Aula 00

SEDUC-ES (Agente de Suporte Educacional) Noções de Matemática e Raciocínio Lógico

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

04 de Janeiro de 2024

Índice

AVISO IMPORTANTE!

Olá, Alunos (as)!

Passando para informá-los a respeito da **disposição das questões** dentro do nosso material didático. Informamos que a escolha das bancas, dentro dos nossos Livros Digitais, é feita de maneira estratégica e pedagógica pelos nossos professores a fim de proporcionar a melhor didática e o melhor direcionamento daquilo que mais se aproxima do formato de cobrança da banca do seu concurso.

Assim, o formato de questões divididas por tópico facilitará o seu processo de estudo, deixando mais alinhado às disposições constantes no edital.

No mais, continuaremos à disposição de todos no Fórum de dúvidas!

Atenciosamente,

Equipe Exatas

Estratégia Concursos

APRESENTAÇÃO DO CURSO

Olá, pessoal! Tudo bem?

É com grande satisfação que damos início ao nosso curso!

Os professores **Eduardo Mocellin, Francisco Rebouças** e **Vinicius Veleda** ficarão responsáveis pelo **Livro Digital**.

Antes de continuarmos, vamos apresentar os professores do material escrito:

Eduardo Mocellin: Fala, pessoal! Meu nome é Eduardo Mocellin, sou professor de Matemática e de Raciocínio Lógico do Estratégia Concursos e engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Sinto-me feliz em poder contribuir com a sua aprovação! Não deixe de me seguir no Instagram: **@edu.mocellin**

Francisco Rebouças: Fala, alunos! Aqui é o Francisco Rebouças, professor de Matemática do Estratégia Concursos. Sou Engenheiro Aeroespacial formado pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Saiba que será uma honra fazer parte da sua jornada rumo à aprovação e que estaremos sempre aqui para auxiliá-los com o que precisarem. Um grande abraço e nos vemos nas aulas!

Vinicius Veleda: Olá, caros alunos! Sou Auditor Fiscal do Estado do Rio Grande do Sul. Professor de Matemática e Matemática Financeira do Estratégia Concursos. Aprovado nos Concursos de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda dos Estados do Rio Grande do Sul (SEFAZ RS - 2019), Santa Catarina (SEFAZ SC - 2018) e Goiás (SEFAZ GO - 2018). Formado em Engenharia de Petróleo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com graduação sanduíche em Engenharia Geológica pela Universidade Politécnica de Madrid (UPM). Pela UFRJ, fui campeão sul americano do Petrobowl (Buenos Aires) e, posteriormente, Campeão Mundial (Dubai). Cursei meu ensino médio na Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx). Contem comigo nessa trajetória! **@viniciusveleda**

O material escrito em **PDF** está sendo construído para ser sua fonte **autossuficiente** de estudos. Isso significa que o livro digital será **completo** e **voltado para o seu edital**, justamente para que você não perca o seu precioso tempo "caçando por aí" o conteúdo que será cobrado na sua prova. Ademais, sempre que necessário, você poderá fazer perguntas sobre as aulas no **fórum de dúvidas**. **Bons estudos!**

FRAÇÕES

Frações

Revisão sobre Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Múltiplos de um número

Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito por B** × **k**, sendo **k** um número inteiro.

Exemplo: os números da forma **A** = **7**×**k** são múltiplos **de 7** (sendo **k** inteiro).

Números primos

Números primos são números naturais maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais: o número 1 e o próprio número primo.

• Os 15 primeiros números primos são: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.**

Decomposição em fatores primos

Para decompor um número em fatores primos, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

Existe uma **forma não metodológica** de se obter a decomposição em fatores primos. Essa forma **costuma ser mais rápida** especialmente para números mais simples

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

• Decompor todos os números em fatores primos;

• Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Existe um método prático para determinar o MMC entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**.

Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado.

• Quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que $\boldsymbol{a}$ **é múltiplo** de $\boldsymbol{b}$, podemos eliminar $\boldsymbol{b}$ do cálculo do MMC.

• Se tivermos **N** números e um deles é **múltiplo de todos os outros**, esse número é o **MMC**.

Introdução às frações

$$\frac{a}{b}\quad \begin{matrix} a \longrightarrow \text{Numerador} \\ b \longrightarrow \text{Denominador} \end{matrix}$$

Considere uma fração com um numerador inteiro $\boldsymbol{a}$ e com um denominador inteiro $\boldsymbol{b}$, representada por $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$. Dizemos que a fração é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **não apresentam fatores primos em comum**. Em outras palavras, uma fração $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**.

Para **somar e subtrair** frações, devemos transformar todas as frações em **frações equivalentes com o mesmo denominador**.

Para realizar a **multiplicação de frações**, realiza-se a multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores.

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação.

Para **comparar frações**, devemos encontrar frações equivalentes que apresentem o mesmo denominador.

Problemas envolvendo frações

A palavra "**de**" costuma significar uma **multiplicação**.
Uma forma prática de se **obter o todo a partir da parte** do problema é utilizar o recurso "**inverte e multiplica**".
Dada uma fração $\boldsymbol{a/b}$, a **fração complementar** corresponde a $\boldsymbol{1 - a/b}$.

Quando nos deparamos com problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolvê-los consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**.

Dízima periódica

O **período** é a porção que se repete em uma dízima periódica.

- Um número da forma $\mathbf{0,AAA\ldots = 0,\overline{A}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{A}}{9}$;
- Um número da forma $\mathbf{0,ABABAB\ldots = 0,\overline{AB}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{AB}}{99}$;
- Um número da forma $\mathbf{0,ABCABCABC\ldots = 0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{ABC}}{999}$;
- E assim sucessivamente.

Para dízimas periódicas que fogem desse padrão, devemos modificá-las de modo a deixá-las no formato que conhecemos.

Revisão sobre Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Pessoal, antes de iniciarmos o conteúdo de frações propriamente dito, vamos fazer uma breve **revisão sobre múltiplos**, **números primos**, **decomposição em fatores primos** e **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**). É muito importante que você tenha conhecimento sobre esses assuntos, pois eles serão necessários para que façamos operações com frações.

Caso você já saiba calcular o MMC entre quaisquer números, **fique à vontade para pular esse tópico**.

Múltiplos de um número

Considere o número 7. Os **múltiplos do número 7** são:

$$\mathbf{7} \times 0 = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{7} \times 1 = \mathbf{7}$$
$$\mathbf{7} \times 2 = \mathbf{14}$$
$$\mathbf{7} \times 3 = \mathbf{21}$$
$$\dots$$

Perceba que um número qualquer apresenta infinitos múltiplos. O número 462, por exemplo, é múltiplo de 7, pois:

$$\mathbf{7} \ \times 66 = 462$$

Note que todos os números da forma **A** = **7** × **k** são múltiplos **de 7** (sendo **k** um número inteiro).

Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito pelo produto B** × **k**, sendo **k** um número inteiro.

Tudo certo quanto ao conceito de múltiplos? Ok, agora vamos falar de números primos.

Números primos

Os números primos são números **naturais** maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais:

- O número 1; e
- O próprio número primo.

Isso significa que, se um número natural X é primo, apenas o número 1 e o próprio número X podem dividir X deixando resto zero.

Existem infinitos números primos. É importante que você **DECORE** os 15 primeiros.

ATENÇÃO
DECORE!

Os 15 primeiros números primos são:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Decomposição em fatores primos

Decompor um número qualquer em fatores primos significa **escrevê-lo como um produto de números primos**. Por exemplo, a decomposição em fatores primos do número 60 é:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Para decompor um número em fatores primos, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

Vejamos alguns exemplos:

Decomponha o número 500 em fatores primos

- Ao dividir 500 por 2, obtemos 250.

- Ao dividir 250 por 2, obtemos 125.

- Note que 125 não é mais divisível por 2 (não é par). **Passemos ao 3**.

- Note que 125 não é divisível por 3 (1+2+5 não é divisível por 3). **Passemos ao 5**.

- Ao dividir 125 por 5, obtemos 25.

- Ao dividir 25 por 5, obtemos 5.

- Ao dividir 5 por 5, **obtemos 1**. **Nesse momento, devemos parar as divisões sucessivas.**

$$\begin{array}{r|l} 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 500 em fatores primos é:

$$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$500 = 2^2 \times 5^3$$

Decomponha o número 282 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 282 & 2 \\ 141 & 3 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 282 em fatores primos é:

$$282 = 2 \times 3 \times 47$$

Decomponha o número 3960 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 3960 em fatores primos é:

$$3960 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$$

$$3960 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

Existe uma **forma não metodológica** de se obter a decomposição em fatores primos. Essa forma **costuma ser mais rápida** especialmente para números mais simples. Por exemplo, vamos decompor o número 500. Acompanhe o raciocínio:

$$500 = 5 \times 100$$

$$= 5 \times 10 \times 10$$

$$= 5 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$$

$$= 2^2 \times 5^3$$

Note que usamos o fato de 500 ser facilmente descrito por 5×100 para decompormos o número de uma forma não metodológica.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

O **Mínimo** **Múltiplo** **Comum** (**MMC**) entre **N** números é o **menor** dos **múltiplos** que é comum a todos os números.

Representaremos o **MMC** entre os números $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ por $\text{MMC}\ (a; b; c)$.

Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

- Decompor todos os números em fatores primos; e
- Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Vamos a alguns exemplos:

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50.

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

$$5 = 5^1$$

$$10 = 2^1 \times 5^1$$

$$15 = 3^1 \times 5^1$$

$$20 = 2 \times 10$$
$$= 2^2 \times 5^1$$

$$50 = 5 \times 10$$
$$= 2^1 \times 5^2$$

Devemos selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$5 = 5^1$

$10 = 2^1 \times 5^1$

$15 = 3^1 \times 5^1$

$20 = 2^2 \times 5^1$

$50 = 2^1 \times 5^2$

Logo, $\text{MMC}\,(5; 10; 15; 20; 50) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$.

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50

Vamos decompor os 3 números em fatores primos, selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$21 = 3 \times 7$

$45 = 3^2 \times 5$

$50 = 2 \times 5^2$

Logo, $\text{MMC}\,(21; 45; 50) = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 3150$.

Existe um método prático para determinar o MMC entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**.

Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado.

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

- Ao dividir os números **5**, **10**, **15**, **20** e **50** **por 2**, obtemos **5**, **5**, **15**, **10** e **25**.
- Ao dividir os números **5**, **5**, **15**, **10** e **25** **por 2**, obtemos **5**, **5**, **15**, **5** e **25**.
- Note que nenhum dos números dentre **5**, **5**, **15**, **5** e **25** é divisível por 2. **Passemos ao 3**.
- Ao dividir os números **5**, **5**, **15**, **5** e **25** **por 3**, obtemos **5**, **5**, **5**, **5** e **25**.
- Note que nenhum dos números dentre **5**, **5**, **5**, **5** e **25** é divisível por 3. **Passemos ao 5**.
- Ao dividir os números **5**, **5**, **5**, **5** e **25** **por 5**, obtemos **1**, **1**, **1**, **1** e **5**.
- Ao dividir os números **1**, **1**, **1**, **1** e **5** **por 5**, obtemos **1**, **1**, **1**, **1** e **1**. **Nesse momento, devemos parar a divisão simultânea.**

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{ccccc|c} 5, & 10, & 15, & 20, & 50 & 2 \\ 5, & 5, & 15, & 10, & 25 & 2 \\ 5, & 5, & 15, & 5, & 25 & 3 \\ 5, & 5, & 5, & 5, & 25 & 5 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) é o seguinte produto:

$$\text{MMC }(5; 10; 15; 20; 50) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

$$= 2^2 \times 3 \times 5^2$$

$$= 300$$

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{ccc|c} 21, & 45, & 50 & 2 \\ 21, & 45, & 25 & 3 \\ 7, & 15, & 25 & 3 \\ 7, & 5, & 25 & 5 \\ 7, & 1, & 5 & 5 \\ 7, & 1, & 1 & 7 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) é o seguinte produto:

$$\text{MMC }(21; 45; 50) = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$$

$$= 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

$$= 3150$$

Uma dica importante que pode economizar um certo tempo em prova é a seguinte: quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que $\boldsymbol{a}$ **é múltiplo** de $\boldsymbol{b}$**,** podemos eliminar $\boldsymbol{b}$ do cálculo do MMC.

Vejamos dois exemplos:

Calcule o MMC de 40, 30 e 15

Ao calcular o $\text{MMC}(40; 30; 15)$, perceba que **30** é **múltiplo de 15.** Logo:

$$\text{MMC}(40; \mathbf{30}; \mathbf{15}) = \text{MMC}\ (40; \mathbf{30})$$

Calcular o MMC de 40 e 30 é mais rápido, não é mesmo?

Calcule o MMC de 390, 130 e 75

Ao calcular o $\text{MMC}(390; 130; 75)$, perceba que **390** é **múltiplo de 130**. Logo:

$$\text{MMC}(\mathbf{390}; \mathbf{130}; 75) = \text{MMC}\ (\mathbf{390}; 75)$$

Calcular o MMC de 390 e 75 é mais rápido, não é mesmo?

Perceba que se tivermos **N** números e **um deles é múltiplo de todos os outros**, **esse número é o MMC**.

Calcule o MMC de 3, 6 e 12

Note que 12 é múltiplo de 3 e de 6. Logo:

$$\text{MMC}\ (3; 6; 12) = 12$$

Calcule o MMC de 120, 60 e 15

Note que 120 é múltiplo de 60 e de 15. Logo:

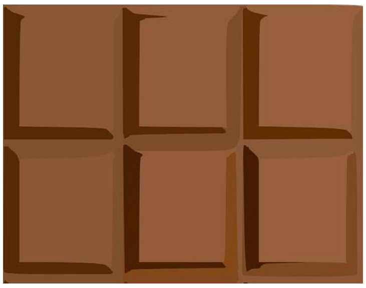
$$\text{MMC}\ (120; 60; 15) = 120$$

Feito! Agora que sabemos calcular o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre quaisquer números, vamos ao conteúdo sobre frações.

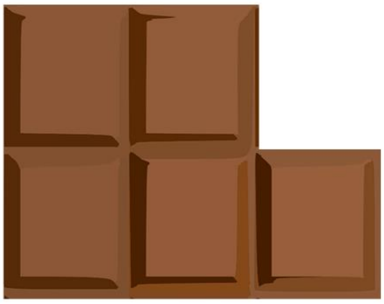
Introdução às frações

Conceitos preliminares

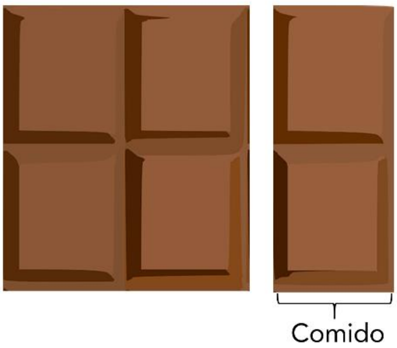
A assimilação plena do conceito de frações é fundamental para se entender diversos outros assuntos de matemática. Para ilustrar a ideia, considere a barra de chocolate a seguir com 6 pedaços.



Comer 5/6 (cinco sextos) da barra de chocolate significa comer 5 dos 6 pedaços. Para o caso em questão, 5/6 representa a seguinte parte que foi comida:

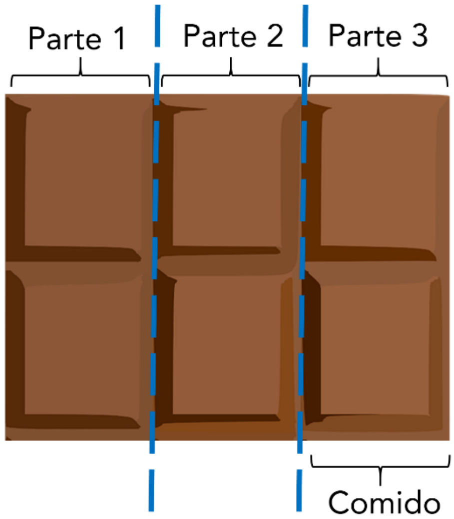


Comer 2/6 (dois sextos) da barra de chocolate significa comer 2 dos 6 pedaços:



E se disséssemos que comemos 1/3 (um terço) da barra de 6 pedaços, o que isso significa? Significa que, a cada três pedaços existentes na barra, comemos um pedaço. Como a nossa barra tem 6 pedaços, 1/3 da nossa barra corresponde a 2 pedaços.

Uma outra forma de se pensar que foi comido 1/3 da barra é dividir a barra em três e comer um desses três pedaços.



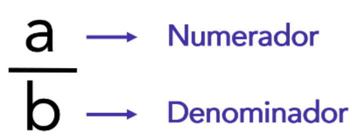
Note, portanto, que dizer que se comeu 2/6 da barra é a mesma coisa do que dizer que se comeu 1/3 da barra. Isso porque **as duas frações são equivalentes**:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Composição básica de uma fração

Uma fração é um número racional que representa uma divisão composta por dois termos:

- O numerador, que representa o dividendo; e
- O denominador, que representa o divisor.



Frações equivalentes e frações irredutíveis

Considere uma fração com um numerador inteiro $\boldsymbol{a}$ e com um denominador inteiro $\boldsymbol{b}$, representada por $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$.

Dizemos que a fração é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **<u>não</u> apresentam fatores primos em comum**.

Em outras palavras, uma fração $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**.

ACORDE!

Uma fração $\frac{a}{b}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**.

Dois números são **primos entre si** quando **não apresentam fatores primos em comum**.

Exemplos:

- $\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{15}}$ é uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ **não apresentam fatores primos em comum** ($\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ **são primos entre si**). Veja que:
  - $\mathbf{14}$ pode ser decomposto como 2×7;
  - $\mathbf{15}$ pode ser decomposto como 3×5;
  - $\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ **não apresentam fatores primos em comum**, pois $\mathbf{14}$ apresenta os fatores primos 2 e 7, já $\mathbf{15}$ apresenta os fatores primos 3 e 5.

- $\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{84}}$ **não é** uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{14}$ e $\mathbf{84}$ apresentam fatores primos em comum ($\mathbf{14}$ e $\mathbf{84}$ não são primos entre si). Veja que:
  - $\mathbf{14}$ pode ser decomposto como $\mathbf{2} \times \mathbf{7}$;
  - $\mathbf{84}$ pode ser decomposto como $\mathbf{2}^2 \times 3 \times \mathbf{7}$;
  - $\mathbf{14}$ e $\mathbf{84}$ apresentam fatores primos em comum: $\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$.

- $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}$ é uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$ **não apresentam fatores primos em comum** ($\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$ **são primos entre si**). Veja que:
  - $\mathbf{2}$ já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número 2;
  - $\mathbf{7}$ já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número 7;
  - $\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$ **não apresentam fatores primos em comum**.

- $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}}$ **não é** uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{3}$ e $\mathbf{6}$ apresentam fatores primos em comum. ($\mathbf{3}$ e $\mathbf{6}$ não são primos entre si). Veja que:
  - $\mathbf{3}$ já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número $\mathbf{3}$;
  - $\mathbf{6}$ pode ser decomposto como $2 \times \mathbf{3}$;
  - $\mathbf{3}$ e $\mathbf{6}$ apresentam um fator primo em comum: $\mathbf{3}$.

Creio que, com esses exemplos, você já entendeu o que é uma fração irredutível e o que são números primos entre si.

Para simplificar uma fração e torná-la irredutível, podemos dividir o numerador e o denominador por um mesmo número inteiro sucessivas vezes até que a divisão não seja mais possível. Exemplo:

$$\frac{84^{\div 2}}{120_{\div 2}} = \frac{42^{\div 2}}{60_{\div 2}} = \frac{21^{\div 3}}{30_{\div 3}} = \frac{7}{10}$$

Veja que, ao obter a fração $\frac{7}{10}$, **não é mais possível dividir o numerador e o denominador por um mesmo número inteiro**. Isso ocorre porque $\mathbf{7}$ e $\mathbf{10}$ **não apresentam fatores primos em comum**. Em outras palavras, $\mathbf{7}$ e $\mathbf{10}$ **são primos entre si**.

Uma outra forma de tornar uma fração irredutível é decompor o numerador e o denominador em fatores primos e "simplificar" os fatores comuns. Exemplo:

$$\frac{84}{120} = \frac{\cancel{2}^{2}.\cancel{3}.7}{\cancel{2}^{3}_{\;2^1}.\cancel{3}.5} = \frac{7}{2.5} = \frac{7}{10}$$

Veja que não necessariamente precisamos decompor em fatores primos para simplificar a fração. Podemos também transformar o numerador em produtos "convenientes" para assim realizar a simplificação.

$$\frac{84}{120} = \frac{\cancel{12}.7}{\cancel{12}.10} = \frac{7}{10}$$

Duas **frações são ditas equivalentes quando representam o mesmo número**, ou seja, quando são iguais. No exemplo anterior, $\frac{84}{120}$, $\frac{42}{60}$, $\frac{21}{30}$ e $\frac{7}{10}$ são equivalentes, pois:

$$\frac{84}{120} = \frac{42}{60} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

(Pref. Sto. Augusto/2020) Ao simplificar a fração $\frac{12}{36}$ obtém-se:

a) 1/6

b) 1/3

c) 1/2

d) 1/4

e) 1/5

Comentários:

Podemos representar o denominador da fração como 3×12

$$\frac{12}{36} = \frac{\mathbf{12}}{3 \times \mathbf{12}}$$

Simplificando o número **12**, obtém-se:

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Gabarito: Letra B.

Soma e subtração de frações

Para somar e subtrair frações, devemos transformar todas as frações em **frações equivalentes** de modo que todas elas apresentem **o mesmo denominador**.

Para que todas as frações tenham o mesmo denominador, devemos obter o **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) **de todos os denominadores**. Exemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{10}$$

O Mínimo Múltiplo Comum dos denominadores é $\text{MMC}\ (3;\ 5; 10)\ =\ 30$. Logo, os denominadores das três frações devem ser 30. Para acharmos os numeradores, devemos determinar as frações equivalentes cujo denominador é 30.

$$\frac{2}{3}=\frac{(30\div 3)\times 2}{30}=\frac{10\times 2}{30}=\frac{20}{30}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{(30\div 5)\times 1}{30}=\frac{6\times 1}{30}=\frac{6}{30}$$

$$\frac{7}{10}=\frac{(30\div 10)\times 7}{30}=\frac{3\times 7}{30}=\frac{21}{30}$$

ESCLARECENDO!

> Uma forma prática de obter essas frações equivalentes de denominador 30 é realizar o seguinte procedimento:
>
> $\frac{2}{3}=\frac{?}{30}$ — 30 ÷ 3 = 10; 10 x 2 = 20; = 20
>
> $\frac{1}{5}=\frac{?}{30}$ — 30 ÷ 5 = 6; 6 x 1 = 6; = 6
>
> $\frac{7}{10}=\frac{?}{30}$ — 30 ÷ 10 = 3; 3 x 7 = 21; = 21

Voltando ao problema, temos:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{10}$$

$$=\frac{20}{30}+\frac{6}{30}+\frac{21}{30}$$

$$=\frac{20+6+21}{30}$$

$$= \frac{47}{30}$$

Para realizar uma subtração de frações, devemos realizar o mesmo procedimento. Suponha que devemos realizar a seguinte subtração:

$$\mathbf{\frac{44}{60} - \frac{20}{30}}$$

O Mínimo Múltiplo Comum dos denominadores é $\text{MMC}\ (30;\ 60) = \ 60$. Ficamos com as seguintes frações equivalentes com denominador 60:

$$\mathbf{\frac{44}{60} - \frac{40}{60}}$$

$$= \frac{44 - 40}{60}$$

$$= \frac{4}{60}$$

No caso em questão, **podemos tornar a fração 4/60 irredutível**. Se dividirmos o numerador e o denominador por 4 (ou seja, se dividirmos duas vezes por 2), obtemos:

$$\frac{1}{15}$$

(PC RJ/2022) Considere a soma

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10} = \frac{a}{b}$$

sendo os números naturais a e b primos entre si.

O valor da soma $a + b$ é:

a) 35;

b) 47;

c) 181;

d) 227;

e) 269.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma das frações do lado esquerdo da equação.

Para realizar a soma, devemos representar as frações por meio de **frações equivalentes** com um **mesmo denominador**. O **menor denominador comum possível** para realizar a soma é o **MMC entre 6**, **8** e **10**. Decompondo esses números em fatores primos, temos:

$$6 = 2 \times 3$$

$$8 = 2^3$$

$$10 = 2 \times 5$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$6 = 2 \times 3$

$8 = 2^3$

$10 = 2 \quad \times 5$

Logo, $\text{MMC}(6; 8; 10) = 2^3 \times 3 \times 5 = \mathbf{120}$.

