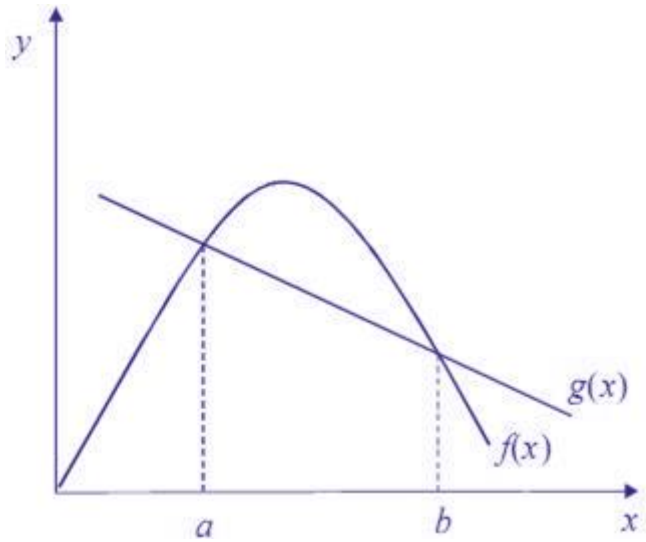
A partir dessas informações e com base no gráfico apresentado, julgue os itens que se seguem.

A derivada de f(x) tem pelo menos três raízes reais e distintas.

11. (CESPE/ANAC/2012) Para produzir o tecido utilizado na cobertura dos bancos de passageiros de aviões, determinada companhia utiliza dois tipos diferentes de fibras, denominadas fibra I e fibra II. Considere que a função $C(x,y) = 24x^2 + 20y^2 - 32xy - 40x - 56y + 250$ represente o custo de produção, em reais, de um metro desse tecido, em função da utilização de x metros da fibra I e y metros da fibra II. Com base nessas informações, julgue os itens subsequentes.

A função $C(x, y)$ é contínua em todos os pontos do plano $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial^2 C(x,y)}{\partial x \partial y} = -32$

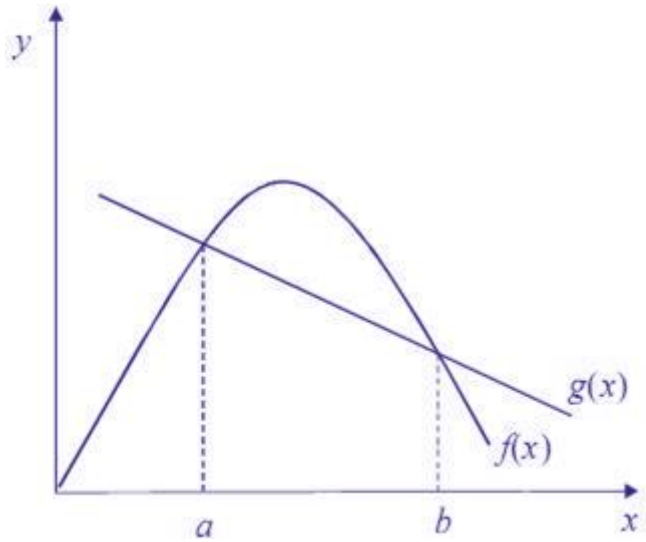
12. (CESPE/SEPLAG-DF/2008)



A figura acima ilustra os gráficos das funções f e g, em que f é uma função derivável e g é uma função linear. A partir desses gráficos, julgue os itens seguintes.

A função f tem ponto crítico no intervalo [a, b].

13. (CESPE/SEPLAG-DF/2008)



A figura acima ilustra os gráficos das funções f e g, em que f é uma função derivável e g é uma função linear. A partir desses gráficos, julgue os itens seguintes.

Para algum número real c tal que $a < c < b$, tem-se que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

14. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Considere, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, as seguintes informações acerca de uma função y = f (x):

(a) D = domínio da função $f = R - -1, 1$

(b) f é contínua em todos os pontos de seu domínio;

(c) sua segunda derivada, f", é positiva em todo o seu domínio;

(d) sua primeira derivada, f', se anula somente em x = 0;

(e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

O gráfico da função não possui pontos nos quadrantes 3.º e 4.º.

15. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Considere, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, as seguintes informações acerca de uma função y = f (x):

(a) D = domínio da função $f = R - -1, 1$

(b) f é contínua em todos os pontos de seu domínio;

(c) sua segunda derivada, f", é positiva em todo o seu domínio;

(d) sua primeira derivada, f', se anula somente em x = 0;

(e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

Em x = 0, a função f tem um ponto de mínimo local.

16. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) Considere, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, as seguintes informações acerca de uma função y = f (x):

(a) D = domínio da função $f = R - -1, 1$

(b) f é contínua em todos os pontos de seu domínio;

(c) sua segunda derivada, f", é positiva em todo o seu domínio;

(d) sua primeira derivada, f', se anula somente em x = 0;

(e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

A função $f'(x)$ é estritamente crescente.

Gabarito – CESPE

Derivadas

1. CERTO
2. CERTO
3. CERTO
4. ERRADO
5. CERTO
6. CERTO
7. CERTO
8. LETRA A
9. LETRA A
10. CERTO
11. CERTO
12. CERTO
13. CERTO
14. ERRADO
15. ERRADO
16. ERRADO

LISTA DE QUESTÕES – CESPE

Integrais

1. (CESPE/PGE-PE/2019) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética, seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de máximos e mínimos de funções, da regra de trapézio para cálculo aproximado de integrais e de análise combinatória.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v(t)$	20	20	25	20	15	20	20	25	30	25	20

Um observador mediu a velocidade $v(t)$, em metros por segundo, de um móvel, entre os instantes t = 0s e t = 10s, e anotou os dados na tabela a seguir.

Se entre t = 0s e t = 10s o móvel tiver percorrido $S = \int_0^{10} v(t)\,dt$ metros, então, depreende-se do cálculo dessa integral pela regra do trapézio que $S < 230\,m$.

2. (CESPE/PGE-PE/2019) Julgue os próximos itens, relativos à função $f(x, y) = 4 + cos(x + y)$, para (x, y) restritos ao domínio $0 \leq x \leq 2\pi$ e $0 \leq y \leq 2\pi$.

O volume de um sólido compreendido entre o gráfico da função $z = f(x, y)$ e o plano xOy é inferior a 144 unidades de volume.

3. (CESPE/IFF/2018) Para uma função f(x), contínua no intervalo [0, 6], são conhecidos os seguintes valores: f(0) = 0, f(1) = 3, f(2) = 8, f(3) = 15, f(4) = 24, f(5) = 35 e f(6) = 48. Nesse caso, a área da região abaixo do gráfico de f(x), acima do eixo das abscissas e entre x = 0 e x = 6, calculada por integração numérica pela regra do trapézio, é igual a

a) 109.

b) 133.

c) 218.

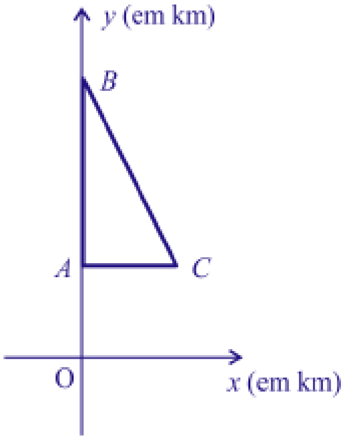
d) 266.

e) 623.

4. (CESPE/ABIN/2018) A respeito de aproximação numérica de integrais definidas, julgue o item subsequente.

O valor aproximado da integral da função ƒ(x) = sen 2x, no intervalo [0, π/2], calculado pela regra de Simpson usando-se um único arco da parábola que passa pelos pontos de abscissas x = 0, x = π/4 e x = π/2, é igual a π/3.