Portanto:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10}$$

$$= \frac{(120 \div 6) \times 1}{\mathbf{120}} + \frac{(120 \div 8) \times 3}{\mathbf{120}} + \frac{(120 \div 10) \times 7}{\mathbf{120}}$$

$$= \frac{20}{\mathbf{120}} + \frac{45}{\mathbf{120}} + \frac{84}{\mathbf{120}}$$

$$= \frac{20 + 45 + 84}{\mathbf{120}}$$

$$= \frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$$

Segundo o enunciado, temos que a soma das frações, dada por $\frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$, **é igual a** $\frac{a}{b}$, sendo $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **números naturais primos entre si**. Consequentemente:

- $\frac{a}{b}$ é uma **fração equivalente** a $\frac{149}{120}$, pois $\frac{149}{120} = \frac{a}{b}$.
- $\frac{a}{b}$ é uma **fração irredutível**, pois a e b são números naturais primos entre si.

Devemos, portanto, obter a fração irredutível equivalente a $\frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$.

Veja que:

$$120 = 10 \times 12$$

$$= (2 \times 5) \times (3 \times 4)$$

$$= (2 \times 5) \times (3 \times 2^2)$$

$$= 2^3 \times 3 \times 5$$

Logo, **o número $\mathbf{120}$ apresenta os fatores primos $\mathbf{2, 3}$ e $\mathbf{5}$**.

Ao tentar dividir 149 por 2, 3 e 5, percebe-se que sempre temos um resto. Isso significa que $\mathbf{120}$ e $\mathbf{149}$ **não apresentam fatores primos em comum**.

Assim, $\mathbf{120}$ e $\mathbf{149}$ **são primos entre si**.

Consequentemente, a fração irredutível $\frac{a}{b}$ é a própria fração $\frac{149}{120}$. Logo:

$$a = 149$$

$$b = 120$$

Portanto:

$$a + b = 149 + 120$$

$$= 269$$

Gabarito: Letra E.

(MANAUSPREV/2015) Considere as expressões numéricas, abaixo.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

O valor, aproximado, da soma entre A e B é

a) 2.

b) 3.

c) 1.

d) 2,5.

e) 1,5.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma para A.

Note que os denominadores 2, 4, 8, 16 e 32 são potências de 2. Como **32 é múltiplo de todos os outros números**, o **MMC entre os números é 32**.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{16}{\mathbf{32}} + \frac{8}{\mathbf{32}} + \frac{4}{\mathbf{32}} + \frac{2}{\mathbf{32}} + \frac{1}{\mathbf{32}}$$

$$= \frac{16 + 8 + 4 + 2 + 1}{\mathbf{32}}$$

$$= \frac{31}{32}$$

Vamos agora realizar a soma para B.

Perceba que os denominadores 3, 9, 27, 81 e 243 são potências de 3. Como **243 é múltiplo de todos os outros números**, o **MMC entre os números é 243**.

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

$$= \frac{81}{\mathbf{243}} + \frac{27}{\mathbf{243}} + \frac{9}{\mathbf{243}} + \frac{3}{\mathbf{243}} + \frac{1}{\mathbf{243}}$$

$$= \frac{81 + 27 + 9 + 3 + 1}{\mathbf{243}}$$

$$= \frac{121}{243}$$

A soma entre A e B é:

$$A + B = \frac{31}{32} + \frac{121}{243}$$

Note que $\frac{31}{32}$ é aproximadamente $\frac{32}{32}$. Logo:

$$\frac{31}{32} \approx \frac{32}{32} = 1$$

Além disso, $\frac{121}{243}$ é aproximadamente $\frac{121}{242}$. Logo:

$$\frac{121}{243} \approx \frac{121}{242} = 0{,}5$$

Portanto, a soma de A e B é, aproximadamente:

$$A + B \approx 1 + 0{,}5$$

$$= 1{,}5$$

Gabarito: Letra E.

Multiplicação e divisão de frações

Para realizar a **multiplicação de frações**, realiza-se a multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores, obtendo-se a fração resultante:

$$\frac{3}{4} \times \frac{20}{9} = \frac{3 \times 20}{4 \times 9} = \frac{60}{36}$$

Veja que, no exemplo em questão, a fração obtida não é irredutível. Uma forma mais rápida de se obter a fração irredutível é simplificar a expressão antes mesmo de realizar a multiplicação.

No exemplo a seguir:

- Os números **20** e **4** são simplificados pelo número 4, obtendo-se, respectivamente, **5** e **1**;
- Os números **3** e **9** são simplificados pelo número 3, obtendo-se, respectivamente, **1** e **3**.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{5}{3}$$

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$\frac{3}{4} \div \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}} = \frac{3}{4} \times \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{5}{3}$$

$$= \frac{5}{3}$$

Veja este outro exemplo:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}}} = \frac{3}{2} \times \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}$$

Simplificando 3 e 9 por 3, temos:

$$\frac{1}{2} \times \frac{20}{3}$$

Simplificando 2 e 20 por 2, temos:

$$\frac{1}{1} \times \frac{10}{3}$$

$$= \frac{10}{3}$$

(TRF 4/2014) O número que corresponde ao resultado da expressão numérica

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{4}$$

é igual a

a) 5/9.

b) 13/36.

c) 3.

d) 1.

e)7/18.

Comentários:

Temos a seguinte expressão numérica:

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{9}\times\frac{9}{4}$$

Veja que:

- No primeiro produto, $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$, podemos simplificar 2 e 4 pelo número 2, obtendo-se $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$;
- No segundo produto, $\frac{5}{6}\times\frac{7}{10}$, podemos simplificar 5 e 10 pelo número 5, obtendo-se $\frac{1}{6}\times\frac{7}{2}$; e
- No terceiro produto, $\frac{1}{9}\times\frac{9}{4}$, podemos simplificar 9 e 9 pelo número 9, obtendo-se $\frac{1}{1}\times\frac{1}{4}$.

Ficamos com:

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{7}{2}+\frac{1}{1}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{7}{12}+\frac{1}{4}$$

O **MMC** entre os denominadores **4**, **6** e **12** é **12**. Logo:

$$\frac{2}{\mathbf{12}}+\frac{7}{\mathbf{12}}+\frac{3}{\mathbf{12}}$$

$$=\frac{2+7+3}{\mathbf{12}}$$

$$=\frac{12}{12}$$

$$=1$$

Gabarito: Letra D.

A questão a seguir é relativamente complicada. Logo, não se assuste caso não consiga resolver. Inseri essa questão aqui para, aos poucos, perdermos o medo de frações.

(ALERN/2013) Sendo x e y números racionais positivos, definiremos a operação denotada por □ da seguinte forma:

$$x\square y=\frac{x}{x+\frac{x}{y}}$$

Por exemplo, fazendo os cálculos verifica-se que 5□1/2, em fração irredutível, é igual a 1/3. De acordo com essa operação que acaba de ser definida, para qualquer número racional positivo representado por x temos que $x\,\square 1/3$ será igual a a)2/3.

b)1/2.

c)1/5.

d)1/4.

e)2/5.

Comentários:

Segundo o enunciado, a operação $x\square y$ é dada por:

$$x\square y = \frac{x}{\boldsymbol{x + \frac{x}{y}}}$$

O denominador $\boldsymbol{x + \frac{x}{y}}$ pode ser entendido como $\boldsymbol{\frac{x}{1} + \frac{x}{y}}$.

Realizando o **MMC** entre $\mathbf{1}$ e $\boldsymbol{y}$, obtém-se y. Ao realizar a soma das frações, ficamos com $\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}$. Logo:

$$x\square y = \frac{x}{\boldsymbol{\frac{x.y + x}{y}}}$$

Veja que $x\square y$ é uma fração cujo numerador é x e o denominador é uma outra fração, dada por $\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}$. Temos, portanto, a divisão de x por $\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}$. Para realizar a divisão, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$x\square y = x \times \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x.y + x}}$$

Note que, em $\boldsymbol{x.y + x}$, podemos colocar o x em evidência. Ficamos com $\boldsymbol{x \times (y + 1)}$. Logo:

$$x\square y = x \times \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x \times (y + 1)}}$$

A partir do resultado obtido, podemos simplificar x. Ficamos com:

$$x\square y = \frac{y}{y + 1}$$

Logo, a operação $x\square y$ independe de x e equivale a $\frac{y}{y+1}$.

Para o caso em questão, $x\,\square 1/3$ é dado por:

$$x\,\square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}$$

$$x\,\square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+3}{3}}$$

$$x\,\square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}$$

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$x\,\square 1/3 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$x\,\square 1/3 = \frac{1}{4}$$

Gabarito: Letra D.

Comparação de frações

Para compararmos frações, ou seja, para descobrir se uma fração é maior ou menor do que outra, devemos escrevê-las sob um mesmo denominador. Isso significa que, para todas as frações que serão objeto de comparação, devemos encontrar **frações equivalentes** **que apresentem o mesmo denominador**.

Outra forma válida de comparar frações é realizar a divisão do numerador pelo denominador, comparando-se os números decimais encontrados. Veja o exemplo a seguir:

(Pref. Salvador/2017) Considere as frações: $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{3}{10}$, $c = \frac{7}{20}$.

A ordem crescente dessas frações é

a) a, b, c.

b) b, a, c.

c) c, a, b.

d) b, c, a.

e) c, b, a.

Comentários:

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) entre os denominadores das frações $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, e $\boldsymbol{c}$ é **20**. Isso porque os denominadores 5 e 10 são múltiplos do denominador 20.

As frações equivalentes com denominador 20 são:

$$a = \frac{2}{5} = \frac{8}{\mathbf{20}} \qquad b = \frac{3}{10} = \frac{6}{\mathbf{20}} \qquad c = \frac{7}{\mathbf{20}}$$

Temos, portanto, que a ordem crescente das frações é $\frac{6}{\mathbf{20}}, \frac{7}{\mathbf{20}}, \frac{8}{\mathbf{20}}$. Logo, a ordem crescente das frações do enunciado é $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$. O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Outra forma de se comparar as frações é realizar a divisão do numerador pelo denominador:

$$a = \frac{2}{5} = 0{,}4 \qquad b = \frac{3}{10} = 0{,}3 \qquad c = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

Novamente, encontramos que a ordem crescente das frações do enunciado é $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$.

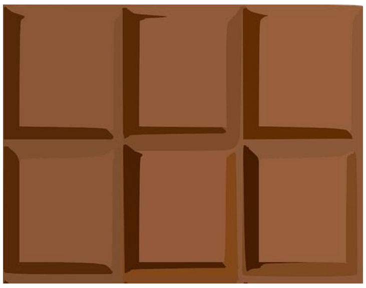
Gabarito: Letra D.

Problemas envolvendo frações

O uso da palavra "de"

Uma palavra muito importante que deve ser observada quando se resolve problemas envolvendo frações é a palavra "**de**". Isso porque essa palavra nos indica uma **multiplicação**.

Considere novamente uma barra de chocolate de 6 pedaços:



Para essa barra de chocolate, 1/3 **de** 6 pedaços corresponde a:

$$\frac{1}{3} \ \mathbf{de} \ 6 \text{ pedaços}$$

$$= \frac{1}{3} \times 6 \text{ pedaços}$$

$$= \frac{6}{3} \text{ pedaços}$$

$$= 2 \text{ pedaços}$$

Agora, vamos supor que João tem direito a 1/3 dessa barra **de** 6 pedaços e que, **da** parte de João, Maria comeu a metade (1/2). Quantos pedaços Maria comeu? Maria comeu 1/2 **de** 1/3 **de** 6 pedaços:

$$\frac{1}{2} \textbf{ de } \frac{1}{3} \textbf{ de } 6 \text{ pedaços}$$

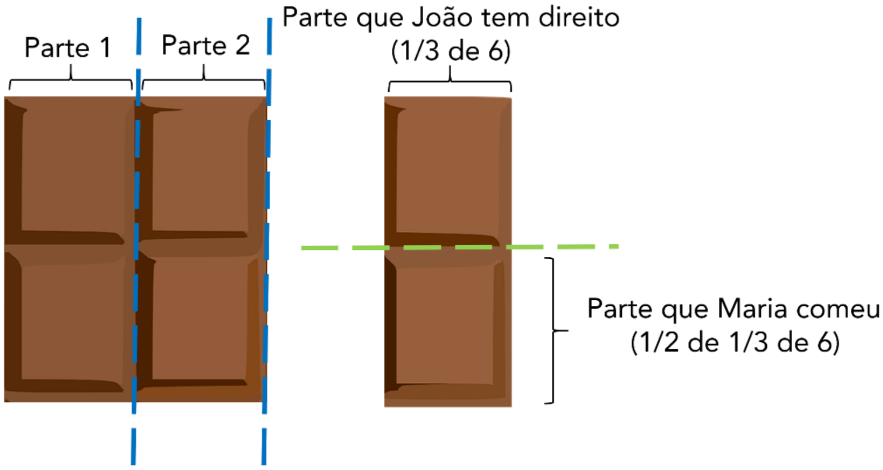
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 6 \text{ pedaços}$$

$$= \frac{1 \times 1 \times 6}{2 \times 3}$$

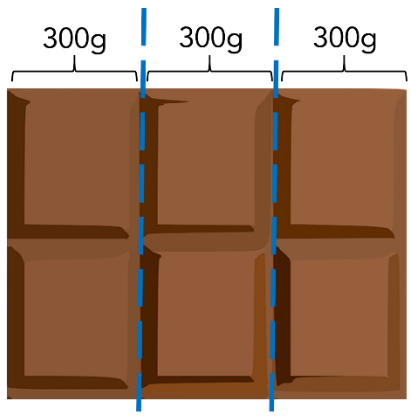
$$= \frac{6}{6}$$

$$= 1 \text{ pedaço}$$

Observe a figura abaixo, que representa a parte que Maria comeu:



E se disséssemos que essa barra de chocolate tem 900 gramas, quantos gramas temos em 1/3 dessa barra? Para resolver o problema, basta observar que, ao dividirmos a barra em 3 partes de 300 gramas, temos que a barra toda tem justamente 3 × 300g = 900g. Logo, 1/3 da barra apresenta 300 gramas.



Uma outra forma de se obter o resultado é trocar o "**de**" pela **multiplicação**:

$$\frac{1}{3}\ \textbf{de}\ 900\text{g}$$

$$= \frac{1}{3} \times 900\text{g}$$

$$= \frac{900\text{g}}{3}$$

$$= 300\text{g}$$

(AVAREPREV/2020) Uma empresa tem 120 funcionários, entre homens e mulheres. Se 2/5 desses funcionários são mulheres, é correto afirmar que o número de mulheres é igual a

a) 36.

b) 48.

c) 60.

d) 72.

Comentários:

São mulheres 2/5 **de** 120 funcionários.

$$\frac{2}{5}\ \textbf{de}\ 120$$

$$= \frac{2}{5} \times 120$$

$$= 2 \times \frac{120}{5}$$

$$= 2 \times 24$$

$$= 48$$

Gabarito: Letra B.

(Pref. Angra/2019) A família de Flávio pediu uma pizza, que veio dividida em 8 fatias iguais. Flávio comeu uma fatia inteira e dividiu uma outra fatia igualmente com sua irmã.

Da pizza inteira Flávio comeu

a) 1/4.

b) 1/3.

c) 3/8.

d) 1/6.

e) 3/16.

Comentários:

Uma fatia da pizza corresponde a $\frac{1}{8}$ da pizza. Flávio comeu uma fatia mais a metade de outra fatia. Ao comer metade da outra fatia, Flávio comeu $\frac{1}{2}$ **de** $\frac{1}{8}$ da pizza.

Isso significa que Flávio comeu ao todo:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ \textbf{de}\ \frac{1}{8}\text{ da pizza}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\text{ da pizza}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\text{ da pizza}$$

$$=\frac{2}{16}+\frac{1}{16}\text{ da pizza}$$

$$=\frac{2+1}{16}\text{ da pizza}$$

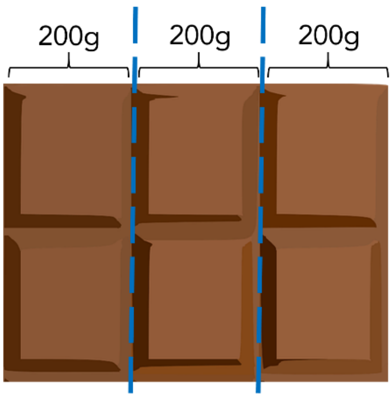
$$=\frac{3}{16}\text{ da pizza}$$

Gabarito: Letra E.

Obtenção do todo a partir da parte

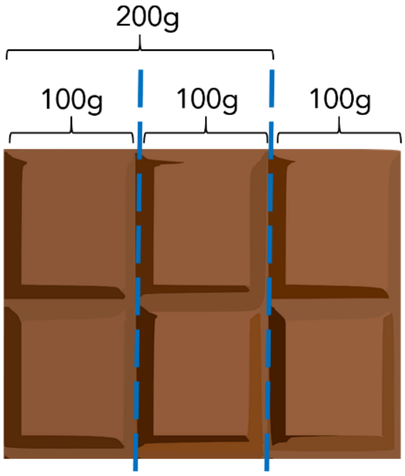
Se disséssemos que 1/3 de uma barra de chocolate tem 200g, quantos gramas tem a barra de chocolate inteira? Para se responder essa pergunta, basta observar que, se uma parte de 3 tem 200g, as três partes que compõem o todo da barra têm:

$$3\times 200\text{g} = 600\text{g}$$



E se disséssemos que 2/3 da barra tem 200g, quantos gramas tem a barra de chocolate inteira? **Ora, se 2 partes de 3 tem 200g, 1 parte de 3 tem 100g**. **Logo, as três partes** que compõem o todo devem ter:

$$3\times 100\text{g} = \mathbf{300g}$$



Uma **forma prática de se obter o todo a partir da parte** do problema é **utilizar o recurso** "**inverte e multiplica**".

Veja que, se 2/3 corresponde a 200g, podemos obter o todo invertendo a fração e multiplicando pelo valor que representa a parte (200g):

$$\frac{3}{2} \times 200\text{g}$$

$$= 3 \times \frac{\mathbf{200g}}{\mathbf{2}}$$

$$= \mathbf{3 \times 100g}$$

$$= 300\text{g}$$

Por que esse recurso funciona? Perceba que, ao "inverter e multiplicar" a fração 2/3 que corresponde à parte, na verdade **estamos dividindo o valor de 200g por 2, obtendo o valor de uma parte de 3 (100g),** para em seguida **multiplicar essa terça parte por 3, obtendo assim o valor do todo (300g).**

(MPE BA/2017) Em certo reservatório, $\frac{2}{3}$ do volume de água correspondem a 120 litros.

Portanto, $\frac{3}{2}$ do volume de água desse mesmo reservatório correspondem a:

a) 270 litros;

b) 240 litros;

c) 210 litros;

d) 180 litros;

e) 150 litros.

Comentários:

Uma **forma prática de se obter o todo a partir da parte** do problema é **utilizar o recurso** "**inverte e multiplica**".

Se 2/3 correspondem a 120 litros, a **capacidade total** do reservatório é:

$$\frac{3}{2} \times 120$$

$$= 3 \times \frac{120}{2}$$

$$= 3 \times 60$$

$$= 180 \text{ litros}$$

Note que a questão **não nos pede a capacidade total** do reservatório, mas sim **3/2 da capacidade**.

$$\frac{3}{2} \textbf{ de } 180 \text{ litros}$$

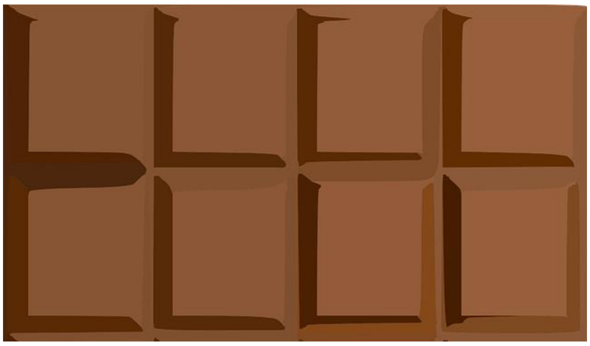
$$= \frac{3}{2} \times 180$$

$$= 270 \text{ litros}$$

Gabarito: Letra A.

Obtenção da fração complementar

Observe a seguinte barra com 8 pedaços de chocolate.



Se comermos 5/8 da barra, **qual fração da barra original ainda resta**?

Note que a parte que **não foi comida** é dada pela **subtração de 5/8 da barra inteira**. A barra inteira pode ser representada por 8/8 (8 pedaços de um total de 8 pedaços) ou então pelo número inteiro 1. Logo, a parte que não foi comida é:

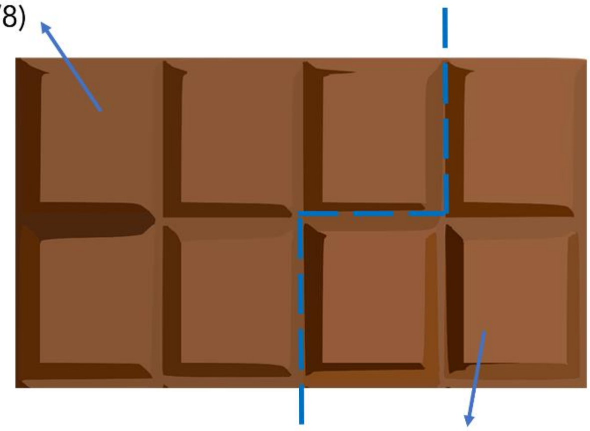
$$1 - \frac{5}{8}$$

$$= \frac{8}{8} - \frac{5}{8}$$

$$= \frac{8-5}{8}$$

$$= \frac{3}{8}$$

Note que, para a barra em questão, o que restou após se comer 5/8 é justamente 3 pedaços de 8 (3/8):



Podemos dizer, então, que dada uma fração $\frac{a}{b}$, a **fração complementar** corresponde a:

$$1 - \frac{a}{b} =$$

$$\frac{b}{b} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$$

(IBGE/2019) Marlene comeu, inicialmente, um quarto da barra de chocolate que comprou. Depois, comeu um terço do que tinha sobrado.

A fração da barra de chocolate que Marlene ainda tem para comer é:

a) 1/2;

b) 1/3;

c) 1/4;

d) 3/4;

e) 1/12.

Comentários:

Inicialmente, Marlene **comeu $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate**.

O total da barra que restou corresponde à fração complementar a $\frac{1}{4}$:

$$1 - \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{3}{4}} \textbf{ da barra}$$

Depois, ao comer $\frac{1}{3}$ **do que tinha sobrado**, Marlene comeu:

$$\frac{1}{3}\ \mathbf{de}\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\ \mathbf{da\ barra}$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\ \mathbf{da\ barra}$$

$$=\frac{1}{4}\ \text{da barra}$$

O total da barra de chocolate que Marlene comeu nas duas vezes foi:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{2}{4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

Como ela comeu no total $\frac{1}{2}$ da barra, a quantidade que restou corresponde à fração complementar a $\frac{1}{2}$:

$$1-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\ \text{da barra}$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Cananéia/2020) Mauro comprou um carro. Deu $\frac{1}{3}$ do valor total como entrada e financiou $\frac{3}{4}$ do valor restante. A quantia que falta para completar o valor total será paga em uma única parcela, após o término do financiamento. O valor dessa parcela final corresponde, do valor total do carro, a

a)1/8

b)1/6

c)1/5

d)1/4

e)1/3

Comentários:

Como Mauro deu $\frac{1}{3}$ do valor total como entrada, o **valor restante após a entrada** é a fração complementar a $\frac{1}{3}$:

$$1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3-1}{3}$$

$$= \mathbf{\frac{2}{3}}$$

Como Mauro **financiou $\frac{3}{4}$** **do valor restante após a entrada**, **ele financiou $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$**.

Isso significa que ele **não financiou $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$**, pois a fração complementar de $\frac{3}{4}$ é:

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Logo, a quantia **não financiada** do valor restante após a entrada, que corresponde à parcela final, corresponde a:

$$\frac{1}{4} \ \mathbf{de} \ \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

Simplificando 2 e 4 por 2, temos:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Gabarito: Letra B.

Vamos agora resolver algumas questões a mais sobre problemas envolvendo frações.

(Pref. B dos Coqueiros/2020) No início de determinado mês, uma escola tinha um estoque de 720 kg de alimentos. Nas três primeiras semanas desse mês, foram consumidos, respectivamente, 1/6, 5/24 e 1/5 desse estoque de alimentos.

Considerando essa situação hipotética, assinale a opção que apresenta a quantidade de alimentos restante nesse estoque logo após essas três semanas.

a) 144 kg

b) 180 kg

c) 210 kg

d) 306 kg

e) 414 kg

Comentários:

A fração que corresponde ao total de alimentos consumidos é:

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{24}+\frac{1}{5}$$
$$=\frac{20}{120}+\frac{25}{120}+\frac{24}{120}$$
$$=\frac{69}{120}$$

A fração que corresponde ao total de alimentos **não consumidos** é dada pela **fração complementar** a $\frac{69}{120}$:

$$1-\frac{69}{120}$$
$$=\frac{120-69}{120}$$
$$=\frac{51}{120}$$

O total de alimentos não consumidos é dado por:

$$\frac{51}{120}\ \textbf{de}\ 720\ \text{kg}$$
$$=\frac{51}{120}\times 720$$
$$=51\times\frac{720}{120}$$
$$=51\times 6$$
$$=306\ \text{kg}$$

Gabarito: Letra D.