5. (CESPE/SEDF/2017)



Um fazendeiro proprietário de 18 km² de terras resolveu reparti-las entre seus dois filhos. Para tal, representou suas terras em um sistema cartesiano de coordenadas ortogonais xOy, em que o km é a unidade de medida em ambos os eixos. Nesse sistema de referência, a fazenda corresponde a um triângulo de vértices A(0, 9), B(0, 18) e C(4, 9), conforme apresentado na figura precedente. Para fazer a divisão, ele vai usar uma cerca que, no modelo, será paralela ao eixo y, ou seja, uma reta de equação x = k, em que k é uma constante.

A respeito dessa situação hipotética, julgue o próximo item.

Se $f(x)$ for a função linear da reta que passa pelos pontos B e C, então a área da propriedade pode ser determinada por $\int_0^4 f(x)\,dx$.

6. (CESPE/SEDF/2017)

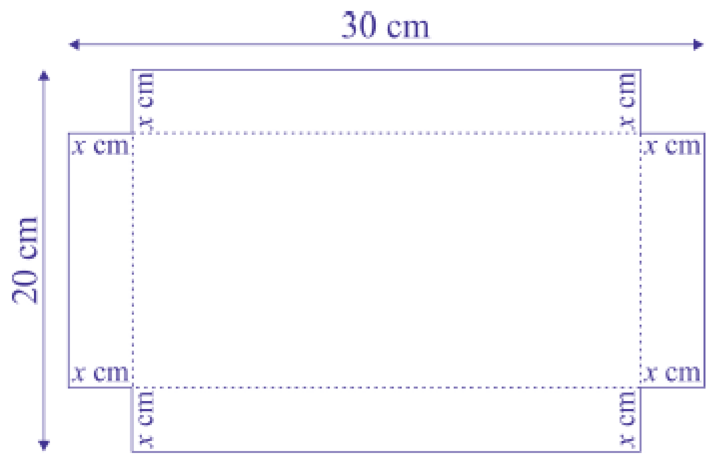


Figura I

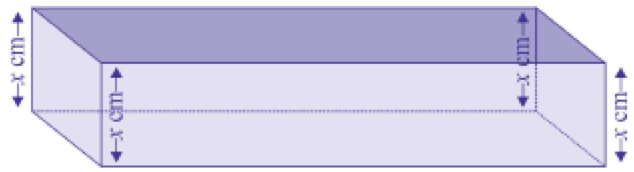


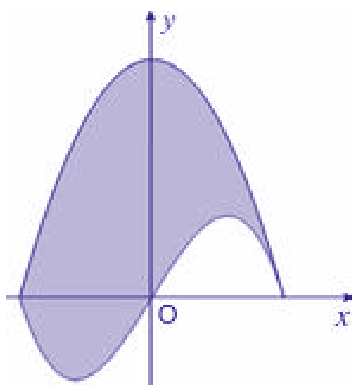
Figura II

Uma caixa retangular sem tampa será construída a partir da retirada de 4 quadrados de lado x cm de comprimento dos cantos de uma folha de papelão retangular de dimensões 30 cm × 20 cm, conforme mostra a figura I precedente. A figura II representa a caixa, após dobrarem-se as abas perpendicularmente à folha. O paralelepípedo reto (sem uma das faces) obtido tem altura de x cm.

A partir dessa situação, julgue o item a seguir.

Se $A(x)$ é o valor da área da base da caixa (paralelepípedo), em que A(0) = 600 cm² é o valor da área da folha antes da retirada dos quadrados, então $\int_0^3 A(x)\,dx > 1.400$.

7. (CESPE/SEE-AL/2013)



A figura acima, ilustrada em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, em que a unidade de medidas é o centímetro, foi escolhida para compor a logomarca de uma escola. Essa logomarca corresponde a uma região no plano cartesiano limitada pelos gráficos das funções $y = f(x) = 28 - 7/25\, x^2$ e

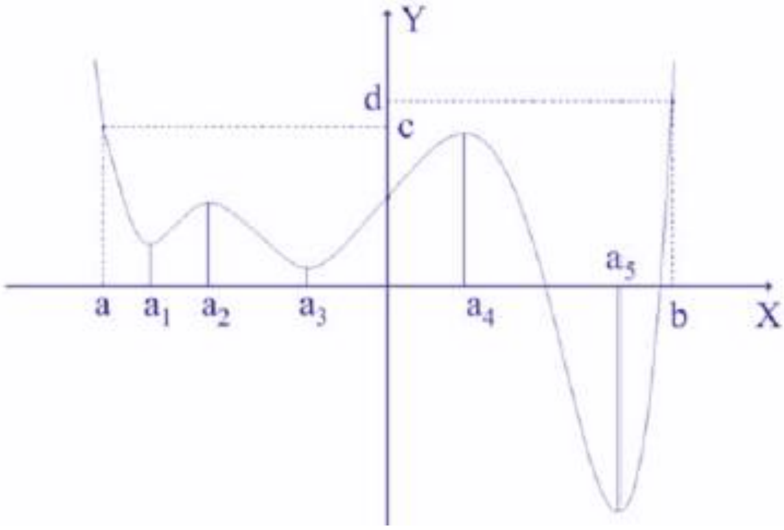
$y = g(x) = 5/2\ x - 1/40\ x^3$, para x no intervalo [-10, 10]. Tendo como referência essa logomarca, julgue o item.

A área da figura é superior a 370 cm2 .

8. (CESPE/CPRM/2013) Tendo em vista que, em determinado mês de 31 dias, a precipitação pluvial média diária em uma localidade é representada, em mm, $P(t) = 25e^{-(t-16)^2}$, para t de 1 a 31, julgue os itens subsequentes.

Considerando que a precipitação pluvial média total nesse mês se expressa pela integral $\int_1^{31} P(t)\,dt$, então essa precipitação total será inferior a 800mm.

9. (CESPE/ANAC/2012)



A figura acima apresenta parte do gráfico de uma função polinomial $y = f(x)$ definida em toda a reta real. Sabe-se que somente nos pontos $(a_i, f(a_i))$, com i =1, 2, 3, 4 e 5, as retas tangentes ao gráfico são parelalas ao eixo das abscissas, e a derivada de $f(x)$ não se anula em nenhum ponto fora do intervalo $[a, b]$.

A partir dessas informações e com base no gráfico apresentado, julgue os itens que se seguem.

No intervalo $[a, b]$, o valor da integral de $f(x)$ corresponde à área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo das abscissas, e entre as retas verticais a e b.

10. (CESPE/ANAC/2012) Para produzir o tecido utilizado na cobertura dos bancos de passageiros de aviões, determinada companhia utiliza dois tipos diferentes de fibras, denominadas fibra I e fibra II. Considere que a função $C(x, y) = 24x^2 + 20y^2 - 32xy - 40x - 56y + 250$ represente o custo de produção, em reais, de um metro desse tecido, em função da utilização de x metros da fibra I e y metros da fibra II. Com base nessas informações, julgue os itens subsequentes.

O valor da integral dupla $\iint_R \ C(x,y)dxdy$ - em que R é a seguinte região do plano: $R = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \ e \ 0 \leq y \leq 2$ - é superior a 750.

11. (CESPE/TJ-ES/2011) Julgue o item abaixo sabendo que $sen\ (0) \ = \ cos(\pi/2) = 0$, que $\int sen(x)dx = -cos(x)$ e que $\int cos(x)dx = sen(x)$.

Para que a função $f(x,y) = k \times sen\left(\frac{\pi\times(x+y)}{2}\right)$, definida para $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, seja uma densidade conjunta de probabilidade, é necessário que k seja igual a $1/8 \ \pi^2$.