(TRF 4/2019) Um ciclista pedalou durante três horas. Na primeira hora percorreu $\frac{5}{18}$ do trajeto, na segunda hora percorreu $\frac{7}{25}$ do trajeto e na terceira hora percorreu $\frac{11}{45}$ do trajeto. A fração do trajeto que falta percorrer é

a) $\frac{361}{460}$

b) $\frac{351}{460}$

c) $\frac{89}{450}$

d) $\frac{99}{450}$

e) $\frac{250}{460}$

Comentários:

O total do trajeto percorrido pelo ciclista é dado pela seguinte soma:

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{25}+\frac{11}{45}$$

Para realizar a soma, devemos representar as frações por meio de **frações equivalentes** com um **mesmo denominador**. O **menor denominador comum possível** para realizar a soma é o **MMC entre 18**, **25** e **45**. Decompondo esses números em fatores primos, temos:

$$18 = 2 \times 9$$
$$= 2 \times 3^2$$

$$25 = 5 \times 5$$
$$= 5^2$$

$$45 = 9 \times 5$$
$$= 3^2 \times 5$$

Devemos selecionar <u>todos</u> os fatores primos obtidos com os <u>maiores expoentes</u> e realizar o produto.

$18 = \ 2 \times 3^2$

$25 = \qquad\qquad 5^2$

$45 = \qquad 3^2 \times 5$

Logo, $\text{MMC}\ (18,25,45) = 2 \times 3^2 \times 5^2 = \mathbf{450}$

Portanto, a soma que corresponde à fração do **trajeto percorrido** é:

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{25}+\frac{11}{45}$$

$$= \frac{125}{\mathbf{450}} + \frac{126}{\mathbf{450}} + \frac{110}{\mathbf{450}}$$

$$= \frac{125 + 126 + 110}{\mathbf{450}}$$

$$= \frac{361}{450}$$

O trajeto **não percorrido** pedido pela questão é dado pela **fração complementar** a $\frac{361}{450}$:

$$1 - \frac{361}{450}$$

$$= \frac{450}{450} - \frac{361}{450}$$

$$= \frac{450 - 361}{450}$$

$$= \frac{89}{450}$$

Gabarito: Letra C.

Quando nos deparamos com problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolvê-los consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**. Esse recurso será utilizado com frequência na resolução dos exercícios. Vejamos:

(PC AM/2022) Geraldo resolveu se desfazer de sua coleção de miniaturas. Assim, ele deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson; das que sobraram, ele deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson e as 48 restantes ele deu para sua irmã Glória.

O número de miniaturas que Gilson recebeu foi

a) 12.

b) 16.

c) 18.

d) 24.

e) 48.

Comentários:

Considere que o total de miniaturas de Geraldo seja M.

"...ele (Geraldo) deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson..."

Note que o total de miniaturas que ficou com Gerson é:

$$(\text{Miniaturas Gerson}) = \frac{2}{5} \text{ de } M$$

$$= \frac{2}{5} \times M$$

$$= \frac{2}{5}M$$

"...das que sobraram, ele (Geraldo) deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson..."

Após a distribuição para Gerson, o total de miniaturas que sobraram foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson})$$

$$= M - \frac{2}{5}M$$

$$= \frac{5M - 2M}{5}$$

$$= \mathbf{\frac{3}{5}M}$$

<u>**Desse total que restou**</u>, $\frac{1}{3}$ ficou com o Gilson. Logo, o número de miniaturas que ficaram com Gilson foi:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{3} \text{de} \, \mathbf{\frac{3}{5}M}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}M$$

$$= \frac{1}{5}M$$

"...e as 48 restantes ele (Geraldo) deu para sua irmã Glória..."

O número de miniaturas que restou para Glória foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson}) - (\text{Miniaturas Gilson})$$

$$M - \frac{2}{5}M - \frac{1}{5}M$$

$$= \frac{5M - 2M - 1M}{5}$$

$$= \frac{2}{5}M$$

Esse número de miniaturas corresponde a 48. Logo:

$$\frac{2}{5}M = 48$$

$$M = \frac{48 \times 5}{2}$$

$$M = 120$$

Portanto, **o total de miniaturas é 120**. Queremos obter o número de miniaturas que ficaram com Gilson:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{5}M$$

$$= \frac{1}{5} \times 120$$

$$\mathbf{= 24}$$

Gabarito: Letra D.

(SSP AM/2022) Os alunos de uma turma estavam se preparando para um concurso. Constatou-se que: a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC, a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM, e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol.

O número de alunos dessa turma que torcem pelo Manaus FC é

a) 21.

b) 25.

c) 26.

d) 28.

e) 35.

Comentários:

Considere que o total de alunos da turma seja A.

"...a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Manaus FC é:

$$(\text{Manaus FC}) = \frac{1}{3}\,\mathbf{de}\ \text{A}$$

$$= \frac{1}{3} \times \text{A}$$

$$= \frac{1}{3}\text{A}$$

"...a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Nacional-AM é:

$$(\text{Nacional-AM}) = \frac{1}{4}\,\textbf{de}\ \text{A}$$

$$= \frac{1}{4} \times \text{A}$$

$$= \frac{1}{4}\text{A}$$

"...e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol."

O número de alunos restantes é:

$$(\text{Total de alunos}) - (\text{Manaus FC}) - (\text{Nacional-AM})$$

$$A - \frac{1}{3}A - \frac{1}{4}A$$

$$= \frac{12A - 4A - 3A}{12}$$

$$= \frac{5A}{12}$$

Esse número de alunos corresponde a 35. Logo:

$$\frac{5A}{12} = 35$$

$$A = 35 \times \frac{12}{5}$$

$$A = 84$$

Portanto, **o total de alunos é 84**. Queremos obter o número de alunos que torcem pelo Manaus FC:

$$(\text{Manaus FC}) = \frac{1}{3}A$$

$$= \frac{1}{3} \times 84$$

$$= 28$$

Gabarito: Letra D.

Dízima periódica

Definição e representação

Uma dízima periódica ocorre quando, ao realizar uma divisão, obtém-se um número com casas decimais que se repetem indefinidamente.

Exemplo: Ao realizar a divisão de 23 por 99, obtém-se o número "0,23232323...". Note que que a porção "23" se repete indefinidamente. Nesse caso, dizemos que 23 é o período da dízima periódica "0,23232323...". Isso significa que **o período é a porção que se repete na dízima periódica**.

Podemos **representar uma dízima periódica com um traço sobre o período**. Isto é:

$$0{,}23232323\ldots = 0{,}\overline{23}$$

A dízima periódica "5,77898989..." apresenta o período "89", pois esta é a porção que se repete indefinidamente. Podemos representar essa dízima periódica da seguinte forma:

$$5{,}77898989\ldots = 5{,}77\overline{89}$$

Transformação da dízima periódica em fração

Os principais problemas relacionados às dizimas periódicas consistem em transformar o número em uma fração. Para realizar essa transformação, a única coisa que você precisa se lembrar é que:

- Um número na forma $\mathbf{0,AAA}\ldots = \mathbf{0,\overline{A}}$ corresponde a $\frac{\text{A}}{9}$;
- Um número na forma $\mathbf{0,ABABAB}\ldots = \mathbf{0,\overline{AB}}$ corresponde a $\frac{AB}{99}$;
- Um número na forma $\mathbf{0,ABCABCABC}\ldots = \mathbf{0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{ABC}{999}$;
- E assim sucessivamente.

$\mathbf{0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{ABC}{999}$

Vamos a alguns exemplos.

Transforme 0,3333.... em uma fração

$$0{,}3333\ldots = 0,\overline{3} = \frac{3}{9}$$

Transforme 0,45454545... em uma fração

$$0{,}4545\ldots = 0,\overline{45} = \frac{45}{99}$$

Transforme 0,672346723467234... em uma fração

$$0{,}672346723467234\ldots = 0,\overline{67234} = \frac{67234}{99999}$$

Para dízimas periódicas que fogem desse padrão, devemos modificá-las de modo a deixá-las no formato que conhecemos. Vejamos:

Transforme 0,553333... em uma fração

Veja que o período da dízima periódica é 3. Vamos separar 0,55 do restante do número:

$$0{,}55\overline{3} = 0{,}55 + \mathbf{0,00\overline{3}}$$

Note que ainda não podemos transformar a parte que apresenta o período em uma fração. Devemos escrevê-la de uma outra forma:

$$= 0{,}55 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}} \times \mathbf{0,\overline{3}}$$

Agora sim temos $0,\overline{3}$. Esse número corresponde a 3/9.

$$= 0{,}55 + \frac{1}{100} \times \frac{3}{9}$$

$$= \frac{55}{100} + \frac{3}{900}$$

$$= \frac{9 \times 55 + 3}{900}$$

$$= \frac{498}{900}$$

Transforme 6,453121212... em uma fração

Devemos realizar o mesmo procedimento, separando a parte que não se repete do período da dízima periódica.

$$6{,}453\overline{12}\ldots = 6{,}453 + 0{,}000\overline{12}$$

$$= 6{,}453 + \frac{1}{1000} \times 0,\overline{12}$$

$$= 6{,}453 + \frac{1}{1000} \times \frac{12}{99}$$

$$= \frac{6453}{1000} + \frac{12}{99000}$$

$$= \frac{99 \times 6453 + 12}{99000}$$

$$= \frac{638859}{99000}$$

Uma decorrência interessante sobre a dízima periódica é que 0,999... é igual a 1. Não se trata de uma aproximação. Os números são exatamente iguais.

$$0{,}999\ldots = 0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Vamos resolver algumas questões.

(DPE RS /2017) Sabendo que o número decimal F é 0,8666 ... , que o número decimal G é 0,7111 ... e que o número decimal H é 0,4222 ... , então, o triplo da soma desses três números decimais, F, G e H, é igual a

a) 6,111 . . .

b) 5,888 . . .

c) 6

d) 3

e) 5,98

Comentários:

A soma de F, G e H é dada por:

$$0{,}8\overline{6} + 0{,}7\overline{1} + 0{,}4\overline{2}$$

Separando as partes que não se repetem dos períodos, temos:

$$= \mathbf{(0,8 + 0,7 + 0,4)} + 0{,}0\overline{6} + 0{,}0\overline{1} + 0{,}0\overline{2}$$

$$= \mathbf{1,9} + \frac{1}{10}0,\overline{6} + \frac{1}{10}0,\overline{1} + \frac{1}{10}0,\overline{2}$$

$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times (0,\overline{6} + 0,\overline{1} + 0,\overline{2})$$

$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{6}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right)$$

$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{9}\right)$$

$$= 1{,}9 + 0{,}1$$

$$= 2$$

A questão pede o triplo da soma de F, G e H, que é dado por $3 \times 2 = 6$.

Gabarito: Letra C.

(MIN/2013) Julgue o seguinte item, relativo a sistemas numéricos e sistema legal de medidas.

Se A = 1,232323... e B = 0,434343..., então A + B = 165/99.

Comentários:

Observe que A apresenta o período 23.

$$A = 1,\overline{23}$$

$$= 1 + \frac{23}{99}$$

$$= \frac{99 + 23}{99} = \frac{122}{99}$$

B apresenta o período 43.

$$B = 0,\overline{43}$$

$$= \frac{43}{99}$$

Ao somar A e B, temos:

$$A + B = \frac{122}{99} + \frac{43}{99}$$

$$= \frac{165}{99}$$

Gabarito: CERTO.

RAZÃO E PROPORÇÃO

Razão e proporção
Razão
A **razão** entre os números A e B é a divisão de A por B. • Razão entre A e B; • Razão de A para B; • A está para B; • A:B; • A/B; • $\frac{A}{B}$.
Proporção
Proporção é a igualdade entre duas **ou mais razões**. Sejam as **razões A/B e C/D**. A **proporção** é dada pela igualdade: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. • A e D são os **extremos**; e • B e C são os **meios** Em uma proporção, o **produto dos meios** é igual ao **produto dos extremos**. Em outras palavras, dada a proporção $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, temos que $C \times B = A \times D$. Outra forma de entender a **"multiplicação cruzada"** é perceber que **podemos rearranjar os meios e os extremos**. **Não confundir** a razão entre duas entidades com a razão entre uma entidade e a totalidade de casos do problema. Propriedade fundamental da soma Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$,então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$ **Não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção:** Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c}{b+d}$ Propriedade fundamental da subtração Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

Uso conjunto das propriedade da soma e da subtração

Podemos somar e subtrair os numeradores e os denominadores seguindo a mesma lógica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a+c+e+g}{-b+d+f+h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a+c-e+g}{-b+d-f+h}$$

São diversas as possibilidades. **Não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção.**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-c+e-g}{-d+f-h}$$

Escala

A **escala** é um **tipo específico de razão**. Trata-se da razão entre uma medida representada em um desenho e a medida real do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

Velocidade Média e Vazão

Velocidade Média

A **velocidade média** corresponde à razão entre uma distância percorrida e o tempo em que se percorreu essa distância:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Para **converter km/h para m/s, devemos dividir o valor por 3,6**
Para **converter m/s para km/h, devemos multiplicar o valor por 3,6**

Vazão

A **vazão** corresponde à razão entre um volume e um tempo.

$$\text{Vazão} = \frac{\text{Volume}}{\text{Tempo}}$$

Em problemas envolvendo vazão, geralmente devemos utilizar o fato de que **a soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta**.

Dois conceitos importantes derivados das frações são a **razão** e a **proporção**. Vamos compreendê-los.

Razão

Sejam dois números **A** e **B**, com **B** diferente de zero. A **razão entre os números A e B é a divisão de A por B**, podendo ser expressa por:

- Razão entre **A** e **B**;
- Razão de **A** para **B**;
- **A** está para **B;**
- **A:B**;
- **A/B**;
- $\frac{A}{B}$.

O conceito de razão nos permite fazer a comparação entre dois números. Se, por exemplo, tivermos em uma sala 10 adultos e 5 crianças, a razão entre o **número de adultos** e o **número de crianças** é:

$$\frac{\text{Número de adultos}}{\text{Número de crianças}} = \frac{10}{5} = 2$$

Note, portanto, que a razão entre o número de adultos e o número de crianças representa quantas vezes o número de adultos é maior do que o número de crianças. Para o exemplo em questão, representa quantas vezes o número 10 é maior do que o 5: duas vezes.

Se quisermos a razão entre o **número de crianças** e o **número de adultos**, temos:

$$\frac{\text{Número de crianças}}{\text{Número de adultos}} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Vamos exercitar esse conceito.

(SEFAZ-BA/2019) Durante a campanha para eleições presidenciais em determinado país foram compartilhadas 30 milhões de vezes fakenews a favor do candidato A. Já fakenews a favor do candidato B foram compartilhadas 6 milhões de vezes. De acordo com esses dados, pode-se estimar que a razão entre a diferença entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B em relação ao número de compartilhamentos de fakenews pró-B é igual a

a) 4.

b) 3.

c) 2.

d) 5.

e) 6.

Comentários:

O número de compartilhamentos de fakenews pró-A é $N_A = 30\ milhões$.

O número de compartilhamentos de fakenews pró-B é $N_B = 6\ milhões$.

A diferença **D** entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B é dada por:

$$D = N_a - N_b = 24\, milhões$$

A questão pede **razão entre** a diferença entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B **em relação ao** número de compartilhamentos de fakenews pró-B.

Trata-se da **razão entre D e N_b:**

$$\frac{D}{N_b} = \frac{24\, milhões}{6\, milhões} = \frac{24}{6} = 4$$

Gabarito: Letra A.

(CREF 12/2013) Se a razão A/B vale 3, sendo B diferente de 0, então a razão de (2A—B)/2A vale:

a) 1

b) 1/2

c) 4/5

d) 3/5

e) 5/6

Comentários:

Podemos escrever A em função de B.

$$\frac{A}{B} = 3$$

$$A = 3B$$

Substituindo **A = 3B** na razão **(2A—B)/2A**, temos:

$$\frac{2A - B}{2A}$$

$$= \frac{2 \times 3B - B}{2\ \times 3B}$$

$$\frac{6B - B}{6B}$$

$$\frac{5B}{6B} = \frac{5}{6}$$

O **gabarito**, portanto, é **Letra E**.

Outra forma de se resolver a questão é "fazer aparecer" a razão **A/B** na razão **(2A—B)/2A**.

$$\frac{2\text{A} - \text{B}}{2\text{A}}$$

$$= \frac{2A}{2A} - \frac{B}{2A}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{B}{A}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\boldsymbol{3}}$$

$$= 1 - \frac{1}{6}$$

$$\frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

Gabarito: Letra E.

Assim como ocorre em problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolver exercícios envolvendo o conceito de razão consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**. Vejamos:

(CBM AM/2022) Em um grupo de pessoas, o número de homens é igual ao número de mulheres. Selecionam-se então $\frac{2}{5}$ dos homens $\frac{3}{4}$ das mulheres e forma-se um novo grupo.

Nesse novo grupo, em relação ao total de pessoas, as mulheres representam

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{7}{20}$

d) $\frac{15}{23}$

e) $\frac{17}{25}$

Comentários:

Considere que originalmente o número de **homens** e o número de **mulheres** seja **igual a X**, **totalizando $2X$ pessoas**.

No novo grupo, temos $\frac{2}{5}$ dos homens. O total de homens nesse novo grupo é:

$$\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} = \frac{2}{5}\ \textbf{de}\ X = \frac{2}{5} \times X = \frac{2}{5}X$$

Ainda no novo grupo, temos $\frac{3}{4}$ das mulheres. O total de mulheres nesse novo grupo é:

$$\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} = \frac{3}{4}\ \textbf{de}\ X = \frac{3}{4} \times X = \frac{3}{4}X$$

Nesse novo grupo, **a razão entre o número de mulheres e o total de pessoas é**:

$$\frac{\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}}}{\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} + \text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{2}{5}X + \frac{3}{4}X}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{8X + 15X}{20}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{23}{20}X}$$

Simplificando X, temos:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{23}{20}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{20}{23}$$

$$= \mathbf{\frac{15}{23}}$$

Gabarito: Letra D.

Proporção

Conceito de proporção

Proporção é a igualdade entre duas **ou mais razões**.

Sejam as razões **A/B** e **C/D**. A proporção é dada pela igualdade:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Podemos representar uma proporção das seguintes formas:

- **A** está para **B** assim como **C** está para **D**;
- **A:B::C:D**;
- **A/B = C/D**;
- $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Ainda em uma proporção **A/B = C/D**, diz-se que:

- **A** e **D** são os **extremos**; e
- **B** e **C** são os **meios**.

Multiplicação cruzada

A propriedade das proporções conhecida por **"multiplicação cruzada"** nos diz o seguinte:

Em uma proporção, o **produto dos meios** é igual ao **produto dos extremos**.
Em outras palavras, dada a proporção $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, temos que $C \times B = A \times D$.

Considere, por exemplo, a proporção:

$$\frac{5}{10} = \frac{20}{40}$$

Note que o produto dos meios, 10×20, é igual ao produto dos extremos, 5×40, pois ambas as multiplicações nos retornam o resultado 200.

Vamos a um exemplo.

Determine o valor de incógnita x na proporção $\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$.

Realizando a **"multiplicação cruzada"**, obtemos:

$$4 \times 9(x+1) = 3(x-2) \times 20$$

$$36 \times (x+1) = 60 \times (x-2)$$

$$36x + 36 = 60x - 120$$

$$120 + 36 = 60x - 36x$$

$$156 = 24x$$

$$24x = 156$$

$$x = \frac{156}{24}$$

$$x = 6{,}5$$

Outra forma de entender a **"multiplicação cruzada"** é perceber que podemos rearranjar os **meios** e os **extremos**. Para exemplificar esse conceito, considere a mesma proporção:

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$$

Os meios da proporção considerada são $\mathbf{4}$ e $\mathbf{9\,(x+1)}$.

$$\frac{3(x-2)}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{9\,(x+1)}}{20}$$

Podemos rearranjar os meios da proporção original da seguinte forma:

$$\frac{3(x-2)}{1} = \frac{\mathbf{4 \times 9(x+1)}}{20}$$

Também podemos rearranjar os meios da proporção original assim:

$$\frac{3(x-2)}{\mathbf{4 \times 9\,(x+1)}} = \frac{1}{20}$$

Outra possibilidade é trocar os meios de posição:

$$\frac{3(x-2)}{\mathbf{9\,(x+1)}} = \frac{\mathbf{4}}{20}$$

A mesma ideia vale para os extremos da proporção.

Os extremos da proporção considerada são $\mathbf{3(x-2)}$ e $\mathbf{20}$.

$$\frac{\mathbf{3(x-2)}}{4} = \frac{9\,(x+1)}{\mathbf{20}}$$

Podemos rearranjar os extremos das seguintes formas:

$$\frac{\mathbf{3(x-2)\times 20}}{4} = \frac{9\,(x+1)}{1}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{9\,(x+1)}{\mathbf{3(x-2)\times 20}}$$

$$\frac{\mathbf{20}}{4} = \frac{9\,(x+1)}{\mathbf{3(x-2)}}$$

Entendida essa nova percepção da **"multiplicação cruzada"**, vamos determinar o valor da incógnita x de outra maneira.

Determine o valor de incógnita x na proporção $\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$.

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9(x+1)}{20}$$

$$\frac{3(x-2)}{1} = \frac{4\times 9\,(x+1)}{20}$$

$$\frac{(x-2)}{1} = \frac{4\times 9\,(x+1)}{3\times 20}$$

$$(x-2) = \frac{4\times 9}{3\times 20}\times (x+1)$$

Simplificando 4 com 20 e 9 com 3, obtemos:

$$(x-2) = \frac{3}{5}\times (x+1)$$

$$x-2 = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$$

$$x - \frac{3}{5}x = 2 + \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5}x = \frac{13}{5}$$

$$2x = 13$$

$$x = \frac{13}{2}$$

$$x = 6,5$$

Vamos praticar o que aprendemos sobre **"multiplicação cruzada"**.

(Pref. P das Missões/2019) O valor de "x" na proporção $\frac{x}{2} = \frac{x+7}{4}$ é:

a) 2.

b) 5.

c) 7.

d) 9.

e) 10.

Comentários:

Sabemos que:

▪

$$\frac{x}{2} = \frac{x+7}{4}$$

Para determinar o valor de "x", devemos utilizar a "multiplicação cruzada".

$$x \times 4 = 2 \times (x + 7)$$

$$4x = 2x + 14$$

$$4x - 2x = 14$$

$$2x = 14$$

$$x = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

Gabarito: Letra C.

(CODESG/2019) Considere que os números 0,6; 1,6; 0,3; e k formam, nessa ordem, uma proporção. Qual o valor de k?

a) 0,8

b) 1,8

c) 2,4

d) 2,6

Comentários:

Como os números 0,6; 1,6; 0,3; e k formam uma proporção na ordem indicada, então:

$$\frac{0,6}{1,6} = \frac{0,3}{k}$$

Para determinar o valor de "k", devemos utilizar a "multiplicação cruzada".

$$0,6 \times k = 1,6 \times 0,3$$

$$0,6k = 0,48$$

$$k = \frac{0,48}{0,6}$$

$$k = 0,8$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Peruíbe/2019) Em um experimento químico, a razão entre uma quantidade do produto A para 2/3 da quantidade do produto B é igual a 1/3. Para obter esse resultado é(são) necessário(s), do produto A,

a) 1/6 da quantidade do produto B.

b) 2/9 da quantidade do produto B.

c) 1/3 da quantidade do produto B.

d) 2/5 da quantidade do produto B.

e) 1/2 da quantidade do produto B.

Comentários:

Seja Q_A a quantidade do produto A e Q_B a quantidade do produto B.

A razão entre Q_A e $\frac{2}{3}Q_b$ é igual a 1/3. Logo:

$$\frac{Q_A}{\left(\frac{2}{3}Q_B\right)} = \frac{1}{3}$$

Rearranjando os meios, temos:

$$\frac{Q_A}{1} = \frac{\left(\frac{2}{3}Q_B\right)}{3}$$

$$Q_A = \frac{2Q_B}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$Q_A = \frac{2}{9} Q_B$$

Logo, são necessários do produto A 2/9 da quantidade do produto B.

Gabarito: Letra B.

Um ponto muito importante na resolução de problemas é **não confundir** a razão entre duas entidades com a razão entre uma entidade e a totalidade de casos do problema. Vejamos o exemplo a seguir:

(Pref. Peruíbe/2019) No ano de 2015, uma pesquisa revelou que, no Brasil, a razão entre o número de pessoas que apresentam algum tipo de deficiência e o número de pessoas que não apresentam deficiência é de 1/3. Com base nessa informação, é correto afirmar que, no Brasil, a cada

a) seis pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

b) cinco pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

c) quatro pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

d) três pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

e) duas pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

Comentários:

Perceba que o problema pergunta sobre a razão entre as pessoas com deficiência (C) e a **totalidade da população** brasileira (T).

A razão apresentada pelo enunciado é entre as pessoas com deficiência (C) e as pessoas sem deficiência (S):

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}} = \frac{1}{3}$$

Ao realizar a "multiplicação cruzada", obtemos que o número de pessoas sem deficiência é o triplo do número de pessoas com deficiência:

$$1\mathrm{S} = 3\mathrm{C}$$

O total de pessoas no Brasil (T) corresponde à soma das pessoas com e sem deficiência:

$$\mathrm{T} = \mathrm{C} + \mathrm{S}$$

A razão entre o número de pessoas com deficiência e a totalidade da população é:

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{T}} = \frac{C}{C+S}$$

Como **S = 3C**, temos:

$$= \frac{C}{C+3C}$$

$$= \frac{C}{4C} = \frac{1}{4}$$

<u>Logo, no Brasil, a cada quatro pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.</u>

Gabarito: Letra C.

Propriedades fundamentais das proporções

As propriedades a seguir serão de grande valia para problemas de proporcionalidade, especialmente a propriedade fundamental da soma.

Propriedade fundamental soma

Considerando a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, são validas também as proporções $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$ e também $\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Em resumo, temos que:

$$\text{Considerando que } \frac{\text{a}}{\text{b}}=\frac{\text{c}}{\text{d}}, \text{então é verdade que } \frac{\text{a}}{\text{b}}=\frac{\text{c}}{\text{d}}=\frac{\text{a}+\text{c}}{\text{b}+\text{d}}$$

O mesmo vale para uma proporção composta por **mais de duas razões**:

$$\text{Considerando que } \frac{\text{a}}{\text{b}}=\frac{\text{c}}{\text{d}}=\frac{\text{e}}{\text{f}}=\frac{\text{g}}{\text{h}}, \text{então é verdade que } \frac{\text{a}}{\text{b}}=\frac{\text{c}}{\text{d}}=\frac{\text{e}}{\text{f}}=\frac{\text{g}}{\text{h}}=\frac{\text{a}+\text{c}+\text{e}+\text{g}}{\text{b}+\text{d}+\text{f}+\text{h}}$$

Vale ressaltar que **não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção**, sendo também verdade, <u>por exemplo</u>, casos como os seguintes:

$$\text{Considerando que } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\text{e}}{\text{f}}=\frac{\text{g}}{\text{h}}, \text{então é verdade que } \frac{\text{a}}{\text{b}}=\frac{\text{c}}{\text{d}}=\frac{\text{e}}{\text{f}}=\frac{\text{g}}{\text{h}}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{\mathbf{b}+\mathbf{d}}$$

$$\text{Considerando que } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\text{e}}{\text{f}}=\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{h}}, \text{então é verdade que } \frac{\text{a}}{\text{b}}=\frac{\text{c}}{\text{d}}=\frac{\text{e}}{\text{f}}=\frac{\text{g}}{\text{h}}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{g}}{\mathbf{b}+\mathbf{d}+\mathbf{h}}$$

Vamos a um exemplo que mostra a utilidade dessa propriedade.

Considere a proporção com três razões $\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{20}$. Determine a, b e c, sabendo que $a+b+c=140$.

Utilizando a propriedade fundamental da soma, temos que:

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{20}=\frac{a+b+c}{5+10+20}$$

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{20}=\frac{140}{35}$$

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{20}=4$$

A sequência de igualdades acima significa que:

$$\frac{a}{5} = 4 \ \rightarrow a = 20$$

$$\frac{b}{10} = 4 \ \rightarrow b = 40$$

$$\frac{c}{20} = 4 \ \rightarrow c = 80$$

Propriedade fundamental da subtração

Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, são validas as proporções $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$ e também $\frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$. Em resumo, temos que:

$$\text{Considerando que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}, \text{então é verdade que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{a}-\mathrm{c}}{\mathrm{b}-\mathrm{d}}$$

Vamos a um exemplo que mostra a utilidade dessa propriedade.

Considere a proporção $\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5}$. Determine a incógnita "x".

Ao subtrair os numeradores, podemos eliminar a incógnita "x". Observe:

$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \frac{\mathbf{(x+1)-(x-4)}}{\mathbf{10-5}}$$

$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{5}}$$

$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \mathbf{1}$$

Utilizando a igualdade $\frac{x+1}{10} = 1$, obtemos:

$$x + 1 = 10$$

$$x = 9$$

Poderíamos também utilizar a igualdade $\frac{x-4}{5} = 1$:

$$x - 4 = 5$$

$$x = 9$$

Uso conjunto das propriedades da soma e da subtração

Em uma mesma proporção composta por duas ou mais razões, podemos utilizar as duas propriedades anteriores em conjunto. Por exemplo, se tivermos a proporção:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$$

Podemos somar e subtrair os numeradores e denominadores seguindo a mesma lógica:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{-a+c+e+g}{-b+d+f+h}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{a-c+e-g}{b-d+f-h}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{a+c-e-g}{b+d-f-h}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{a+c-e+g}{b+d-f+h}}$$

Enfim, são diversas as possibilidades. O importante é não esquecer que, ao realizar uma operação (soma ou subtração) com o numerador de uma das razões, devemos realizar a <u>mesma operação</u> (soma ou subtração) <u>com o denominador dessa razão</u>.

Vale ressaltar que não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}}=\frac{g}{h}=\boldsymbol{\frac{a+c-e}{b+d-f}}$$

$$\frac{a}{b}=\boldsymbol{\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{-c+e-g}{-d+f-h}}$$

Escala

A escala é um tipo específico de razão. Trata-se da razão entre uma medida representada em um desenho e a medida real do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

É muito comum que a escala seja representada na forma **A:B**.

Quando temos, por exemplo, um mapa na escala 1:50.000, significa que cada unidade de comprimento do mapa corresponde a 50.000 unidades de comprimento do mundo real, seja qual for essa unidade de comprimento:

- Se estivermos falando de metros, cada metro do mapa corresponde a 50.000 metros no mundo real;
- Se estivermos falando de centímetros, cada centímetro do mapa corresponde a 50.000 centímetros no mundo real;
- Se estivermos falando de milímetros, cada milímetro do mapa corresponde a 50.000 milímetros no mundo real;
- Etc.

(ANAC/2009) Acerca de grandezas proporcionais e de matemática financeira, julgue o item que segue.

Se a maquete de um helicóptero, construída na escala de 1:24, tiver o comprimento igual a 20 cm, então o comprimento real dessa aeronave será inferior a 5 m.

Comentários:

A escala 1:24 apresenta 20cm como medida representada.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{20 \text{ cm}}{\text{Medida real}}$$

$$1 \times (\text{Medida real}) = 24 \times 20 \text{ cm}$$

$$(\text{Medida real}) = 480 \text{ cm}$$

Lembre-se que o prefixo "**centi**" (**c**) corresponde a 10^{-2}. O valor da medida real, em metros, é:

$$(\text{Medida real}) = 480 \times \mathbf{10^{-2}} \text{ m}$$

$$(\text{Medida real}) = 4{,}8 \text{ m}$$

Logo, o comprimento real dessa aeronave será inferior a 5 m.

Gabarito: CERTO.

(Pref. Olímpia/2019) A tabela a seguir apresenta algumas escalas e medidas:

Escala	Medida na representação gráfica	Medida real
1:1 000	6 cm	60 m
1:2 500	20 cm	X
1:4 000	Y	600 m

As medidas X e Y são, respectivamente, iguais a

a) 25 m e 15 cm.

b) 60 m e 80 cm.

c) 500 m e 12 cm.

d) 500 m e 15 cm.

e) 800 m e 60 cm.

Comentários:

A escala 1:2.500 apresenta 20cm como medida representada e X como medida real.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{2.500} = \frac{20\text{cm}}{\text{X}}$$

$$1 \times \text{X} = 20\text{cm} \ \times 2.500$$

$$\text{X} = 50.000 \text{ cm}$$

Lembre-se que o prefixo "**centi**" (**c**) corresponde a 10^{-2}. O valor de X, em metros, é:

$$\text{X} = 50.000 \times \mathbf{10^{-2}}\text{m}$$

$$\text{X} = 500\text{m}$$

A escala 1:4.000 apresenta Y como medida representada e 600m como medida real.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{4.000} = \frac{\text{Y}}{600\text{m}}$$

$$\frac{600\text{m}}{4.000} = \text{Y}$$

$$\text{Y} = 0{,}15 \text{ m}$$

0,15m correspondem a 15cm. Logo, $\text{Y} = 15\text{cm}$.

Gabarito: Letra D.

Velocidade média e vazão

Nesse tópico, vamos tratar de problemas envolvendo **velocidade média** e **vazão**, que também são tipos específicos de razão.

Velocidade média

A **velocidade média** corresponde à razão entre uma distância percorrida e o tempo em que se percorreu essa distância:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Se a distância percorrida é dada em **quilômetros** (**km**) e o tempo em que se percorreu a distância é dado em **horas** (**h**), a velocidade média é obtida na unidade **quilômetros por hora** (**km/h**). Por exemplo, caso um automóvel tenha percorrido 144 km em 2h, a velocidade média é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{144\text{ km}}{2\text{ h}} = 72\text{ km/h}$$

Se a distância for dada em **metros** (**m**) e o tempo for dado em **segundos** (**s**), a velocidade média é obtida na unidade **metros por segundo** (**m/s**). Por exemplo, se um atleta correu 200 metros em 25 segundos, a sua velocidade média é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{200\text{m}}{25\text{ s}} = 8\text{ m/s}$$

Uma vez que **quilômetros por hora** (**km/h**) e **metros por segundo** (**m/s**) são unidades de velocidade, podemos realizar uma conversão entre essas unidades. Sabemos que:

- **1km** corresponde a **1000m**; e
- Em **1h** temos **60min**, que correspondem a 60×60 = **3600s**.

Com base nisso, observe que, **para converter quilômetros por hora** (**km/h**) **para metros por segundo** (**m/s**), **devemos dividir o valor por 3,6**. Acompanhe o raciocínio aplicado para a velocidade de **72 km/h**:

$$72\text{km/h} = \frac{72\ \mathbf{km}}{\mathbf{1\ h}} = \frac{72 \times \mathbf{1000\ m}}{\mathbf{3600\ s}} = \frac{72\text{ m}}{\frac{3600}{1000}\text{ s}} = \frac{72\text{ m}}{3{,}6\text{ s}} = 20\text{ m/s}$$

Além disso, note que:

- Como **1km** corresponde a **1000m**, temos que **1m** corresponde a $\mathbf{\frac{1}{1000}}$ **km**; e
- Como **1h** temos **3600s**, temos que **1s** corresponde a $\mathbf{\frac{1}{3600}}$ **h**.

Com base nisso, podemos observar que, para **converter metros por segundo** (**m/s**) **para quilômetros por hora** (**km/h**), **devemos multiplicar o valor por 3,6**. Acompanhe o raciocínio aplicado para a velocidade de **20 m/s**:

$$20\ \mathrm{m/s} = \frac{20\ \mathbf{m}}{1\ \mathrm{s}} = \frac{20 \times \mathbf{\frac{1}{1000}}\,\mathbf{km}}{1 \times \mathbf{\frac{1}{3600}}\,\mathbf{h}} = 20 \times \frac{1}{1000} \times 3600\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 20 \times \frac{3600}{1000}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 20 \times 3{,}6\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 72\ \mathrm{km/h}$$

FIQUE ATENTO!

Para **converter km/h para m/s**, **devemos dividir o valor por 3,6**

Para **converter m/s para km/h**, **devemos multiplicar o valor por 3,6**

Cumpre destacar que **tudo que vimos aqui para velocidade média vale para problemas em que temos uma velocidade constante**. Isso porque, **quando a velocidade é constante durante um trajeto**, **esta é a velocidade média**.

Nesse momento, vamos resolver alguns problemas envolvendo essa razão especial que chamamos de **velocidade média**.

HORA DE PRATICAR!

(PREVISCAM/2022) Um motorista de táxi fez um percurso de 50 km em 30 minutos com velocidade constante. Qual a velocidade, em quilômetros por hora?

a) 105 km/h.

b) 100 km/h.

c) 150 km/h.

d) 120 km/h.

Comentários:

Para obter a velocidade em **quilômetros por hora** (**km/h**), devemos ter a distância percorrida em **quilômetros** (**km**) e o tempo em **horas** (**h**).

Como **1h = 60min**, 30 minutos correspondem à metade de uma hora, ou seja, **30min = 0,5h**. Logo:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

$$\text{Velocidade Média} = \frac{50\text{ km}}{0{,}5\text{ h}}$$

$$\text{Velocidade Média} = 100\text{ km/h}$$

Como a velocidade procurada é uma **velocidade constante** ao longo de todo o trajeto, **esta velocidade é a velocidade média**.

Gabarito: Letra B.

(CBM RJ/2022) Em certa pista, um carro de corrida, mantendo velocidade média de 100 km/h durante 2 horas deu exatamente 45 voltas.

Na mesma pista, aumentando a velocidade média para 180 km/h, o número de voltas que serão dadas nas mesmas 2 horas é

a) 25.

b) 30.

c) 36.

d) 72.

e) 81.

Comentários:

Suponha que em **uma volta** temos uma **distância x em quilômetros**. Note que, na primeira situação, o carro de corrida manteve a velocidade média de **100 km/h** durante **2h** e percorreu a distância de **45x**. Logo:

$$\text{Velocidade Média}_1 = \frac{\text{Distância percorrida}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$100\text{ km/h} = \frac{45x}{2\text{ h}}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", temos:

$$45x = 2\text{h} \times 100\text{ km/h}$$

$$45x = 200\text{ km}$$

$$x = \frac{200}{45}\text{km}$$

Simplificando o numerador e o denominador por 5, temos:

$$x = \frac{40}{9}\ \text{km}$$

Portanto, **uma volta** corresponde à distância de **40/9 km**.

Na segunda situação, o carro de corrida manteve a velocidade média de **180 km/h** durante **2h**. Com isso, podemos obter a **distância *D*** percorrida nessa segunda situação:

$$\text{Velocidade Média}_2 = \frac{\text{Distância percorrida}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$180\ \text{km/h} = \frac{D}{2\ \text{h}}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", temos:

$$D = 2\text{h} \times 180\ \text{km/h}$$

$$\boldsymbol{D = 360\ \text{km}}$$

Precisamos saber quantas voltas correspondem à distância de **360 km**. Trata-se da seguinte divisão:

$$\frac{360\ \text{km}}{\frac{40}{9}\ \text{km por volta}}$$

$$= 360 \times \frac{9}{40}$$

$$= \frac{360}{40} \times 9$$

$$= 9 \times 9$$

$$= 81\ \text{voltas}$$

Gabarito: Letra E.

FIQUE ATENTO!

A seguir, apresentarei duas questões de maior complexidade. **Não se preocupe se você errar**, **especialmente caso você nunca tenha visto esse tipo de questão na sua vida**. Isso porque esse tipo de questão **não é comum de aparecer em provas** e, além disso, essas questões **fogem um pouco do escopo de Matemática e de Raciocínio Lógico**, começando a entrar no campo da Física.

(TJ CE/2022) Um trem viaja a uma velocidade constante. Ele leva 5 s para atravessar completamente um túnel de 85 m e gasta 8 s para atravessar completamente um túnel de 160 m. O comprimento do trem, em metros, é

a) 60.

b) 30.

c) 40.

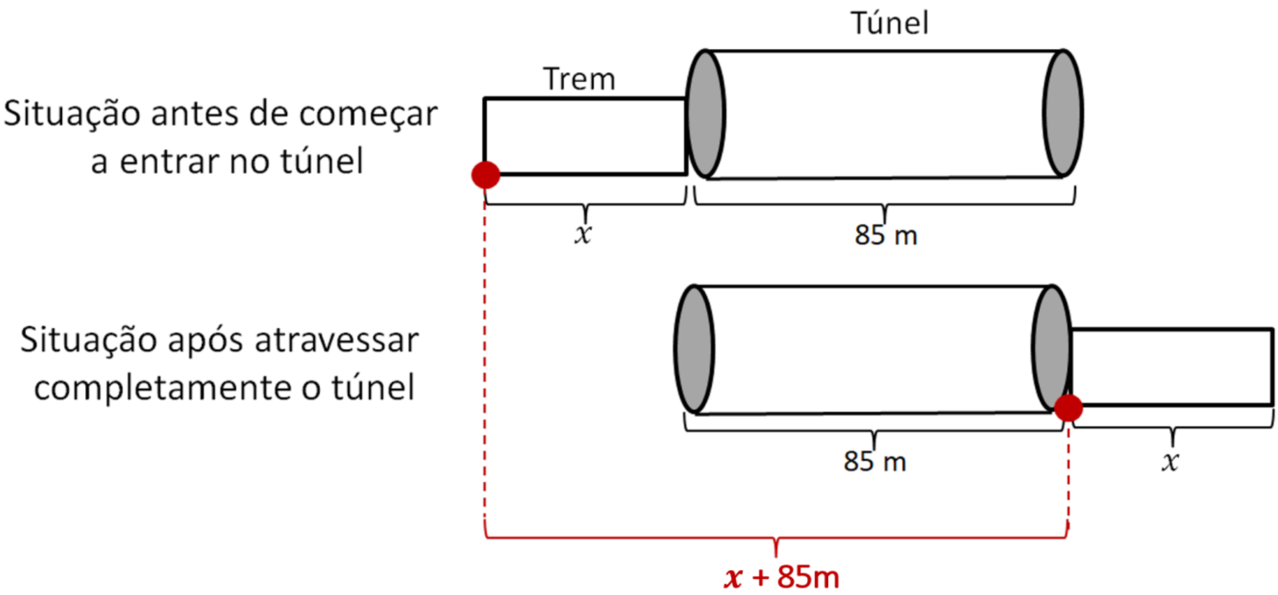
d) 50.

e) 70.

Comentários:

Suponha que o **comprimento do trem**, **em metros**, **seja x**.

Na **primeira situação**, temos o seguinte esquema que representa o trem antes de começar a entrar no túnel e após atravessar completamente o túnel:



Perceba que, **para atravessar completamente o túnel**, o trem precisa percorrer uma **distância x + 85m**, que corresponde ao **comprimento do trem somado ao comprimento do túnel**.

Já que o trem apresenta uma **velocidade constante** ao longo de todo o trajeto, **esta velocidade é a velocidade média**.

Como o trem leva **5s** para percorrer a distância **x + 85m**, a velocidade constante V, em metros por segundo (**m/s**), é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

$$V = \frac{x + 85}{5}$$

Na **segunda situação**, o trem leva **8s** para atravessar completamente um túnel de **160 m** mantendo a mesma velocidade constante $\boldsymbol{V}$. A distância percorrida, nessa segunda situação, será $\boldsymbol{x}$ **+ 160m.** Logo:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

$$V = \frac{x + 160}{8}$$

Igualando a velocidade V para as duas situações, temos:

$$\frac{x + 85}{5} = \frac{x + 160}{8}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", segue que:

$$8 \times (x + 85) = 5 \times (x + 160)$$

$$8x + 680 = 5x + 800$$

$$8x - 5x = 800 - 680$$

$$3x = 120$$

$$x = \frac{120}{3}$$

$$x = 60 \text{ m}$$

Portanto, **o comprimento do trem é 60 metros**.

Gabarito: Letra C.

(Senado/2022) Um tigre avista um javali a 1km de distância e sai, em linha reta, em seu encalço. Nesse instante, o javali foge na direção contrária à do tigre.

O tigre corre a 30m/s, e o javali tenta escapar a uma velocidade de 10m/s.

A distância percorrida pelo javali até ser alcançado pelo tigre é igual a

a) 300m.

b) 400m.

c) 500m.

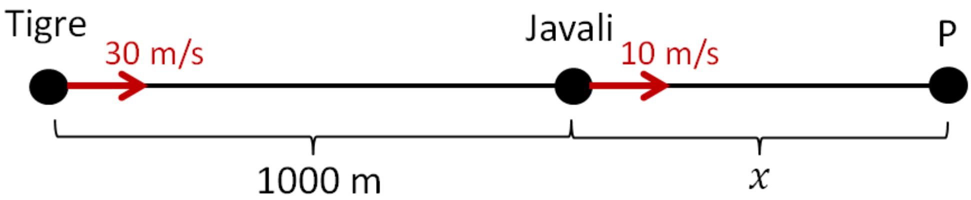
d) 600m.

e) 700m.

Comentários:

Suponha que a distância percorrida pelo javali até ser alcançado pelo tigre seja x. Suponha, ainda, que o tigre alcance o javali no **ponto P**.

Como **1km** é igual a **1000m,** temos a seguinte representação do problema:



Como as velocidades são constantes, podemos utilizar o conceito de velocidade média.

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Suponha que o tigre e o javali se encontrem no ponto P **após t segundos**. Veja que:

- A velocidade média do tigre é **30 m/s**;
- A distância percorrida pelo tigre é **1000 + x metros**;
- O tempo em que o tigre percorre a distância 1000 + x é **t segundos**.

Logo:

$$30 = \frac{1000 + x}{t}$$

$$\mathbf{30t = 1000 + x}$$

Além disso:

- A velocidade média do javali é **10 m/s**;
- A distância percorrida pelo javali é **x metros**;
- O tempo em que o javali percorre a distância x é **t segundos**.

Logo:

$$\mathbf{10 = \frac{x}{t}}$$

$$10t = x$$

$$\mathbf{t = \frac{x}{10}}$$

Substituindo $t = x/10$ na primeira equação, temos:

$$\mathbf{30t = 1000 + x}$$

$$30 \times \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{10}} = 1000 + x$$

$$3x = 1000 + x$$

$$3x - x = 1000$$

$$2x = 1000$$

$$x = \frac{1000}{2}$$

$$x = 500 \text{ m}$$

Logo, **distância percorrida pelo javali até ser alcançado pelo tigre** é igual a **500m**.

Gabarito: Letra C.

Vazão

A **vazão** corresponde à razão entre um volume e um tempo.

$$\text{Vazão } = \frac{\text{Volume}}{\text{Tempo}}$$

No geral, problemas envolvendo vazão estão relacionados a torneiras que despejam em um recipiente um determinado volume de água em um determinado período de tempo.

Se o volume despejado for dado em **litros** (**l**) e o tempo for dado em **horas** (**h**), a vazão será obtida em **litros por hora** (**l/h**). Por exemplo, caso uma torneira encha um recipiente de 10 litros em 2h, a vazão é:

$$\text{Vazão } = \frac{10 \text{ l}}{2 \text{ h}} = 5 \text{ l/h}$$

A unidade da vazão dependerá das unidades de volume e de tempo consideradas. Caso tenhamos, por exemplo, uma torneira que encha um recipiente de 500ml em 2 minutos, a vazão será:

$$\text{Vazão} = \frac{500 \text{ ml}}{2 \text{ min}} = 250 \text{ ml/min}$$

A grande maioria dos problemas que envolvem o conceito de vazão está relacionada ao uso de torneiras. É muito comum que tenhamos as seguintes situações:

- Temos as **vazões individuais das torneiras** e queremos obter o **tempo em que as torneiras enchem um recipiente quando acionadas em conjunto**; e
- Temos a **vazão conjunta** e a **vazão de algumas torneiras** e queremos obter o **tempo em que uma determinada torneira enche um recipiente**.

Nesses casos, e em outros casos semelhantes, geralmente devemos montar uma equação em que **a soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta**.

Em problemas envolvendo vazão, geralmente devemos utilizar o fato de que **a soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta**.

Vamos resolver alguns problemas.

HORA DE PRATICAR!

(Pref Nova Odessa/2022) Uma torneira leva 4 horas para encher um determinado recipiente. Já uma segunda torneira leva 6 horas para encher esse mesmo recipiente. Assim, se as duas torneiras forem abertas juntas, quanto tempo irão levar para encher esse recipiente?

a) 2 horas.

b) 2 horas e 4 minutos.

c) 2 horas e 24 minutos.

d) 2 horas e 36 minutos.

e) 2 horas e 56 minutos.

Comentários:

Suponha que o volume do recipiente em questão seja V.

A primeira torneira leva 4 horas para encher o recipiente de volume V. Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{Volume}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{V}}{4}$$

A segunda torneira leva 6 horas para encher o recipiente de volume V. Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{Volume}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{V}}{4}$$

A soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta. Logo:

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{V}{4} + \frac{V}{6}$$

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{3V + 2V}{12}$$

$$\text{Vazão conjunta} = \mathbf{\frac{5V}{12}}$$

A **vazão conjunta** corresponde à razão entre o **volume do recipiente V** e o **tempo t em que as torneiras enchem conjuntamente o recipiente**:

$$\text{Vazão conjunta} = \mathbf{\frac{V}{t}}$$

Igualando os dois valores para a vazão conjunta, podemos obter o tempo:

$$\mathbf{\frac{5V}{12}} = \mathbf{\frac{V}{t}}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{t}$$

$$5t = 12$$

$$t = \frac{12}{5}$$

$$t = 2{,}4 \text{ horas}$$

Como **1h = 60 minutos**, temos que **0,4h** correspondem a:

$$0{,}4 \times 60 = 24\text{min}$$

Logo, **o tempo em que as torneiras irão levar para encher o recipiente conjuntamente é de 2 horas e 24 minutos**.