12. (CESPE/TRE-ES/2011) Acerca da função $f(x) = exp(-x)$, julgue o item abaixo.

A integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente.

13. (CESPE/TRE-ES/2011) Considerando a função $f(x,y) = ln(x^2 - y^2 + k)$, em que k é uma constante real, julgue os próximos itens.

Considere $f(x,y) = ln(x^2 - y^2 + 4)$ definida no quadrado $[0;1] \times [0;1]$. Então

14. (CESPE/BASA/2010) Com relação ao cálculo de probabilidades, julgue o item.

Ao se aplicar a regra de Simpson, com h = 1, para aproximar o resultado da integral $\int \mathrm{x}^2\mathrm{dx}$,obtém-se um erro de aproximação igual a 0,01.

15. (CESPE/ANTAQ/2009) Um estudo foi realizado para avaliar a proporção de carga perdida X nos transbordos de cargas de granéis sólidos. Sabe-se que a distribuição da perda X segue uma distribuição beta cuja densidade é dada por f, em que $0 \ < \ x \ < \ 1$, e $a > 0$ e $b > 0$ são os parâmetros desconhecidos da distribuição, e $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ é chamada de função beta. Uma amostra aleatória simples X será retirada dessa distribuição de perdas. Considerando essa situação hipotética e as informações apresentadas, julgue os itens que se seguem.

$B(1{,}5) = B(5{,}1)$

16. (CESPE/ANAC/2009) Acerca da função $f(x) = xsenx;\ 0 \leq x < \pi$, julgue os itens seguintes.

A área da região compreendida entre o gráfico de $y \ = \ f(x);\ 0 \leq x < \pi$ e o eixo x é inferior a π unidades de área.

17. (CESPE/ANAC/2009) Acerca da função$f(x) = xsenx;\ 0 \leq x < \pi$, julgue os itens seguintes.

Sabendo-se que o volume do sólido obtido, ao se girar o gráfico da função y = f(x) em torno do eixo x, é dado por $V = \pi \int_0^{\pi} f(x)^2 dx$ é correto afirmar que V é superior a $\frac{\pi^4}{6}$ unidades de volume.

18. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) A partir da integral $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$, julgue os itens que se seguem.

A substituição $x = 2 \times sen\ t$, no integrando de I, resulta que $I = 2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - cos\ t] dt$.

19. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) A partir da integral $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$, julgue os itens que se seguem.

O volume do sólido obtido ao se girar, de 360º, a região compreendida entre o gráfico da função $y = \sqrt{4 - x^2}$, para $0 \leq x \leq 2$, o eixo Ox e o eixo Oy, em torno do eixo Oy, é igual a $\frac{4}{3} \times I$ unidades de volume.

20. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) A partir da integral $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$, julgue os itens que se seguem.

O volume do sólido obtido ao se girar, de 360º, a região compreendida entre o gráfico da função $y = (4 - x^2)^{\frac{1}{4}}$, para $0 \leq x \leq 2$, o eixo Ox e o eixo Oy, em torno do eixo Oy, é igual a $\pi \times I$ unidades de volume.

21. (CESPE/SEPLAG-DF/2008) A partir da integral $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$, julgue os itens que se seguem.

O gráfico da função integranda, no intervalo considerado, representa a parte, no primeiro quadrante, da circunferência de centro (0, 0) e raio 2 e, portanto, I = π unidades de área.

GABARITO – CESPE

Integrais

1. CERTO
2. ERRADO
3. LETRA A
4. CERTO
5. ERRADO
6. ERRADO
7. CERTO
8. CERTO
9. ERRADO
10. ERRADO
11. CERTO
12. ERRADO
13. CERTO
14. ERRADO
15. CERTO
16. ERRADO
17. ERRADO
18. ERRADO
19. ERRADO
20. CERTO
21. CERTO

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.