Gabarito: Letra C.

(Pref Linhares/2020) Uma torneira enche um tanque em 9 horas, uma outra pode fazer o mesmo serviço em 12 horas. Juntando a essas duas torneiras uma terceira, todas trabalhando ao mesmo tempo, o tanque ficará cheio em 4 horas. O tempo que a terceira levaria trabalhando sozinha para encher todo o tanque seria de:

a) 9 horas.

b) 18 horas.

c) 36 horas.

d) 72 horas.

e) 144 horas.

Comentários:

Suponha que o volume do tanque em questão seja V.

A primeira torneira leva 9 horas para encher o tanque de volume V. Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{Volume}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{V}}{9}$$

A segunda torneira leva 12 horas para encher o tanque de volume V. Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{Volume}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{V}}{12}$$

Suponha que o tempo em que a terceira torneira enche o tanque sozinha seja t. Nesse caso, a vazão da terceira torneira é:

$$\text{Vazão}_3 = \frac{\text{V}}{t}$$

A **vazão conjunta** corresponde à razão entre o **volume do recipiente V** e o **tempo de 4 horas em que as três torneiras enchem conjuntamente o recipiente**:

$$\text{Vazão conjunta} = \boldsymbol{\frac{V}{4}}$$

A soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta. Logo:

$$\text{Vazão conjunta} = \boldsymbol{\frac{\text{V}}{9}} + \boldsymbol{\frac{V}{12}} + \boldsymbol{\frac{V}{t}}$$

Igualando os dois valores para a vazão conjunta, podemos obter o tempo em que a terceira torneira enche o tanque trabalhando sozinha:

$$\boldsymbol{\frac{\text{V}}{9}} + \boldsymbol{\frac{V}{12}} + \boldsymbol{\frac{V}{t}} = \boldsymbol{\frac{V}{4}}$$

Simplificando o volume V, temos:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{9-4-3}{36}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{2}{36}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{18}$$

$$t = 18 \text{ horas}$$

Logo, **o tempo que a terceira torneira levaria trabalhando sozinha para encher todo o tanque é de 18 horas**.

Gabarito: Letra B.

(Pref. Cuiabá/2015) Duas caixas d'água iguais, posicionadas uma ao lado da outra, possuem, cada uma, capacidade de 900 litros, sendo que a primeira está cheia e a segunda, vazia.

A primeira caixa possui uma torneira que consegue esvaziá-la com vazão de 10 litros por hora e a segunda caixa possui uma torneira que consegue enchê-la com vazão de 15 litros por hora.

Abrindo as duas torneiras simultaneamente, o tempo que deve decorrer até que os níveis da água nas duas caixas estejam na mesma altura é de

a) 18 horas.

b) 25 horas.

c) 30 horas.

d) 36 horas.

e) 45 horas.

Comentários:

Temos **duas caixas iguais**, com capacidade de **900 litros**, sendo que inicialmente **a primeira está cheia de água** e a **segunda está vazia**. Além disso, **a primeira caixa deve ser esvaziada**, e **a segunda deve ser enchida com água**.

Note que, **para que os níveis de água nas duas caixas estejam na mesma altura**, **o volume que resta na primeira caixa** deve ser igual ao **volume que foi inserido na segunda caixa**.

Considere, então, que o tempo em horas que deve decorrer até que os níveis de água nas duas caixas estejam na mesma altura seja t. Em outras palavras, considere que o tempo em horas para que **o volume que resta na primeira caixa** seja igual ao **volume inserido na segunda caixa** seja t.

Para obter o tempo t, vamos seguir os seguintes passos:

- **Obter o volume <u>restante</u> na primeira caixa em termos do tempo t;**
- **Obter o volume <u>inserido</u> na segunda caixa em termos do tempo t; e**
- **Igualar os volumes obtidos.**

<u>Volume restante na primeira caixa</u>

O volume retirado da primeira caixa durante o período t é tal que:

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{Volume retirado}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$10 = \frac{\text{Volume retirado}_1}{t}$$

$$\text{Volume retirado}_1 = 10t$$

Portanto, o volume restante na primeira caixa depois de decorrido um tempo t é:

$$\text{Volume restante}_1 = 900 - \text{Volume retirado}_1$$

$$\mathbf{Volume\ restante_1 = 900 - 10}\boldsymbol{t}$$

<u>Volume inserido na segunda caixa</u>

O volume inserido na segunda caixa durante o período t é tal que:

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{Volume inserido}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$15 = \frac{\text{Volume inserido}_2}{\text{t}}$$

$$\mathbf{Volume\ inserido_2 = 15}\boldsymbol{t}$$

<u>Igualar os volumes obtidos</u>

Igualando o volume restante da primeira caixa e o volume inserido na segunda caixa, podemos obter o tempo em que os níveis de água nas duas caixas estão na mesma altura:

$$\mathbf{Volume\ restante_1 = Volume\ inserido_2}$$

$$\mathbf{900 - 10}\boldsymbol{t} = \mathbf{15}\boldsymbol{t}$$

$$900 = 10t + 15t$$

$$900 = 25t$$

$$25t = 900$$

$$t = \frac{900}{25}$$

$$t = 36\ \text{h}$$

Portanto, o tempo que deve decorrer até que os níveis da água nas duas caixas estejam na mesma altura é de **36 horas**.

Gabarito: Letra D.

PROPORCIONALIDADE

Proporcionalidade

Grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B, C e D quando

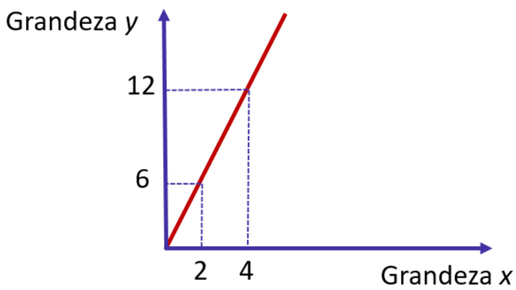
$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{Grandeza B})\times(\text{Grandeza C})\times(\text{Grandeza D})}=\text{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

Quando uma questão disser que duas ou mais grandezas são **proporcionais**, entenda que elas são **diretamente proporcionais**.

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são diretamente proporcionais quando:

$$\frac{\text{x}_1}{\text{y}_1}=\frac{\text{x}_2}{\text{y}_2}=\frac{\text{x}_3}{\text{y}_3}=\cdots=\frac{\text{x}_\text{n}}{\text{y}_\text{n}}=\text{k}$$



Para resolver problemas de divisão em partes diretamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Grandezas inversamente proporcionais

As expressões a seguir querem dizer a mesma coisa:

- A é **inversamente proporcional** a B;
- A é **diretamente proporcional ao inverso de B**;
- A é **diretamente proporcional a $\frac{1}{B}$**.

Uma grandeza A é inversamente proporcional às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{\frac{1}{(\text{Grandeza B})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza C})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza D})}}=\text{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

De outra forma, podemos dizer que grandeza A é inversamente proporcional às grandezas B, C e D quando:

$$(\text{grandeza A})\times(\text{gradeza B})\times(\text{grandeza C})\times(\text{grabdeza D})=\text{k}$$

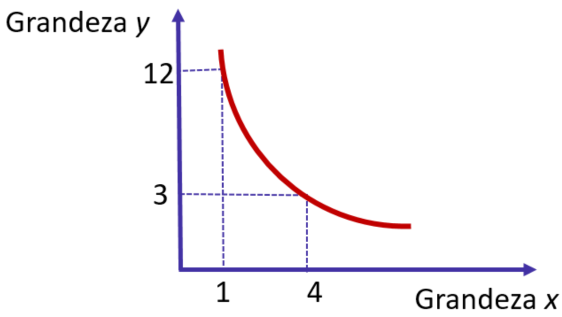
Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ são inversamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{y_2}} = \frac{x_3}{\frac{1}{y_3}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{y_n}} = k$$

De outra forma, podemos dizer que são inversamente proporcionais quando:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = x_n \times y_n = k$$



Para resolver problemas de divisão em partes inversamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Grandezas direta e inversamente proporcionais

Se uma grandeza A for **diretamente** proporcional às **grandezas B e C** e **inversamente** proporcional às **grandezas D e E**, então:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{grandeza B})\times(\text{grandeza C})\times\frac{1}{(\text{Grandeza D})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza E})}} = k$$

Para resolver problemas de divisão em partes direta e inversamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Nesse capítulo, apresentaremos primeiro as definições para, em seguida, mostrar a aplicação delas em problemas que podem aparecer na sua prova.

Sabemos que a apresentação "crua" das definições pode não ser "facilmente digerível" em um primeiro momento, porém a resolução de problemas tornará as definições mais claras.

Grandezas diretamente proporcionais

Definição de grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é **diretamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre elas é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\textbf{Grandeza B}} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Esse conceito pode ser estendido para quando temos mais de uma grandeza. Uma grandeza A é **diretamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{(\textbf{Grandeza B})\times(\textbf{Grandeza C})\times(\textbf{Grandeza D})} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Problemas com grandezas diretamente proporcionais

Para resolver problemas com grandezas diretamente proporcionais, devemos utilizar os conceitos vistos anteriormente. Sem mais delongas, vamos a dois exemplos.

Quando uma questão disser que duas ou mais grandezas são **proporcionais,** entenda que elas são **diretamente proporcionais**

Em uma pizzaria, a produção diária de pizzas é proporcional ao número de horas trabalhadas pelos seus funcionários.

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas.

Quantas pizzas foram produzidas em um dia em que os funcionários trabalharam 7 horas?

Veja que a grandeza "pizzas produzidas" é diretamente proporcional à grandeza "horas trabalhadas".

$$\frac{\text{pizzas produzidas}}{\text{horas trabalhadas}} = \text{k}$$

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas. Logo:

$$\frac{80}{5} = k$$

Suponha que, ao trabalhar 7 horas, foram produzidas x pizzas. Então:

$$\frac{x}{7} = k$$

Com as duas igualdades acima, podemos escrever:

$$\frac{80}{5} = \frac{x}{7} = k$$

Podemos realizar a "multiplicação cruzada" na igualdade $\frac{80}{5} = \frac{x}{7}$. Temos:

$$5x = 80 \times 7$$

$$x = \frac{80 \times 7}{5}$$

$$x = 112 \text{ pizzas}$$

Observação: a partir desse momento, vamos escrever diretamente a igualdade do tipo $\frac{80}{5} = \frac{x}{7} = k$.

Vamos a um novo problema com mais grandezas envolvidas.

Em uma pizzaria, a produção diária de pizzas é proporcional ao número de horas trabalhadas pelos seus funcionários e ao número de funcionários presentes no expediente.

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas com 8 funcionários.

Quantas pizzas foram produzidas em um dia em que estavam presentes 10 funcionários trabalhando 7 horas?

Veja que a grandeza "pizzas produzidas" é diretamente proporcional às grandezas "horas trabalhadas" e "número de funcionários".

$$\frac{(\text{pizzas produzidas})}{(\text{horas trabalhadas}) \times (\text{número de funcionários})} = \text{k}$$

Supondo que foram produzidas x pizzas no dia em que 10 funcionários trabalharam 7 horas, temos:

$$\frac{80}{5\times 8}=\frac{x}{7\times 10}=k$$

Podemos simplificar $\frac{80}{5\times 8}=\frac{x}{7\times 10}$ e realizar a "multiplicação cruzada" na igualdade.

$$\frac{80}{5\times 8}=\frac{x}{7\times 10}$$

$$\frac{2}{1}=\frac{x}{70}$$

$$2\times 70=1\times x$$

$$x=140 \text{ pizzas}$$

Sequências diretamente proporcionais

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são diretamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}=k$$

Onde **k** é uma constante denominada **constante de proporcionalidade.**

(Pref. Ananindeua/2019) A sequência numérica (6,X,Y,12) é diretamente proporcional a sequência (3,4,5,6). Qual o valor de X+Y?

a) 8

b) 18

c) 16

d) 20

Comentários:

Como a sequência $(6, X, Y, 12)$ é proporcional à sequência $(3,4,5,6)$, temos que:

$$\frac{6}{3}=\frac{X}{4}=\frac{Y}{5}=\frac{12}{6}=k$$

Qual é a constante de proporcionalidade **k**? $\frac{6}{3}=\frac{12}{6}=2.$

Temos, portanto, que:

$$\frac{6}{3}=\frac{X}{4}=\frac{Y}{5}=\frac{12}{6}=2$$

Logo:

$$\frac{X}{4} = 2 \rightarrow X = 8$$

$$\frac{Y}{5} = 2 \rightarrow Y = 10$$

A soma procurada é $X + Y = 8 + 10 = 18$

Gabarito: Letra B.

Aspecto gráfico da proporcionalidade direta

Se duas grandezas são **diretamente proporcionais**, quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta, e quando uma grandeza diminui, a outra também diminui.

Ocorre que essa descrição qualitativa não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas diretamente proporcionais, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **uma grandeza aumenta ou diminui na mesma proporção em que a outra aumenta ou diminui.**

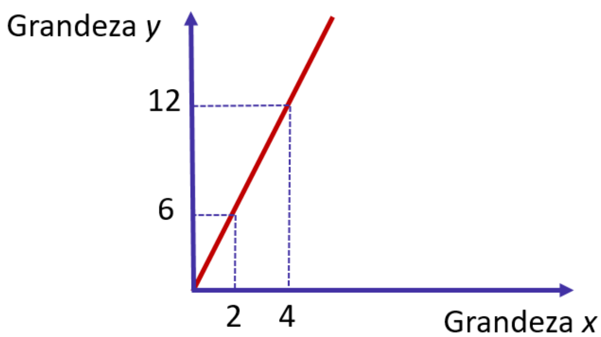
Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve dobrar. Se a primeira grandeza quintuplicar, a segunda grandeza também deve ser multiplicada por 5. Se a primeira grandeza for dividida por 3, a segunda grandeza também deve ser dividida por 3.

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, graficamente, temos uma reta que passa pela origem. Isso porque quando uma grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x, temos:

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \mathrm{k}$$

$$\mathbf{y = kx}$$

(Equação da reta que passa pela origem do plano cartesiano)



Perceba, no exemplo do gráfico, que temos um ponto $(x; y)$ dado pelo par $(2; 6)$. Quando x é multiplicado por 2, o y é multiplicado por 2, e o novo ponto $(x; y)$ obtido é $(4; 12)$.

(Pref. SJC/2019) Duas grandezas y e x, diretamente proporcionais, são representadas, graficamente, por uma função cuja expressão algébrica é:

a) $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \cdot b \cdot c \neq 0$

b) $y = ax^2 + bx$, com a e b reais e $a \cdot b \neq 0$

c) $y = ax^2$, com $a \neq 0$, real

d) $y = ax + b$, com a e b reais e $a \cdot b \neq 0$

e) $y = ax$, com $a \neq 0$, real

Comentários:

Duas grandezas diretamente proporcionais podem ser representadas graficamente por uma reta que passa pela origem do plano cartesiano.

Assim, as grandezas y e x podem ser relacionadas pela função $y = ax$, com a diferente de zero. Nesse caso, a é a constante de proporcionalidade k.

Gabarito: Letra E.

Divisão em partes diretamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes proporcionais** (ou seja, em **partes diretamente proporcionais**) tratam da divisão de uma quantia em partes proporcionais a alguns números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Vamos a um exemplo:

Divida o número 2200 em partes proporcionais a 5, 7 e 10.

Se as partes proporcionais a 5, 7 e 10 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = k$$

A soma das partes é 2.200. Logo, $a + b + c = 2.200$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10}$, temos:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{a + b + c}{5 + 7 + 10}$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{2.200}{22}$$

$$\boxed{\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = 100}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 100.

$$\frac{a}{5} = 100 \ \rightarrow a = 500$$

$$\frac{b}{7} = 100 \ \rightarrow b = 700$$

$$\frac{c}{10} = 100 \ \rightarrow c = 1.000$$

Logo, ao dividir o número 2.200 em partes proporcionais a 5, 7 e 10, obtemos, respectivamente, 500, 700 e 1.000.

As questões de concurso público costumam apresentar uma contextualização. Veja um exemplo.

(Pref. Buritizal/2018) Três amigos fizeram um bolão para um jogo de loteria, sendo que um deles colaborou com R$ 13,00, outro com R$ 14,00 e o terceiro com R$ 22,00. Eles foram sorteados e receberam um prêmio de R$ 7.350,00, que será dividido em partes diretamente proporcionais ao que cada um contribuiu no bolão. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia será

a) R$ 1.950,00.

b) R$ 2.000,00.

c) R$ 2.050,00.

d) R$ 2.100,00.

e) R$ 2.150,00.

Comentários:

Se as partes proporcionais a R$13 , R$14 e R$22 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = k$$

A soma das partes é o total do prêmio, isto é, $a + b + c = R\$\ 7.350$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22}$, temos:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{a + b + c}{13 + 14 + 22}$$

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{7350}{49}$$

$$\boxed{\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = 150}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 100. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia é tal que:

$$\frac{a}{13} = 150$$

$$a = 1.950$$

Gabarito: Letra A.

Algumas questões sobre divisões proporcionais podem ser mais complexas. Para resolvê-las, devemos nos ater aos princípios apresentados neste capítulo.

(SABESP/2019) Um pai pretende dividir R$ 750,00 entre seus 3 filhos de tal forma que cada um receba uma quantia diretamente proporcional à sua própria idade. Se dois dos filhos receberão, respectivamente, R$ 225,00 e R$ 240,00, e se a soma das idades dos dois filhos mais novos é 31 anos, então a idade do filho mais velho é

a) 15

b) 21

c) 19

d) 20

e) 16

Comentários:

Se as quantias recebidas por dois filhos foram R$225 e R$240, a quantia recebida pelo terceiro filho é o que restou do total de R$750:

$$750 - 225 - 240 = \text{ R\$}285$$

Como cada filho recebeu uma quantia proporcional à idade, os filhos mais novos, de idades N_1 e N_2, receberam as duas menores quantias, ou seja, receberam R$225 e R$240. Se a idade do filho mais velho é V, então temos a seguinte proporção:

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = k$$

Lembre-se que a soma das idades dos dois filhos mais novos é 31. Logo, $N_1 + N_2 = 31$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" com as **duas primeiras razões** da proporção acima, temos:

$$\frac{\mathbf{225}}{\boldsymbol{N_1}} = \frac{\mathbf{240}}{\boldsymbol{N_2}} = \frac{285}{V} = \frac{\mathbf{225 + 240}}{\boldsymbol{N_1 + N_2}}$$

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = \frac{465}{\mathbf{31}}$$

$$\boxed{\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = 15}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 15. Vamos obter a idade do filho mais velho:

$$\frac{285}{V} = 15$$

$$\frac{285}{15} = V$$

$$V = 19$$

Gabarito: Letra C.

Problemas de regra de sociedade

Em uma sociedade empresarial, os lucros ou os prejuízos costumam ser distribuídos entre as pessoas de maneira diretamente proporcional ao capital investido.

Em resumo, problemas de "regra de sociedade" são problemas de divisão proporcional com uma historinha envolvendo sócios de uma empresa ou de um negócio. Vejamos um exemplo.

(BB/2013) Uma empresa obteve um lucro líquido de R$ 263.500,00. Esse lucro será dividido proporcionalmente às cotas da sociedade que cada um dos seus quatro sócios possui. O sócio majoritário detém 9 das cotas e os outros três sócios possuem, respectivamente, 1, 3 e 4 cotas da sociedade. A quantia, em reais, que o sócio que possui 3 cotas receberá nessa divisão é igual a

a) 15.500,00.

b) 139.500,00.

c) 46.500,00.

d) 62.000,00.

e) 31.000,00.

Comentários:

O lucro líquido será dividido em partes proporcionais às cotas da sociedade. Se as partes proporcionais a 1 , 3, 4 e 9 forem respectivamente a, b, c e d, temos:

- $$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = k$$

A soma das partes é o lucro líquido total, isto é, $a + b + c + d = R\$\ 263.500$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9}$, temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = \frac{a+b+c+d}{1+3+4+9}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = \frac{263.500}{17}$$

$$\boxed{\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = 15.500}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 15.500. Vamos obter a quantia recebida pelo sócio que tem 3 cotas:

$$\frac{b}{3} = 15.500$$

$$b = 46.500$$

Gabarito: Letra C.

Grandezas inversamente proporcionais

Para trabalhar com **grandezas inversamente proporcionais**, devemos saber que as expressões a seguir querem dizer a mesma coisa:

- A é **inversamente proporcional** a B;
- A é **diretamente proporcional ao inverso de B**;
- A é **diretamente proporcional a** $\frac{1}{B}$.

Essa breve introdução é suficiente para resolver todos os problemas sobre grandezas inversamente proporcionais: basta **converter o problema de grandezas inversamente proporcionais em um problema de grandezas diretamente proporcionais**.

Vamos entrar em detalhes.

Definição de grandezas inversamente proporcionais

Uma grandeza A é **inversamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre a grandeza A e o inverso da grandeza B é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\frac{\textbf{1}}{\textbf{Grandeza B}}} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Note que:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\frac{\textbf{1}}{\textbf{Grandeza B}}} = (\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B})$$

Podemos, então, reescrever a definição assim:

Uma grandeza A é **inversamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, o produto da grandeza A pela grandeza B é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$(\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B}) = \boldsymbol{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Esse conceito pode ser estendido para quando temos mais de uma grandeza. Uma grandeza A é **inversamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza B}}\right)\times\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza C}}\right)\times\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza D}}\right)} = \boldsymbol{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Novamente, podemos reescrever o conceito, dizendo que uma grandeza A é **inversamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$(\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B}) \times (\textbf{Grandeza C}) \times (\textbf{Grandeza D}) = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Problemas com grandezas inversamente proporcionais

Para resolver problemas com grandezas inversamente proporcionais, devemos utilizar os conceitos vistos anteriormente. Vamos a um exemplo.

Em uma fábrica de peças automotivas, o "custo fixo unitário da produção" é inversamente proporcional à quantidade de peças produzidas do tipo A e do tipo B.

Em um determinado mês, foram produzidas 50 peças do tipo A e 100 peças do tipo B, gerando um custo fixo unitário de R$ 50.

Determine o "custo fixo unitário da produção" em um mês em que foram produzidas 25 peças do tipo A e 250 peças do tipo B.

Veja que a grandeza "custo fixo unitário" é **inversamente proporcional** às grandezas "peças tipo A" e "peças tipo B".

Logo, a grandeza "custo fixo unitário" é **diretamente proporcional** **ao inverso** da grandeza "peças tipo A" e **ao inverso** da grandeza "peças tipo B".

$$\frac{(\text{custo fixo unitário})}{\frac{1}{(\text{peças tipo A})} \times \frac{1}{(\text{peças tipo B})}} = \text{k}$$

Em um determinado mês, foram produzidas 50 peças do tipo A e 100 peças do tipo B, gerando um custo fixo unitário de R$50. Logo:

$$\frac{50}{\frac{1}{50} \times \frac{1}{100}} = k$$

Suponha que, no mês em que foram produzidas 25 peças do tipo A e 250 peças do tipo B, o custo fixo unitário seja C. Logo:

$$\frac{C}{\frac{1}{25} \times \frac{1}{250}} = k$$

Com as duas igualdades anteriores, podemos escrever:

$$\frac{\mathbf{50}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}} = \frac{\boldsymbol{C}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{250}}} = k$$

$$\mathbf{50 \times 50 \times 100 = \boldsymbol{C} \times 25 \times 250}$$

$$\frac{50 \times 50 \times 100}{25 \times 250} = C$$

$$C = R\$\ 40$$

(SEFAZ BA/2022) Três grandezas L, M e N são tais que L é diretamente proporcional a M, e M é inversamente proporcional a N.

Quando M = 4 e N = 18, tem-se L = 60.

Quando L = 45, o valor de M + N é

a) 25.

b) 26.

c) 27.

d) 28.

e) 29.

Comentários:

Sabemos que a grandeza L é <u>diretamente proporcional</u> à grandeza M. Logo, sendo k_1 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{L}{M} = k_1$$

Além disso, a grandeza M é <u>inversamente proporcional</u> à grandeza N. Logo, sendo k_2 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$MN = k_2$$

Quando $\boldsymbol{M = 4}$ e $\boldsymbol{N = 18}$, tem-se $\boldsymbol{L = 60}$. Logo:

$$\frac{L}{M} = k_1 \rightarrow \frac{60}{4} = k_1 \rightarrow \boldsymbol{k_1 = 15}$$

$$MN = k_2 \rightarrow 4 \times 18 = k_2 \rightarrow \boldsymbol{k_2 = 72}$$

Devemos determinar o valor de $M + N$ para o caso em que $L = 45$.

$$\frac{L}{M} = k_1 \rightarrow \frac{45}{M} = 15 \rightarrow M = \frac{45}{15} \rightarrow M = 3$$

$$MN = k_2 \rightarrow 3 \times N = 72 \rightarrow N = 24$$

Logo, **para $L = 45$**, temos:

$$M + N = 3 + 24$$
$$= 27$$

Gabarito: Letra C.

Sequências inversamente proporcionais

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são inversamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{y_2}} = \frac{x_3}{\frac{1}{y_3}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{y_n}} = k$$

Onde **k** é uma constante denominada **constante de proporcionalidade.**

Essa definição equivale a dizer que as sequências são inversamente proporcionais quando:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = k$$

(Pref. Cerquilho/2019) Assinale a alternativa que contém uma tabela apresentando duas grandezas inversamente proporcionais.

a)

Grandeza x	3	4	5	6	7	8
Grandeza y	12	11	10	9	8	7

b)

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	12	11	10	9	8	7

c)

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	16	14	12	10	8	6

d)

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	32	16	8	4	2	1

e)

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	–4	–3	–2	–1	0	1

Comentários:

Para duas sequências serem inversamente proporcionais, a multiplicação das grandezas deve ser sempre igual a uma consante, isto é:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = k$$

Vamos analisar cada alternativa.

A) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	3	4	5	6	7	8
Grandeza y	12	11	10	9	8	7
Produto xy	36	44	50	54	56	56

B) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	12	11	10	9	8	7
Produto xy	96	77	60	45	32	21

C) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	16	14	12	10	8	6
Produto xy	128	98	72	50	32	18

D) O produto dos elementos das duas sequências é constante e igual a 32. **Este é o gabarito**.

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	32	16	8	4	2	1
Produto xy	32	32	32	32	32	32

E) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	-4	-3	-2	-1	0	1
Produto xy	-4	-6	-8	-8	0	32

Gabarito: Letra D.

Aspecto gráfico da proporcionalidade inversa

Se duas grandezas são **inversamente proporcionais**, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui, e quando uma grandeza diminui, a outra aumenta.

Ocorre que essa descrição qualitativa não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas inversamente proporcionais, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **quando uma grandeza aumenta, a outra grandeza diminui na mesma proporção, e quando uma grandeza diminui, a outra grandeza aumenta na mesma proporção.**

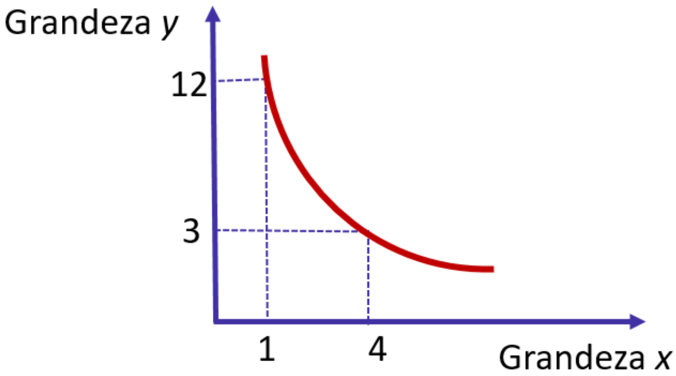
Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve reduzir pela metade. Se a primeira grandeza quintuplicar, a segunda grandeza deve ser dividida por 5. Se a primeira grandeza for dividida por 3, a segunda grandeza deve ser triplicada.

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, graficamente, temos uma curva chamada **hipérbole**.

$$\frac{y}{1/x} = k$$

$$\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$$

(Hipérbole)



Perceba, no exemplo do gráfico, que temos um ponto $(x; y)$ dado pelo par $(1; 12)$. Quando x é multiplicado por 4, o y é dividido por 4, e o novo ponto $(x; y)$ obtido é $(4; 3)$.

(Pref. Campinas/2019) A professora Alice perguntou aos seus alunos o que são grandezas inversamente proporcionais. Analise o diálogo entre um grupo de alunos sobre esse significado:

Júlia:	Analiso a variação de duas grandezas: se uma das grandezas aumenta e a outra diminui, então essas grandezas são necessariamente inversamente proporcionais.
Caio:	Você está errada Júlia, pois há situações em que isso ocorre e as grandezas não são inversamente proporcionais. Essa sua afirmação é necessária, mas não é suficiente para indicar se as grandezas são inversamente proporcionais.
André:	Se uma grandeza aumenta e a outra também aumenta, essas grandezas são diretamente proporcionais e, se uma aumenta e a outra diminui elas são inversamente proporcionais.
Luana:	Eu não analiso esse aspecto de diminuir e aumentar apenas. Se uma grandeza x for inversamente proporcional a y, os produtos dos valores de x pelos correspondentes valores de y são necessariamente iguais.

Considerando as ideias apresentadas pelos quatro estudantes, é correto afirmar que são verdadeiras apenas as argumentações de

a) Júlia e Luana.

b) Júlia e André.

c) Caio e Luana.

d) Caio e André.

e) André e Luana.

Comentários:

Vamos comentar cada ideia apresentada pelos estudantes.

Júlia: O fato de uma das grandezas aumentar enquanto a outra diminui **não necessariamente define que as grandezas são inversamente proporcionais**.

Isso porque é necessário que **uma grandeza diminua na mesma proporção em que a outra aumenta**. Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve reduzir pela metade, por exemplo.

Podemos mostrar o seguinte **contraexemplo** para o argumento de Júlia: considere duas grandezas, dadas por x e y, tais que $y = \frac{1}{x} + 1$. Se x for de 2 para 4, y vai de $\frac{3}{2}$ para $\frac{5}{4}$. Veja que, nesse exemplo, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui. Ocorre que, nesse caso, **x dobrou e y não diminuiu pela metade**.

Caio: O argumento de caio está correto. Para duas grandezas serem inversamente proporcionais é necessário que, quando uma aumenta, a outra diminui. Ocorre que isso não é suficiente para que as grandezas sejam inversamente proporcionais: é necessário que **uma grandeza diminua na mesma proporção em que a outra aumenta**.

André: André errou pelo mesmo motivo de Júlia, por não especificar a forma em que as grandezas devem aumentar/diminuir.

Nas grandezas diretamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra aumenta **na mesma proporção**. Nas grandezas inversamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui **na mesma proporção**.

Luana: Luana definiu corretamente grandezas inversamente proporcionais: os produtos dos valores das duas grandezas devem ser iguais a uma constante.

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = k$$

As argumentações verdadeiras são as do **Caio** e da **Luana**.

Gabarito: Letra C.

Divisão em partes inversamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes inversamente proporcionais** tratam da divisão de uma quantia em partes inversamente proporcionais a alguns números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Divida o número 700 em partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20.

Se as partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = k$$

A soma das partes é 700. Logo, $a + b + c = 700$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}}$, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{700}{\frac{4+2+1}{20}}$$

$$5a = 10b = 20c = \frac{700}{\frac{7}{20}}$$

$$5a = 10b = 20c = 700 \times \frac{20}{7}$$

$$\boxed{5a = 10b = 20c = 2.000}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 2.000.

$$5a = 2.000 \ \rightarrow a = 400$$

$$10b = 2.000 \rightarrow b = 200$$

$$20c = 2.000 \rightarrow c = 100$$

Logo, ao dividir o número 700 em partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20, obtemos, respectivamente, 400, 200 e 100.

As questões de concurso público costumam apresentar uma contextualização. Veja um exemplo.

(BANESTES/2018) Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

Comentários:

Se as quantidades de cédulas de R$10 , R$20 e R$50 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = k$$

A soma do número de cédulas é 272, isto é, $a + b + c = 272$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = \frac{272}{\frac{10+5+2}{100}}$$

$$10a = 20b = 50c = \frac{272}{\frac{17}{100}}$$

$$10a = 20b = 50c = 272 \times \frac{100}{17}$$

$$\boxed{10a = 20b = 50c = 1.600}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.600. O número de cédulas de cada tipo é:

$$10a = 1.600 \ \rightarrow a = 160$$

$$20b = 1.600 \ \rightarrow b = 80$$

$$50c = 1.600 \ \rightarrow c = 32$$

Temos, portanto, 160 cédulas de R$10, 80 cédulas de R$20 e 32 cédulas de R$50. A quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

$$160 \times R\$10 + 80 \times R\$20 + 32 \times R\$\,50$$
$$= R\$\,4.800$$

Gabarito: Letra E.

Grandezas direta e inversamente proporcionais

Quando se apresentam problemas em que uma grandeza A é diretamente proporcional a algumas grandezas e inversamente proporcional a outras grandezas, **devemos transformar tudo para grandezas diretamente proporcionais.**

Se uma grandeza A for diretamente proporcional às grandezas B e C e inversamente proporcional às grandezas D e E, então podemos dizer que **a grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B, C, 1/D e 1/E**. Logo:

$$\frac{(\text{grandeza A})}{(\text{grandeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times \dfrac{1}{(\text{grandeza D})} \times \dfrac{1}{(\text{grandeza E})}} = \mathbf{k}$$

Onde **k** é a constante de proporcionalidade.

Problemas com grandezas direta e inversamente proporcionais

Vamos a um problema.

Em uma fábrica de parafusos, a receita em reais obtida em um mês é diretamente proporcional ao número de parafusos produzidos e inversamente proporcional à cotação do dólar.

Em um determinado mês, foram produzidos 1.000.000 de parafusos e a receita foi de R$ 10.000,00, sendo o dólar cotado a R$ 2,50.

Determine a receita em reais obtida ao se produzir 500.000 parafusos com o dólar cotado a R$ 5,00.

Veja que a grandeza "receita obtida" é diretamente proporcional a grandeza "número de parafusos" e inversamente proporcional à grandeza "cotação do dólar".

$$\frac{(\text{receita obtida})}{(\text{número de parafusos}) \times \dfrac{1}{(\text{cotação do dólar})}} = k$$

Supondo que a receita em reais obtida ao se produzir 500.000 parafusos com o dólar a R$ 5,00 foi x, então:

$$\frac{10.000}{1.000.000 \times \dfrac{1}{2,5}} = \frac{x}{500.000 \times \dfrac{1}{5}} = k$$

$$\frac{10.000 \ \times 2,5}{1.000.000} = \frac{x \ \times 5}{500.000} = k$$

Podemos simplificar a proporção $\frac{10.000 \times 2,5}{1.000.000} = \frac{x \times 5}{500.000}$ para depois realizar a "multiplicação cruzada". Simplificando os denominadores de lados diferentes da igualdade por 500.000, temos:

$$\frac{10.000 \ \times 2,5}{2} = \frac{x \ \times 5}{1}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", temos:

$$2 \times (x \times 5) = 10.000 \times 2,5 \times 1$$

$$10x = 25.000$$

$$x = 2.500$$

Logo, a receita em reais obtida foi de R$ 2.500,00.

Divisão em partes direta e inversamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes direta e inversamente proporcionais** tratam da divisão de uma quantia em partes proporcionais a alguns números e inversamente proporcionais a outros números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Vamos a um exemplo.

Um pai quer dividir a quantia de R$ 15.000 a seus três filhos Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo de modo diretamente proporcional às notas obtidas em uma prova de matemática e de modo inversamente proporcional ao tempo semanal que eles jogam videogame.

Arnaldo obteve 10 em matemática e joga videogame durante 10h por semana.

Bernaldo obteve 8 em matemática e joga videogame durante 2h por semana.

Cernaldo obteve 5 em matemática e joga videogame durante 1h por semana.

Qual foi a quantia em reais que cada filho recebeu?

A quantia foi dividida em partes **diretamente proporcionais à nota obtida em matemática** e **inversamente proporcionais** ao **tempo dispendido com videogame**.

Se Arnaldo recebeu a quantia A, Bernaldo recebeu a quantia B e Cernaldo recebeu a quantia C, temos a seguinte proporção:

$$\frac{A}{\mathbf{10} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}} = \frac{B}{\mathbf{8} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \frac{C}{\mathbf{5} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}} = k$$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = k$$

Temos que a soma das quantias recebidas é R$ 15.000.

$$A + B + C = 15.000$$

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5}$, temos:

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{A + B + C}{1 + 4 + 5}$$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{15.000}{10}$$

$$\boxed{\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = 1.500}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.500.

$$\frac{A}{1} = 1.500 \;\rightarrow A = 1.500$$

$$\frac{B}{4} = 1.500 \;\rightarrow B = 6.000$$

$$\frac{C}{5} = 1.500 \;\rightarrow C = 7.500$$

Logo, Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo receberam, respectivamente, R$ 1.500, R$ 6.000 e R$ 7.500.

QUESTÕES COMENTADAS – FCC

Frações

1. (FCC/ISS Jaboatão dos Guararapes/2024) O dominó é um antigo jogo de tabuleiro que é jogado com 28 peças e cada uma delas com pontos dos dois lados que variam de nenhum a 6 pontos. Com exceção da peça que não há pontos nos dois lados, pode-se ver as outras 27 peças como frações menores do que 1. Por exemplo, a peça com 5 pontos de um lado e 3 pontos do outro lado representaria a fração 3/5, independentemente do lado em que estão os 3 pontos ou os 5 pontos. A soma de todas as frações representadas pelas peças em que pelo menos em um dos lados há 4 pontos é

a) 106/12

b) 119/30

c) 106/15

d) 53/30

e) 44/30

Comentários:

Inicialmente vamos **identificar todas as peças que têm 4 pontos em pelo menos um dos lados** e **obter as frações menores ou iguais a 1 correspondentes**:

- (4,0) → **fração 0/4**;
- (4,1) → **fração 1/4**;
- (4,2) → **fração 2/4**;
- (4,3) → **fração 3/4**;
- (4,4) → **fração 4/4**;
- (4,5) → **fração 4/5**; e
- (4,6) → **fração 4/6**.

Observação: cumpre destacar que o enunciado da questão deveria ter sido mais preciso. Ao invés de informar que "***... pode-se ver as outras 27 peças como frações menores do que 1***", o correto seria informar que "***... pode-se ver as outras 27 peças como frações menores ou iguais a 1***". Por exemplo, para a peça em que há o número 4 dos dois lados, temos a fração 4/4 = 1.

Realizando a soma das frações, temos:

$$\frac{0}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{5}+\frac{4}{6}$$

Como 0/4 é igual a 0, podemos remover essa fração da soma. Somando todas as frações restantes que apresentam o denominador 4, temos:

$$\frac{1+2+3+4}{4}+\frac{4}{5}+\frac{4}{6}$$
$$=\frac{10}{4}+\frac{4}{5}+\frac{4}{6}$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{4}{5}+\frac{4}{6}$$

Para realizar a soma, devemos utilizar como denominador comum o **Mínimo Múltiplo Comum de 2**, **5 e 6**, **que é 30**. Ficamos com:

$$\frac{75+24+20}{30}$$
$$=\frac{119}{30}$$

Gabarito: Letra B.

2. (FCC/TRT CE/2024) Em um fórum há processos trabalhistas, tributários, ambientais e regulatórios. Nesse fórum, 1/5 dos processos são trabalhistas, 1/7 são ambientais e os restantes são regulatórios ou tributários. Sabe-se que há 260 processos ambientais e que há, pelo menos, 100 processos tributários. A quantidade máxima de processos regulatórios é:

a) 1096

b) 1296

c) 1560

d) 1456

e) 1196

Comentários:

Sabemos que, no fórum:

- 1/5 dos processos são trabalhistas,
- 1/7 dos processos são ambientais, e
- Os restantes são processos regulatórios ou tributários.

Além disso, sabemos que:

- Há 260 processos ambientais; e
- **Há**, **no mínimo**, **100 processos tributários**.

Inicialmente, podemos **determinar o número total N de processos**.

Como 1/7 dos processos são ambientais e sabemos que há 260 processos ambientais, temos:

$$\frac{1}{7} \text{ de } N = 260$$

$$\frac{1}{7} \times N = 260$$

$$N = 260 \times 7$$

$$N = 1820$$

Nesse momento, vamos **determinar o número de processos trabalhistas**

Sabemos que 1/5 dos processos são trabalhistas. Logo, o número de processos trabalhistas é:

$$\frac{1}{5} \text{ de } 1820$$

$$= \frac{1}{5} \times 1820$$

$$= 364$$

Podemos agora determinar a **quantidade de processos regulatórios e tributários.**

Os processos regulatórios e tributários correspondem ao restante dos processos. Logo:

$$\binom{\text{Processos}}{\text{Regulatórios}} + \binom{\text{Processos}}{\text{Tributários}} = \text{Total} - \text{Ambientais} - \text{Trabalhistas}$$

$$= 1820 - 260 - 364$$

$$= 1196$$

Por fim, vamos **determinar a quantidade máxima de processos regulatórios.** Sabemos que:

$$\binom{\text{Processos}}{\text{Regulatórios}} + \binom{\text{Processos}}{\text{Tributários}} = 1196$$

$$\binom{\text{Processos}}{\text{Regulatórios}} = 1196 - \binom{\text{Processos}}{\text{Tributários}}$$

Segundo o enunciado, **há**, **no mínimo**, **100 processos tributários**. Para encontrar a **quantidade máxima de processos regulatórios**, devemos **minimizar o número de processos tributários**:

$$\underbrace{\binom{\text{Processos}}{\text{Regulatórios}}}_{\textbf{Maximizar}} = 1196 - \underbrace{\binom{\text{Processos}}{\text{Tributários}}}_{\textbf{Minimizar}}$$

Assim, o número máximo de processos regulatórios será:

$$1196 - \mathbf{100}$$

$$= 1096$$

Gabarito: Letra A.

3. (FCC/TRT 9/2022) O valor da soma $\frac{1}{2022^{-2}+1} + \frac{1}{2022^{-1}+1} + \frac{1}{2022^{0}+1} + \frac{1}{2022^{1}+1} + \frac{1}{2022^{2}+1}$ é:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{5}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{2}$

e) $\frac{9}{2}$

Comentários:

Vamos realizar a soma em questão:

$$\frac{1}{\mathbf{2022^{-2}} + 1} + \frac{1}{\mathbf{2022^{-1}} + 1} + \frac{1}{\mathbf{2022^{0} + 1}} + \frac{1}{2022^{1} + 1} + \frac{1}{2022^{2} + 1}$$

A partir das propriedades da potenciação, sabemos que $\mathbf{2022^{-2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2022^{2}}}$ e que $\mathbf{2022^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2022^{1}}}$. Além disso, $\mathbf{2022^{0}} = \mathbf{1}$. Logo, ficamos com a seguinte soma:

$$\frac{1}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2022^{2}}} + 1} + \frac{1}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2022^{1}}} + 1} + \frac{1}{\mathbf{1} + 1} + \frac{1}{2022^{1} + 1} + \frac{1}{2022^{2} + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2022^{2}} + \frac{2022^{2}}{2022^{2}}} + \frac{1}{\frac{1}{2022^{1}} + \frac{2022^{1}}{2022^{1}}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2022^{1} + 1} + \frac{1}{2022^{2} + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1 + 2022^{2}}{2022^{2}}} + \frac{1}{\frac{1 + 2022^{2}}{2022^{1}}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2022^{1} + 1} + \frac{1}{2022^{2} + 1}$$

As duas primeiras parcelas correspondem ao inverso de, respectivamente, $\frac{1+2022^{2}}{2022^{2}}$ e $\frac{1+2022^{2}}{2022^{1}}$. Ficamos com:

$$\frac{2022^{2}}{1 + 2022^{2}} + \frac{2022^{1}}{1 + 2022^{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2022^{1} + 1} + \frac{1}{2022^{2} + 1}$$

Reorganizando os denominadores das duas primeiras parcelas, temos:

$$\frac{2022^{2}}{\mathbf{2022^{2} + 1}} + \frac{2022^{1}}{\mathbf{2022^{1} + 1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\mathbf{2022^{1} + 1}} + \frac{1}{\mathbf{2022^{2} + 1}}$$

Podemos agora somar as frações que apresentam o denominador $\mathbf{2022^2+1}$ e somar as frações que apresentam o denominador $\mathbf{2022^1+1}$. Ficamos com:

$$\frac{2022^2+1}{\mathbf{2022^2+1}}+\frac{2022^1+1}{\mathbf{2022^1+1}}+\frac{1}{2}$$

$$=1+1+\frac{1}{2}$$

$$=2+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{4+1}{2}$$

$$=\frac{5}{2}$$

Gabarito: Letra B.

4. (FCC/TRT 4/2022) Um terreno foi dividido entre quatro irmãos, Ana, Bento, Carla e Daniel. Ana ficou com metade do terreno; Bento ficou com um terço do terreno; Carla ficou com um sétimo do terreno e Daniel ficou com 500 m². A área total do terreno, antes da divisão, era de:

a) 21.000 m²

b) 20.000 m²

c) 25.000 m²

d) 18.000 m²

e) 15.000 m²

Comentários:

Suponha que a área total do terreno seja A. Segundo o enunciado:

- Ana ficou com metade do terreno: $\frac{1}{2}A$;
- Bento ficou com um terço do terreno: $\frac{1}{3}A$;
- Carla ficou com um sétimo do terreno: $\frac{1}{7}A$;
- Daniel ficou com $500\ \text{m}^2$.

A soma das partes recebidas pelos quatro irmãos corresponde à totalidade do terreno. Logo:

$$A=\frac{1}{2}A+\frac{1}{3}A+\frac{1}{7}A+500$$

Como 2, 3 e 7 são primos, o MMC entre eles é $2 \times 3 \times 7 = 42$. Logo:

$$A = \frac{21A + 14A + 6A}{42} + 500$$

$$A = \frac{41}{42}A + 500$$

$$A - \frac{41}{42}A = 500$$

$$\frac{42A - 41A}{42} = 500$$

$$\frac{A}{42} = 500$$

$$A = 500 \times 42$$

$$A = 21.000 \text{ m}^2$$

Gabarito: Letra A.

5. (FCC/TRT 9/2022) Em relação às frações $\frac{7}{15}, \frac{8}{21}, \frac{2}{5}$ tem-se que

a) $\frac{8}{21} < \frac{7}{15} < \frac{2}{5}$.

b) $\frac{2}{5} < \frac{8}{21} < \frac{7}{15}$.

c) $\frac{8}{21} < \frac{2}{5} < \frac{7}{15}$.

d) $\frac{7}{15} < \frac{2}{5} < \frac{8}{21}$.

e) $\frac{2}{5} < \frac{7}{15} < \frac{8}{21}$.

Comentários:

Para comparar frações, devemos encontrar **frações equivalentes** que apresentem o mesmo denominador. O denominador comum será o **MMC** entre **5**, **15** e **21**.

Temos a seguinte decomposição em fatores primos dos números:

$5 = \quad 5^1$

$15 = 3^1 \times 5^1$

$21 = 3^1 \quad \times 7^1$

O MMC é obtido tomando-se **todos** os fatores primos com os **maiores** expoentes. Logo:

$$\text{MMC}(5;15;21) = 3^1 \times 5^1 \times 7^1 = 105$$

As frações equivalentes a $\frac{7}{15}, \frac{8}{21}, \frac{2}{5}$ com o denominador **105** são:

$$\frac{7}{15} = \frac{(105 \div 15) \times 7}{105} = \frac{49}{105}$$

$$\frac{8}{21} = \frac{(105 \div 21) \times 8}{105} = \frac{40}{105}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{(105 \div 5) \times 2}{105} = \frac{42}{105}$$

A ordem crescente entre as frações com o denominador 105 é $\frac{40}{105} < \frac{42}{105} < \frac{49}{105}$. Logo, a ordem crescente das frações do problema é $\frac{8}{21} < \frac{2}{5} < \frac{7}{15}$.

Gabarito: Letra C.

6. (FCC/TRT 23/2022) Em uma fábrica de produção de robôs, registrou-se o número total de robôs produzidos em 3 anos. No primeiro ano foram produzidos 2/5 do total, no segundo ano foram produzidos 1/3 do total e no terceiro ano foram produzidos 8 robôs.

O número de robôs produzidos no primeiro ano foi

a) 8

b) 10

c) 12

d) 9

e) 6

Comentários:

Suponha que o número total de robôs produzidos em 3 anos seja T. Segundo o enunciado:

- No primeiro ano foram produzidos 2/5 do total: $\frac{2}{5}T$;
- No segundo ano foram produzidos 1/3 do total: $\frac{1}{3}T$;
- No terceiro ano foram produzidos 8 robôs.

A soma da produção nos três anos corresponde a T. Logo:

$$T = \frac{2}{5}T + \frac{1}{3}T + 8$$

Como 3 e 5 são primos, o MMC entre eles é $3 \times 5 = 15$. Logo:

$$T = \frac{6T + 5T}{15} + 8$$

$$T = \frac{11}{15}T + 8$$

$$T - \frac{11}{15}T = 8$$

$$\frac{15T - 11T}{15} = 8$$

$$\frac{4T}{15} = 8$$

$$T = \frac{8 \times 15}{4}$$

$$T = 30$$

A questão pergunta pelo número de robôs produzidos no primeiro ano:

$$\frac{2}{5}T$$

$$= \frac{2}{5} \times 30$$

$$= 12$$

Gabarito: Letra C.

7. (FCC/TRT 22/2022) Uma empresa de construção possui 48 funcionários divididos igualmente em 4 setores. No setor da Engenharia, 2/3 são formados em Engenharia Civil sendo metade desses mulheres. No setor de Contabilidade todos os funcionários são homens, no setor de Administração 1/4 dos funcionários são mulheres e, finalmente, no setor de Arquitetura, metade são mulheres. No máximo, o número de mulheres dentre os 48 funcionários é

a) 31.

b) 17.

c) 25.

d) 13.

e) 12.

Comentários:

Devemos obter o **número máximo de mulheres** dentre os 48 funcionários da empresa **sem que as condições do enunciado sejam violadas**.

"Uma empresa de construção possui 48 funcionários divididos igualmente em 4 setores."

Isso significa que, em cada setor, temos $48 \div 4 = 12$ funcionários.

"No setor da Engenharia, 2/3 são formados em Engenharia Civil sendo metade desses mulheres."

Temos 12 funcionários no setor de Engenharia. $\frac{2}{3}$ $\mathbf{de}$ 12 são formados em Engenharia Civil. Logo:

- $\frac{2}{3} \times 12 =$ **8 funcionários são formados em Engenharia Civil**;
- Os demais funcionários do setor de Engenharia, $12 - 8 =$ **4 funcionários**, **não são formados em Engenharia Civil**.

Metade dos **funcionários que são formados em Engenharia Civil** são Mulheres. Logo, podemos resumir o setor de Engenharia da seguinte forma:

- **4** funcionários são **mulheres** formadas em **Engenharia Civil**;
- **4** funcionários são **homens** formados em **Engenharia Civil**; e
- **4** funcionários, que podem ser **homens ou mulheres**, **não são formados em Engenharia Civil**.

"No setor de Contabilidade todos os funcionários são homens..."

Logo, os **12 funcionários** do setor de Contabilidade são **homens**.

"...no setor de Administração 1/4 dos funcionários são mulheres..."

Temos 12 funcionários no setor de Administração. $\frac{1}{4}$ $\mathbf{de}$ 12 são mulheres. Logo:

- $\frac{1}{4} \times 12 =$ **3 funcionários são mulheres**;
- $12 - 3 =$ **9 funcionários são homens**.

"...e, finalmente, no setor de Arquitetura, metade são mulheres."

Temos 12 funcionários no setor de Arquitetura. $\frac{1}{2}$ $\mathbf{de}$ 12 são mulheres. Logo:

- $\frac{1}{2} \times 12 =$ **6 funcionários são mulheres**;
- $12 - 6 =$ **6 funcionários são homens**.

—

Veja que, até o momento, o seguinte total de funcionários é necessariamente mulher:

$$\underbrace{4}_{\substack{\text{Setor de Engenharia} \\ \text{que} \\ \text{são formados em Eng. Civil}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{Setor de} \\ \text{Contabilidade}}} + \underbrace{3}_{\substack{\text{Setor de} \\ \text{Administração}}} + \underbrace{6}_{\substack{\text{Setor de} \\ \text{Arquitetura}}} = 13$$

Observe que, segundo as informações presentes no enunciado, não sabemos se são homens ou são mulheres os **04 funcionários do setor de Engenharia que não são formados em Engenharia Civil**.

Veja que **o número de mulheres** será **maximizado** se esses 04 funcionários forem mulheres. Logo, o máximo de mulheres que essa empresa pode ter dentre seus 48 funcionários é:

$$13 + 4 = 17 \text{ mulheres}$$

Gabarito: Letra B.

8. (FCC/TJ CE/2022) Uma pesquisa em uma universidade verificou que cada estudante utiliza-se de apenas um meio de transporte para se deslocar até lá. A pesquisa também mostrou que três quartos de seus estudantes vão de ônibus, um décimo vai de carro, um oitavo vai de bicicleta e os 200 estudantes restantes vão a pé. O número de estudantes entrevistados é igual a

a) 24000.

b) 16000.

c) 20000.

d) 8000.

e) 6000.

Comentários:

Suponha que o número total de estudantes entrevistados seja T. Segundo o enunciado:

- Três quartos dos estudantes vão de ônibus: $\frac{3}{4}T$;
- Um décimo vai de carro: $\frac{1}{10}T$;
- Um oitavo vai de bicicleta: $\frac{1}{8}T$; e
- 200 estudantes restantes vão a pé.

A soma de todos os estudantes entrevistados corresponde a T. Logo:

$$T = \frac{3}{4}T + \frac{1}{10}T + \frac{1}{8}T + 200$$

O MMC entre 4, 8 e 10 é 40. Logo:

$$T = \frac{30T + 4T + 5T}{40} + 200$$

$$T = \frac{39T}{40} + 200$$

$$T - \frac{39T}{40} = 200$$

$$\frac{40T - 39T}{40} = 200$$

$$\frac{T}{40} = 200$$

$$T = 200 \times 40$$

$$T = 8.000$$

Logo, o número de estudantes entrevistados é igual a 8.000.

Gabarito: Letra D.

9. (FCC/TRT 9/2022) Os preços dos bilhetes para uma peça de teatro são diferentes para professores e para alunos. O bilhete de professor custa R$ 35,00 e o bilhete de aluno custa 3/7 do preço do bilhete de professor.

O valor total gasto, em reais, com as entradas para uma peça de teatro de um grupo de 91 alunos e 6 professores é

a) 1.775,00.

b) 1.375,00.

c) 1.175,00.

d) 1.575,00.

e) 1.975,00.

Comentários:

Segundo o enunciado, o bilhete de aluno custa 3/7 do preço do bilhete de professor. Logo, o bilhete de aluno custa:

$$\frac{3}{7} \text{ de } 35$$

$$= \frac{3}{7} \times 35$$

$$= 3 \times 5$$

$$= \text{R\$ } 15$$

Portanto:

- O bilhete de **professor** custa **R$ 35,00**; e
- O bilhete de **aluno** custa R**$ 15,00**.

Como o grupo é composto por **91 alunos** e **6 professores**, o valor total gasto com as entradas é:

$$\mathbf{6} \times \mathbf{35} + \mathbf{91} \times \mathbf{15}$$

$$= 210 + 1.365$$

$$= \text{R\$ } 1.575{,}00$$

Gabarito: Letra D.

10. (FCC/MANAUSPREV/2021) Marina e Paula trabalham o mesmo número de horas diárias em um escritório. Na segunda-feira, Marina usou $\frac{3}{5}$ das horas de trabalho para arquivar processos. Nesse mesmo dia, Paula usou, ininterruptamente, $\frac{2}{3}$ das horas que Marina usou arquivando processos para conferir o trabalho realizado por Marina. Se Paula começou o trabalho de conferência às 8h40 e terminou às 11h16, então, cada uma dessas funcionárias trabalha diariamente nesse escritório um total de

a) 7 horas e 40 minutos.

b) 7 horas e 20 minutos.

c) 6 horas e 40 minutos.

d) 6 horas e 30 minutos.

e) 6 horas e 20 minutos.

Comentários:

Paula começou o trabalho de conferência às **8h40min** e terminou às **11h16min**. Logo, ela levou o seguinte tempo para conferir o trabalho de Marina:

$$11\text{h } 15\text{min} - 8\text{h}40\text{min}$$

Como **1h = 60min**, podemos escrever **11h16min** como **10h76min** para, na sequência, realizar a subtração. Ficamos com:

$$10\text{h}76\text{min} - 8\text{h}40\text{min}$$

$$= 2\text{h}36\text{min}$$

Como **1h = 60min**, o tempo total em minutos é:

$$2 \times 60 + 26 = 120 + 36 = 156\text{min}$$

Esses **156min** correspondem a $\frac{2}{3}$ das horas que Marina utilizou para arquivar os processos. Logo:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \left(\text{Tempo}_{\substack{\text{Marina}\\\text{Processos}}}\right) = 156$$

$$\frac{2}{3} \times \text{Tempo}_{\substack{\text{Marina}\\\text{Processos}}} = 156$$

$$\text{Tempo}_{\substack{\text{Marina}\\\text{Processos}}} = \frac{156 \times 3}{2}$$

$$\text{Tempo}_{\substack{\text{Marina}\\\text{Processos}}} = 234 \text{ min}$$

Logo, Marina levou **234min** para arquivar os processos.

Sabemos que Marina usou 3/5 das horas de trabalho para arquivar processos. Considerando que o tempo de trabalho de Marina é T, temos:

$$\frac{3}{5} \text{ de } T = 234$$

$$\frac{3}{5} \times T = 234$$

$$T = \frac{234 \times 4}{3}$$

$$T = 390 \text{ min}$$

Ao dividir **390min** por **60min**, obtemos **quociente 6** e **resto 30**. Portanto, o tempo que Marina trabalhou corresponde a **6 horas** **e** **30 minutos**.

Note, ainda, que como Marina e Paula trabalham o mesmo número de horas diárias, esse é o tempo que cada uma das funcionárias trabalha diariamente. O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Gabarito: Letra D.

11.(FCC/BANRISUL/2019) Considere os dados, abaixo

$$x = \frac{7}{9}, y = \frac{16}{21} \text{ e } z = \frac{11}{14}$$

É correto afirmar que

a) y < x < z.

b) z < x < y.

c) y < z < x.

d) z < y < x.

e) x < z < y.

Comentários:

Para comparar frações, devemos encontrar **frações equivalentes** que apresentem o mesmo denominador. O denominador será o MMC entre 9, 21 e 14.

$9 = \quad 3^2$

$21 = \quad 3 \times 7$

$14 = 2 \quad \times 7$

O MMC é obtido tomando-se todos os fatores com os maiores expoentes. Logo:

$$\text{MMC}(9; 21; 14) = 2 \times 3^2 \times 7 = 126$$

As frações equivalentes a x, y e z com o denominador 126 são:

$$x = \frac{98}{126}, y = \frac{96}{126}, z = \frac{99}{126}$$

Logo, temos a ordem crescente $y < x < z$.

Gabarito: Letra A.

12. (FCC/CM Fortaleza/2019) O valor da expressão $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2019}\right)$ é

a) $\frac{2}{1009}$

b) $\frac{1}{1008}$

c) $\frac{2}{2018}$

d) $\frac{1}{2019}$

e) $\frac{2}{2019}$

Comentários:

Observe a expressão do enunciado com mais termos explícitos:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \left(1-\frac{1}{4}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{2017}\right) \times \left(1-\frac{1}{2018}\right) \times \left(1-\frac{1}{2019}\right)$$

Vamos realizar a subtração indicada dentro de cada termo entre parênteses.

$$= \left(\frac{2-1}{2}\right) \times \left(\frac{3-1}{3}\right) \times \left(\frac{4-1}{4}\right) \times \cdots \times \left(\frac{2017-1}{2017}\right) \times \left(\frac{2018-1}{2018}\right) \times \left(\frac{2019-1}{2019}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \cdots \times \left(\frac{2016}{2017}\right) \times \left(\frac{2017}{2018}\right) \times \left(\frac{2018}{2019}\right)$$

Perceba que, para todos os termos, **exceto o último**, podemos simplificar o denominador de um termo com o numerador do termo seguinte.

O resultado da multiplicação, após as simplificações, será o numerador do primeiro termo (1) com o denominador do último termo (2019).

$$= \left(\frac{1}{1}\right) \times \left(\frac{1}{1}\right) \times \left(\frac{1}{1}\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{1}\right) \times \left(\frac{1}{1}\right) \times \left(\frac{1}{2019}\right)$$

$$= \frac{1}{2019}$$

Gabarito: Letra D.

13. (FCC/Pref. SJRP/2019) No início de uma campanha eleitoral, o candidato A possuía $\frac{5}{8}$ das intenções de voto e o candidato B, $\frac{3}{8}$. Após uma ação promocional do candidato B, $\frac{1}{3}$ das intenções de voto do candidato A migrou para o candidato B. A nova proporção de votos do candidato A é:

a) $\frac{5}{24}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{2}{3}$

Comentários:

Considere que o total de intenções de voto seja V.

O candidato A possuía $\frac{5}{8}$ das intenções de voto (V) e perdeu $\frac{1}{3}$ das suas intenções de voto.

$$\text{Novas intenções de voto para A} = \text{Intenções originais} - \text{Perdas}$$

$$= \frac{5}{8}\text{ de V} - \frac{1}{3}\text{ das (Intenções originais)}$$

$$= \frac{5}{8}\text{ de V} - \frac{1}{3}\text{ de }\left(\frac{5}{8}\text{ de V}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{8}V\right) - \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{8}V\right)$$

Colocando $\frac{5}{8}V$ em evidência:

$$= \left(\frac{5}{8}V\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{5}{8}\text{V} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{5}{12}\text{V}$$

Logo, as novas intenções de voto para A é 5/12 do total de votos.

Gabarito: Letra B.

14. (FCC/Pref. SJRP/2019) João gasta 18 minutos de ônibus para ir de sua casa até o trabalho e 45 minutos se for a pé. Em um dia ensolarado, João desceu do ônibus faltando 1/3 do caminho a ser percorrido e completou o percurso até o trabalho a pé. Supondo que as velocidades, tanto do ônibus quanto a de João, são constantes durante o trajeto, o tempo gasto por João para ir ao trabalho nesse dia foi de

a) 24 minutos.

b) 27 minutos.

c) 30 minutos.

d) 33 minutos.

e) 21 minutos.

Comentários:

Como João desceu do ônibus faltando 1/3 do caminho, isso significa que o caminho já percorrido por ônibus antes de descer é a **fração complementar**:

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

Portanto, João percorreu 2/3 do caminho de ônibus e 1/3 do caminho a pé.

Se o trajeto fosse todo de ônibus, ele teria gasto 18 minutos. Como apenas 2/3 do trajeto foi de ônibus, o tempo gasto dentro dele é 2/3 de 18min:

$$\frac{2}{3} \times 18 \text{ min} = 12 \text{ min}$$

Caso o trajeto fosse todo a pé, João levaria 45 minutos. Como 1/3 do trajeto foi a pé, o tempo gasto a pé foi 1/3 de 45min:

$$\frac{1}{3} \times 45\text{min} = 15 \text{ min}$$

Como foram 12 minutos de ônibus e 15 min a pé, o tempo total gasto por João foi de:

$$12 \text{ min } + 15 \text{ min } = 27\text{min}$$

Gabarito: Letra B.

15.(FCC/SABESP/2019) Um armazém possui 400 caixas de garrafas, cada caixa com 15 garrafas, sendo que dois terços das garrafas são de água mineral e as demais são de suco de uva. Dois quintos das garrafas de água são de 1,5 L, e um quinto das garrafas de suco são de 1,5 L. O total de garrafas de 1,5 L nesse armazém é

a) 2.000.

b) 2.700.

c) 3.900.

d) 3.600.

e) 3.200.

Comentários:

Como temos 400 caixas e 15 garrafas por caixa, total de garrafas do armazém é dado por:

$$400 \times 15 = 6.000 \text{ garrafas}$$

Se $\frac{2}{3}$ do total de garrafas são de água, então o **total de garrafas de água** é:

$$\frac{2}{3} \text{ do (total de garrafas)}$$

$$= \frac{2}{3} \textbf{de } 6.000$$

$$= \frac{2}{3} \times 6.000$$

$$= 4.000 \text{ garrafas de água}$$

O restante das garrafas é de suco de uva. Logo, temos $6.000 - 4.000 = 2.000$ garrafas de suco de uva.

2/5 das garrafas de água tem 1,5 litros, e **1/5 das garrafas de suco de uva** tem 1,5 litros. Logo, o total de garrafas com 1,5 litros é:

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} \textbf{de } \mathbf{4.000} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} \textbf{de } \mathbf{2.000}$$

$$= \frac{2}{5} \times 4.000 + \frac{1}{5} \times 2.000$$

$$= 1.600 + 400$$

$$= 2.000 \text{ garrafas}$$

Logo, temos um total de **2.000 garrafas de 1,5 litros**.

Gabarito: Letra A.

16. (FCC/Pref. Recife/2019) Um reservatório de água tem 1/5 de sua capacidade ocupada. Após a adição de 32.400 litros de água, o reservatório ficou com 7/8 de sua capacidade ocupada. A capacidade, em litros, do reservatório é de

a) 37.000.

b) 48.000.

c) 25.920.

d) 40.500.

e) 23.350.

Comentários:

Suponha que o reservatório tenha uma capacidade de C litros.

A capacidade inicialmente ocupada do reservatório é $\frac{1}{5}$ de C, ou seja, $\frac{1}{5}C$.

Ao adicionar 32.400 litros de água, o reservatório ficou ocupado com $\frac{7}{8}C$. Isso significa que:

$$\frac{1}{5}C + 32.400 = \frac{7}{8}C$$

$$32.400 = \frac{7}{8}C - \frac{1}{5}C$$

O MMC entre 8 e 5 é 40. Logo:

$$32.400 = \frac{35}{40}C - \frac{8}{40}C$$

$$32.400 = \frac{35 - 8}{40}C$$

$$32.400 = \frac{27}{40}C$$

$$\frac{27}{40}C = 32.400$$

$$C = \frac{32.400 \times 40}{27}$$

$$C = 1.200 \times 40$$
$$C = 48.000$$

Logo, a capacidade total do reservatório é de 48.000 litros.

Gabarito: Letra B.

17. (FCC/CM Fortaleza/2019) Algumas raposas estão comendo os ovos de um depósito. No primeiro dia elas comeram $\frac{1}{8}$ dos ovos. No segundo dia elas comeram $\frac{1}{5}$ dos ovos que sobraram e no terceiro dia comeram $\frac{1}{3}$ dos ovos que ainda restaram. Nesses três dias nenhum ovo foi reposto ou retirado do depósito. A fração dos ovos que inicialmente estavam no depósito e que sobraram intactos é

a) $\frac{7}{15}$

b) $\frac{119}{120}$

c) $\frac{7}{120}$

d) $\frac{1}{24}$

e) $\frac{1}{36}$

Comentários:

Seja T o total de ovos do depósito.

Primeiro dia

No primeiro dia, foram **comidos** 1/8 do total de ovos. Logo, o total de **ovos restantes** após o primeiro dia é dado por $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ do total de ovos.

$$\frac{7}{8} \text{ de T}$$
$$= \frac{7}{8} \times T$$
$$= \boldsymbol{\frac{7}{8}T}$$

Segundo dia

No segundo dia, foram **comidos** 1/5 dos ovos que restaram do primeiro dia. Logo, o total de **ovos restantes** após o segundo dia é $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ dos ovos que restaram do primeiro dia.

$$\frac{4}{5} \text{ de } \frac{7}{8}T$$
$$= \frac{4}{5} \times \frac{7}{8}T$$

$$= \frac{7}{10}T$$

Terceiro dia

No terceiro dia, foram **comidos** 1/3 dos ovos que restaram do segundo dia. Logo, o total de **ovos restantes** após o terceiro dia é dado por $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ dos ovos que restaram do segundo dia.

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{7}{10}T$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{7}{10}T$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{7}{5}T$$

$$= \frac{7}{15}T$$

Portanto, após o terceiro dia, restaram $\frac{7}{15}$ do total de ovos iniciais.

Gabarito: Letra A.

18. (FCC/Pref. Recife/2019) Antônio, Bernardo e Carlos adquiriram um terreno em sociedade de modo que a Antônio coube 1/4 do valor do terreno, a Bernardo, 1/3 e a Carlos, o restante. Antônio vendeu sua parte aos outros dois sócios, metade a cada um deles. Após essa transação, a parte que cabe a Carlos corresponde a

a) 3/5 do valor do terreno.

b) 7/12 do valor do terreno.

c) 5/8 do valor do terreno.

d) 2/3 do valor do terreno.

e) 13/24 do valor do terreno.

Comentários:

Seja V o valor do terreno.

Inicialmente, a parte do valor do terreno que pertence a Antônio e Bernardo conjuntamente é:

$$\frac{1}{4}V + \frac{1}{3}V$$

$$= \frac{3+4}{12}V$$

$$= \frac{7}{12}V$$

A Carlos cabe o restante do valor terreno:

$$V - \frac{7}{12}V$$
$$= \frac{12-7}{12}V$$
$$= \frac{5}{12}V$$

Como Antônio vendeu sua parte aos sócios, metade a cada um, Carlos passou a ter a sua parte inicial (5/12 do valor do terreno) mais metade da parte de Antônio (metade de 1/4 do valor terreno). Logo, Carlos a pertence:

$$\frac{5}{12}V + \frac{1}{2}\ \mathbf{de}\ \frac{1}{4}V$$
$$= \frac{5}{12}V + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}V$$
$$= \frac{5}{12}V + \frac{1}{8}V$$
$$= \frac{10+3}{24}V$$
$$= \frac{13}{24}V$$

Logo, a parte que cabe a Carlos corresponde a 13/24 do valor do terreno.

Gabarito: Letra E.

19. (FCC/DETRAN SP/2019) Uma fábrica produz camisetas em duas cores: brancas ou vermelhas. No último mês, 3/5 do total de camisetas produzidas eram brancas e as demais, vermelhas. Ainda, 3/10 do total de camisetas produzidas de cada cor tinham estampa na frente e as demais, atrás. Se 216 das camisetas produzidas naquele mês eram brancas com estampa na frente, então o número de camisetas vermelhas com estampa atrás foi de

a) 720.

b) 504.

c) 142.

d) 480.

e) 336.

Comentários:

Seja o total de camisetas representado pela letra T.

3/5 do total de camisetas eram brancas, ou seja, o **total de camisetas brancas é $\frac{3}{5}T$**.

3/10 das camisetas de cada cor tem estampa na frente. Logo, o total de **camisetas brancas com estampa na frente** é:

$$\frac{3}{10} \text{ de (camisetas brancas)}$$

$$= \frac{3}{10} \times \left(\frac{3}{5}T\right)$$

$$\boldsymbol{\frac{9}{50}T}$$

Sabemos que o total de camisetas brancas com estampa na frente é 216. Logo:

$$\boldsymbol{\frac{9}{50}T} = 216$$

$$T = \frac{216 \times 50}{9}$$

$$T = 1.200$$

Temos, portanto, um **total de 1.200 camisetas**.

Como 3/5 do total de camisetas eram brancas, então a fração complementar corresponde às **camisetas vermelhas**:

$$1 - \frac{3}{5} =$$

$$\frac{5-3}{5} = \boldsymbol{\frac{2}{5}}$$

Como 3/10 das camisetas de cada cor tem estampa na frente, a fração complementar corresponde às **camisetas de cada cor com estampa atrás**:

$$1 - \frac{3}{10} =$$

$$\frac{10-3}{10} = \frac{7}{10}$$

Logo, o **total de camisetas vermelhas com estampa atrás** é:

$$\frac{7}{10} \text{ das (camisetas vermelhas)}$$

$$= \frac{7}{10} \times \left(\frac{2}{5} \text{ do total de camisetas}\right)$$

$$= \frac{7}{10} \times \left(\frac{2}{5} \times 1.200\right)$$

Vamos simplificar 1.200 com 10 e com 5:

$$= 7 \times 2 \times 24$$

$$\boldsymbol{= 336 \text{ camisetas}}$$

Gabarito: Letra E.

20. (FCC/AFAP/2019) A rodovia que liga a cidade A à cidade B possui duas saídas: uma para a cidade C e mais a frente uma para a cidade D. A saída para a cidade C está situada a 1/5 de toda rodovia medido a

partir do ponto de partida na cidade A. Viajando mais 27 km pela rodovia em sentido da cidade B, encontramos a segunda saída que é a que vai para a cidade D. O trecho da segunda saída até o final da rodovia corresponde a 13/20 de toda a rodovia. Logo a fração que corresponde ao trecho entre a primeira e a segunda saída e o percurso total da rodovia, em quilômetros, é

a) 17/20 e 180.

b) 3/20 e 200.

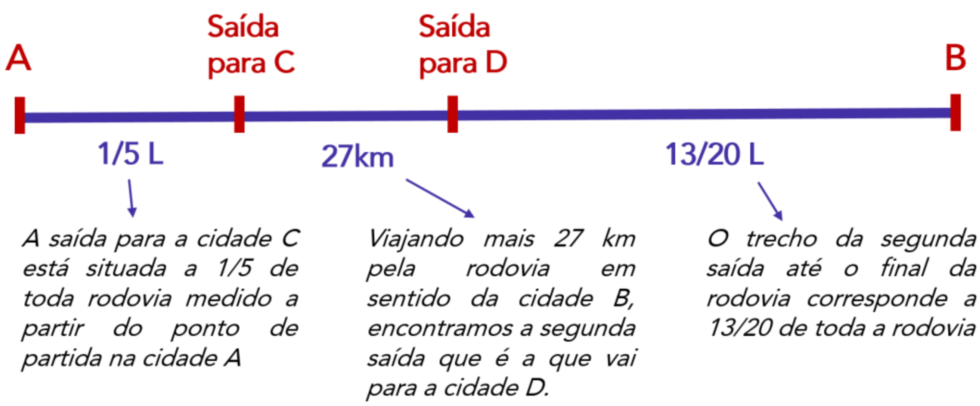
c) 14/25 e 99.

d) 3/20 e 180.

e) 14/25 e 200.

Comentários:

Considere que o percurso total da rodovia que liga as cidades A e B é L quilômetros. A figura abaixo resume as medidas indicadas pelo problema:



O **percurso total da rodovia** ($\boldsymbol{L}$) é dado pela soma dos três trechos:

$$L = \frac{1}{5}L + 27 + \frac{13}{20}L$$

$$L - \frac{1}{5}L - \frac{13}{20}L = 27$$

$$\frac{20L - 4L - 13L}{20} = 27$$

$$\frac{3L}{20} = 27$$

$$L = \frac{27 \times 20}{3}$$

$$\boldsymbol{L = 180\ \mathbf{km}}$$

A **fração que corresponde ao trecho entre a primeira e a segunda saída** é dada pela distância do trecho dividido pela distância total da rodovia:

$$\frac{27\ km}{180\ km} = \boldsymbol{\frac{3}{20}}$$

A resposta, portanto, é a alternativa D.

Gabarito: Letra D.

21.(FCC/SABESP/2018) Três quintos da área de uma garagem será destinada à construção de um jardim, e $\frac{5}{21}$ desse jardim será plantado com árvores frutíferas. Dessa forma, a fração da área da garagem que será destinada à parte do jardim plantada com árvores frutíferas é igual a

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{35}$

d) $\frac{88}{105}$

e) $\frac{1}{35}$

Comentários:

Se a área da garagem for G, temos que a área do jardim é $\frac{3}{5}G$.

Temos que $\frac{5}{21}$ da área do jardim será plantado com árvores frutíferas.

Logo, **será plantado com árvores frutíferas**:

$$\frac{5}{21}\text{ da (área do jardim)}$$

$$\frac{5}{21}\times\left(\frac{3}{5}G\right)$$

Simplificando 3 com 21, e 5 com 5, temos:

$$=\frac{1}{7}\times\frac{1}{1}G$$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{7}G}$$

Logo, a fração da área da garagem que será destinada à parte do jardim plantada com árvores frutíferas é igual a $\frac{1}{7}$.

Gabarito: Letra A.

22.(FCC/TRT 6/2018) Josué sempre fez um levantamento de gastos, do mês anterior, em quatro categorias: moradia, alimentação, transporte e educação. Sempre em referência ao total das entradas do mês

anterior, os gastos foram: $\frac{3}{10}$ para moradia, $\frac{1}{9}$ para alimentação, $\frac{1}{6}$ para transporte, x para educação. Os gastos com educação corresponderam a $\frac{3}{19}$ do que havia sobrado após os gastos nas outras três categorias. Desse modo, é correto afirmar que a fração do total das entradas do mês anterior que sobrou para Josué após os gastos nessas quatro categorias foi

a) $\frac{13}{45}$.

b) $\frac{8}{45}$.

c) $\frac{16}{45}$.

d) $\frac{4}{45}$.

e) $\frac{20}{45}$.

Comentários:

Considere que o **total de entradas** do mês anterior é $\boldsymbol{E}$.

Nesse caso, o **total gasto com moradia**, **alimentação** e **transporte** é:

$$\frac{3}{10}E + \frac{1}{9}E + \frac{1}{6}E$$

$$= \frac{54 + 20 + 30}{180}E$$

$$= \frac{104}{180}\ E$$

O "**valor restante após moradia, alimentação e transporte**" corresponde a:

$$E - \frac{104}{180}\ E$$

$$= \frac{180 - 104}{180}E$$

$$= \frac{76}{180}E$$

$$= \frac{19}{45}E$$

Desse "**valor restante após moradia, alimentação e transporte**", $\frac{3}{19}$ foram gastos com educação.

Isso significa que, $1 - \frac{3}{19} = \frac{16}{19}$ do "**valor restante após moradia, alimentação e transporte**" realmente restou sem ser gasto.

Logo, o valor que sobrou para Josué após os gastos nas quatro categorias foi:

$$\frac{16}{19} \text{ do ("valor restante após moradia, alimentação e transporte")}$$

$$= \frac{16}{19} \times \left(\frac{19}{45} E\right)$$

$$= \frac{16}{45}\ \mathrm{E}$$

Logo, que a fração **do total das entradas do mês anterior** que sobrou para Josué após os gastos nas quatro categorias foi $\frac{16}{45}$.

Gabarito: Letra C.

23. (FCC/IAPEN AP/2018) O preço de um produto à vista é $\frac{4}{5}$ do preço normal anunciado. O mesmo produto se comprado à prestação custa, no total, $\frac{3}{2}$ do preço anunciado. A diferença entre o preço à prestação e o preço à vista é igual ao preço anunciado multiplicado por:

a) $\frac{6}{5}$

b) $\frac{7}{10}$

c) $\frac{15}{8}$

d) $\frac{23}{10}$

e) $\frac{1}{3}$

Comentários:

Seja o preço normal anunciado dado por N.

- O preço do produto à vista é $\frac{4}{5}N$.
- O preço à prestação é dado por $\frac{3}{2}N$.

A diferença entre o preço à prestação e o preço à vista é:

$$\frac{3}{2}N - \frac{4}{5}N$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{5}\right)N$$

$$= \left(\frac{15-8}{10}\right)N$$

$$= \frac{7}{10}N$$

Logo, a diferença entre o preço à prestação e o preço à vista é igual ao preço anunciado multiplicado por $\frac{7}{10}$.

Gabarito: Letra B.

24.(FCC/TRT 6/2018) Duas pessoas, P e Q, distam uma da outra, em linha reta, x metros. Simultaneamente P e Q caminham, uma em direção à outra, durante 15 minutos. P caminha exatamente $\frac{1}{4}$ de x e Q caminha exatamente $\frac{2}{5}$ de x. Nesse momento, a distância que as separam é y. Nos 15 minutos seguintes, P caminha exatamente $\frac{1}{3}$ de y e Q caminha exatamente $\frac{1}{2}$ de y. Após esses 30 minutos de caminhada, é correto afirmar que

a) P e Q estão exatamente no mesmo lugar.

b) P e Q já se cruzaram e estão separadas por uma distância igual a $\frac{13}{120}$ de x.

c) P e Q ainda não se cruzaram e estão separadas por uma distância igual a $\frac{7}{120}$ de x.

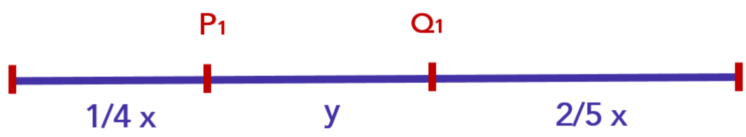
d) P e Q já se cruzaram e estão separadas por uma distância igual a $\frac{17}{120}$ de x.

e) P e Q ainda não se cruzaram e estão separadas por uma distância igual a $\frac{11}{120}$ de x.

Comentários:

Vamos representar graficamente os dados do problema;

"Duas pessoas, P e Q, distam uma da outra, em linha reta, x metros. Simultaneamente P e Q caminham, uma em direção à outra, durante 15 minutos. P caminha exatamente 1/4 de x e Q caminha exatamente 2/5 de x. Nesse momento, a distância que as separam é y"



Como o comprimento total é x, temos que:

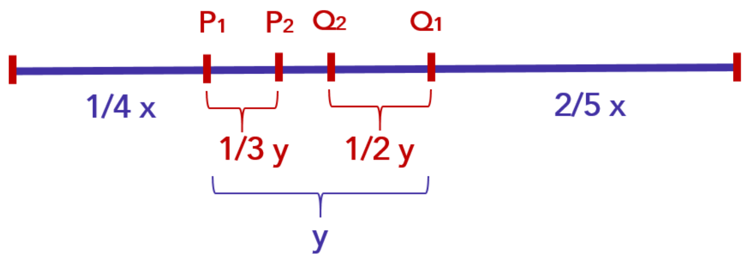
$$x = \frac{1}{4}x + y + \frac{2}{5}x$$

$$x - \frac{1}{4}x - \frac{2}{5}x = y$$

$$\frac{20x - 5x - 8x}{20} = y$$

$$y = \frac{7}{20}x$$

"P caminha exatamente 1/3 de y e Q caminha exatamente 1/2 de y"



Após a segunda movimentação, a distância que separa P e Q é dada por:

$$y - \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}y$$
$$= \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)y$$
$$= \left(\frac{6-2-3}{6}\right)y$$
$$= \frac{1}{6}y$$

1/6 de y corresponde a:

$$\frac{1}{6}\text{ de y}$$
$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{7}{20}x\right)$$
$$= \frac{7}{120}x$$

Logo, P e Q ainda não se cruzaram e estão separadas por uma distância igual a 7/120 de x.

Gabarito: Letra C.

25.(FCC/SABESP/2017) Se $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{7}{20}$, $c = \frac{9}{27}$ e $d = \frac{11}{30}$, então

a) c < b < d < a.

b) c < d < b < a.

c) b < c < d < a.

d) c < b < a < d.

e) b < c < a < d.

Comentários:

Uma maneira de resolver a questão seria fazer o MMC dos denominadores, encontrar as **frações equivalentes** e compará-las. Observe, porém, que transformar as frações em números decimais parece ser mais rápido.

$$a = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

$$b = \frac{7}{20} = \frac{7}{2 \times 10} = \frac{3{,}5}{10} = 0{,}35$$

$$c = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

$$d = \frac{11}{30} = \frac{11}{3 \times 10} = \frac{3{,}666\ldots}{10} = 0{,}3666\ldots$$

Podemos concluir, portanto, que $c < b < d < a$.

Gabarito: Letra A.

26. (FCC/TRT 24/2017) Francisco verificou que havia x pastas em um diretório. Ele abriu $\frac{1}{3}$ dessas pastas, deixou as restantes fechadas e foi embora. Geraldo encontra as pastas como Francisco havia deixado, abre $\frac{5}{7}$ das pastas que ainda estavam fechadas e foi embora. Humberto observa a situação das pastas após a intervenção de Geraldo, fecha $\frac{7}{34}$ das pastas que encontrou abertas e abre metade das pastas que encontrou fechadas. Após a intervenção de Humberto, a fração, das x pastas, que ficaram abertas é igual a

a) $\frac{31}{42}$

b) $\frac{5}{34}$

c) $\frac{13}{21}$

d) $\frac{15}{34}$

e) $\frac{9}{21}$

Comentários:

Inicialmente temos um total de X pastas fechadas.

<u>Intervenção de Francisco</u>

- Francisco **<u>abriu</u>** $\frac{1}{3}$ de X.

Pastas abertas: $\frac{1}{3}X$

Pastas fechadas: $X - \frac{1}{3}X = \frac{2}{3}X$

<u>Intervenção de Geraldo</u>

- Geraldo **<u>abriu</u>** $\frac{5}{7}$ das pastas que estavam fechadas.

$$\frac{5}{7}\text{ das (pastas que estavam fechadas)}$$

$$= \frac{5}{7} \times \left(\frac{2}{3}X\right)$$

$$= \frac{10}{21}X$$

Pastas que ficaram abertas: $\frac{1}{3}X + \frac{10}{21}X = \left(\frac{7+10}{21}\right)X = \frac{17}{21}X$

Pastas que ficaram fechadas: $\frac{2}{3}X - \frac{10}{21}X = \left(\frac{14-10}{21}\right)X = \frac{4}{21}X$

Intervenção de Humberto

- Humberto **fecha** $\frac{7}{34}$ das pastas que encontrou abertas

$$\frac{7}{34}\text{ das (pastas que encontrou abertas)}$$

$$\frac{7}{34} \times \left(\frac{17}{21}X\right)$$

$$= \frac{1}{6}X$$

Pastas que ficaram abertas: $\frac{17}{21}X - \frac{1}{6}X = \left(\frac{34-7}{42}\right)X = \frac{27}{42}X$

Pastas que ficaram fechadas: $\frac{4}{21}X + \frac{1}{6}X = \left(\frac{8+7}{42}\right)X = \frac{15}{42}X$

- Humberto abre $\frac{1}{2}$ das pastas que encontrou fechadas (antes da sua intervenção).

$$\frac{1}{2}\text{das (pastas que encontrou fechadas antes da sua intervenção)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{21}X\right)$$

$$= \frac{2}{21}X$$

Pastas que ficaram abertas: $\frac{27}{42}X + \frac{2}{21}X = \left(\frac{27+4}{42}\right)X = \frac{31}{42}X$

Pastas que ficaram fechadas: $\frac{15}{42}X - \frac{2}{21}X = \left(\frac{15-4}{42}\right)X = \frac{11}{42}X$

Logo, após a intervenção de Humberto, a fração, das x pastas, que ficaram abertas é igual a $\frac{31}{42}$.

Gabarito: Letra A.

27. (FCC/TRT 20/2016) Manoel e Dolores precisavam classificar um grande número de processos. Manoel começou antes do que Dolores e ao final do dia havia classificado $\frac{3}{8}$ do total de processos. Dolores trabalhou mais rápido do que Manoel e ao final do dia havia classificado $\frac{1}{3}$ de processos a mais do que aqueles que Manoel havia classificado. Após esse dia de trabalho de Manoel e Dolores, é correto afirmar que

a) ainda faltam $\frac{1}{4}$ dos processos para serem classificados.

b) eles terminaram a tarefa.

c) ainda faltam $\frac{1}{8}$ dos processos para serem classificados.

d) eles classificaram $\frac{17}{24}$ dos processos.

e) eles classificaram apenas metade dos processos.

Comentários:

Suponha que o total de processos seja P.

Manoel classificou $\frac{3}{8}$ do total de processos: $\boldsymbol{\frac{3}{8}P}$.

Dolores classificou $\frac{1}{3}$ a mais do que aqueles que Manoel classificou. Logo, ela classificou:

$$\frac{3}{8}P + \frac{1}{3}\ \textbf{de}\ \frac{3}{8}P$$

$$= \frac{3}{8}P + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8}P$$

$$= \frac{3}{8}P + \frac{1}{8}P$$

$$\frac{4}{8}P$$

O total classificado por Manoel de Dolores é:

$$\frac{3}{8}P + \frac{4}{8}P = \frac{7}{8}P$$

O total de processos que faltam para serem classificados é:

$$P - \frac{7}{8}P$$

$$\frac{1}{8}P$$

Gabarito: Letra C.

28. (FCC/TRT 14/2016) Em um curso de informática, $\frac{2}{3}$ dos alunos matriculados são mulheres. Em certo dia de aula, $\frac{2}{5}$ das mulheres matriculadas no curso estavam presentes e todos os homens matriculados estavam presentes, o que totalizou 27 alunos (homens e mulheres) presentes na aula. Nas condições dadas, o total de alunos homens matriculados nesse curso é igual a

a) 18.

b) 10.

c) 15.

d) 12.

e) 21.

Comentários:

Vamos supor que no curso de informática temos uma **quantidade A de alunos**.

$\frac{2}{3}$ **dos** alunos são mulheres. Logo, o total de mulheres é $\frac{2}{3}A$.

O total de homens é:

$$A - \frac{2}{3}A = \frac{1}{3}A$$

Em um certo dia, $\frac{2}{5}$ das mulheres estavam presentes e todos os homens estavam presentes. Logo, o total de presentes é dado pela seguinte soma:

$$\frac{2}{5} \text{ das mulheres} + \text{todos os homens}$$

$$= \frac{2}{5} \textbf{ de } \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}A$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}A$$

$$= \frac{4}{15}A + \frac{1}{3}A$$

$$= \frac{4+5}{15}A$$

$$= \frac{9}{15}A$$

$$= \frac{3}{5}A$$

Os alunos que estavam presentes foram 27, que correspondem a $\frac{3}{5}A$.

$$\frac{3}{5}A = 27$$

$$A = \frac{27 \times 5}{3}$$

$$A = 45$$

Sabemos que total de homens é $\frac{1}{3}A$.

$$\frac{1}{3}A = \frac{1}{3} \times 45 = 15$$

Temos, portanto, um total de **15 alunos homens**.

Gabarito: Letra C.

29. (FCC/CNMP/2015) O resultado da expressão numérica

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right).(-6 + 13).\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\right).(-4 - 2).\left(\frac{11}{4} - \frac{10}{4}\right).(-1 + 11).\left(\frac{3}{7} - \frac{9}{7}\right).\left(-\frac{4}{9} - \frac{5}{9}\right)$$

é igual a

a) – 6.

b) 9.

c) −12.

d) 8.

e) – 4.

Comentários:

Vamos resolver o que está dentro dos parênteses e depois simplificar o resultado para, ao fim, realizar o produto.

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) \times (-6 + 13) \times \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\right) \times (-4 - 2) \times \left(\frac{11}{4} - \frac{10}{4}\right) \times (-1 + 11) \times \left(\frac{3}{7} - \frac{9}{7}\right) \times \left(-\frac{4}{9} - \frac{5}{9}\right)$$
$$= \left(\frac{1-2}{3}\right) \times (7) \times \left(\frac{1-3}{5}\right) \times (-6) \times \left(\frac{11-10}{4}\right) \times (10) \times \left(\frac{3-9}{7}\right) \times \left(\frac{-4-5}{9}\right)$$
$$= \left(\frac{-1}{3}\right) \times (7) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times (-6) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times (10) \times \left(\frac{-6}{7}\right) \times \left(\frac{-9}{9}\right)$$

Simplificando 7 com 7, 10 com 5 e 9 com 9, obtemos:

$$= \left(\frac{-1}{3}\right) \times (1) \times \left(\frac{-2}{1}\right) \times (-6) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times (2) \times \left(\frac{-6}{1}\right) \times \left(\frac{-1}{1}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-2) \times (-6) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times (2) \times (-6) \times (-1)$$

Simplificando os termos 2, 2 e 4, temos:

$$= \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-1) \times (-6) \times \left(\frac{1}{1}\right) \times (1) \times (-6) \times (-1)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-1) \times (-6) \times (-6) \times (-1)$$

Realizando o produto de 2 termos em 2 termos, temos:

$$= \frac{1}{3} \times (-6) \times (-6) \times (-1)$$

$$= (-2) \times (-6) \times (-1)$$

$$= (12) \times (-1)$$

$$= -12$$

Gabarito: Letra C.

30.(FCC/TCE-PI/2014) Considere a soma S, dada por

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{2013 \times 2014}$$

Observando que

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

e assim sucessivamente, pode-se reescrever a soma S da seguinte maneira:

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2013} - \frac{1}{2014}\right)$$

O valor da soma S é igual a

a) $\frac{1}{2013}$

b) $\frac{2013}{2014}$

c) $\frac{1}{2015}$

d) $\frac{1}{2014}$

e) $\frac{2014}{2015}$

Comentários:

Observe a última expressão do enunciado com mais termos explícitos:

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2011} - \frac{1}{2012}\right) + \left(\frac{1}{2012} - \frac{1}{2013}\right) + \left(\frac{1}{2013} - \frac{1}{2014}\right)$$

Note que, para todos os termos entre parênteses, **exceto o último**, podemos pegar a fração negativa de um termo e cancelar ela com a fração positiva do termo entre parênteses seguinte.

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right)+\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)+\left(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)$$

Observe que, após cancelar os termos, resta apenas o termo positivo dos primeiros parênteses $\left(\frac{1}{1}\right)$ e o termo negativo dos últimos parênteses $\left(-\frac{1}{2014}\right)$. O resultado da soma é:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2014}$$

$$=\frac{2014-1}{2014}$$

$$=\frac{2013}{2014}$$

Gabarito: Letra B.

QUESTÕES COMENTADAS – FCC

Razão e proporção

1.(FCC/SEDU ES/2022) Dona Paula pediu aos alunos de sua turma que formassem dois grupos. Ao final, ela percebeu que o grupo A ficou formado por 12 rapazes e 6 moças e o grupo B ficou com 18 moças. Para que a proporção de rapazes fique a mesma nos dois grupos e apenas retirando rapazes do grupo A e os colocando no grupo B, o número de rapazes que devem ir para o grupo B é:

a) 8.

b) 5.

c) 6.

d) 3.

e) 9.

Comentários:

Suponha que vamos **retirar x rapazes** do grupo A para colocá-los no grupo B. Note que, **após essa retirada**:

- O grupo A apresenta $(12 - x)$ rapazes e 6 moças; e
- O grupo B apresenta x rapazes e 18 moças.

Após a retirada, a proporção de rapazes deve ser a mesma nos dois grupos. Em outras palavras, a razão entre rapazes e moças deve ser igual para os grupos A e B. Portanto:

$$\frac{\text{Rapazes grupo A}}{\text{Moças grupo A}} = \frac{\text{Rapazes grupo B}}{\text{Moças grupo B}}$$

$$\frac{(12 - x)}{6} = \frac{x}{18}$$

Realizando a multiplicação cruzada, temos:

$$18 \times (12 - x) = 6 \times x$$

$$216 - 18x = 6x$$

$$216 = 6x + 18x$$

$$24x = 216$$

$$x = 9$$

Logo, o número de rapazes que devem sair do grupo A para ir para o grupo B é 9.

Gabarito: Letra E.

2. (FCC/CBM AP/2022) Considere a seguinte recomendação sobre a aquisição de veículos de suporte básico (B) e avançado (A):

As ambulâncias de suporte básico à vida devem ser adquiridas na proporção de um veículo para cada grupo de 100 a 150 mil habitantes, e as de suporte avançado à vida de um veículo para cada grupo de 400 a 450 mil habitantes.

De acordo com essa recomendação, os atuais veículos de suporte básico de uma cidade seriam suficientes para, no máximo, 750 mil habitantes, e os de suporte avançado para, no máximo, 450 mil habitantes. Se a cidade possui atualmente 1 milhão de habitantes, as quantidades mínimas de veículos de suporte básico (B) e de veículos de suporte avançado (A) a serem adquiridas para a cidade se adequar à recomendação são:

a) A = 1 e B = 2

b) A = 1 e B = 3

c) A = 1 e B = 4

d) A = 2 e B = 2

e) A = 2 e B = 3

Comentários:

Segundo o enunciado, temos a seguinte recomendação:

- Uma ambulância de **suporte básico (B)** para cada 100 a **150mil habitantes**;
- Uma ambulância de **suporte avançado (A)** para cada 400 a **450mil habitantes**.

Perceba, portanto, que podemos utilizar o **limite máximo de habitantes** do enunciado **sem que isso viole a recomendação**. Em outras palavras:

- A razão entre ambulâncias de **suporte básico (B)** e habitantes deve ser de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{150\ mil}}$ ou maior;
- A razão entre ambulâncias de **suporte avançado (A)** e habitantes deve ser de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{450\ mil}}$ ou maior.

Na cidade considerada, temos ambulâncias de **suporte básico (B)** para, **no máximo**, 750 mil habitantes. Logo, considerando o limite máximo de habitantes da recomendação, temos o seguinte número de ambulâncias de suporte básico:

$$\frac{\mathrm{B_{Atuais}}}{750\ \mathrm{mil}} = \frac{1}{150\ \mathrm{mil}}$$

$$\mathrm{B_{Atuais}} = \frac{1 \times 750\ \mathrm{mil}}{150\ \mathrm{mil}}$$

$$\mathbf{B_{Atuais} = 5}$$

Além disso, a cidade apresenta ambulâncias de **suporte avançado (A)** para, **no máximo**, 450 mil habitantes. Isso significa que ela apresenta uma única ambulância de suporte avançado.

$$\frac{\text{A}_{\text{Atuais}}}{450\text{ mil}} = \frac{1}{450\text{ mil}}$$

$$\mathbf{A_{Atuais} = 1}$$

A cidade apresenta, atualmente, **1 milhão de habitantes**.

O número de ambulâncias de **suporte básico (B)** necessárias, considerando o limite máximo de habitantes da recomendação, é tal que:

$$\frac{\text{B}_{\text{Necessárias}}}{1\text{ milhão}} = \frac{1}{150\text{ mil}}$$

$$\text{B}_{\text{Necessárias}} = \frac{1 \times 1.000.000}{150.000}$$

$$\text{B}_{\text{Necessárias}} = 6{,}66$$

Como devemos ter um número inteiro de ambulâncias:

$$\mathbf{B_{Necessárias} = 7}$$

O número de ambulâncias de **suporte avançado (A)** necessárias, considerando o limite máximo de habitantes da recomendação, é tal que:

$$\frac{A_{\text{Necessárias}}}{1\text{ milhão}} = \frac{1}{450\text{ mil}}$$

$$A_{\text{Necessárias}} = \frac{1 \times 1.000.000}{450.000}$$

$$A_{\text{Necessárias}} = 2{,}22$$

Como devemos ter um número inteiro de ambulâncias:

$$\mathbf{A_{Necessárias} = 3}$$

As quantidades mínimas de veículos de **suporte básico (B)** e de veículos de **suporte avançado (A)** a serem adquiridas para a cidade se adequar à recomendação são:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_{Necessárias}} - \mathbf{A_{Atuais}} = 3 - 1 = 2$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_{Necessárias}} - \mathbf{B_{Atuais}} = 7 - 5 = 2$$

O gabarito, portanto, é letra D.

Gabarito: Letra D.

3. (FCC/TRT 19/2022) Pedro e Marco resolveram juntos uma prova com 30 questões. Para cada 2 questões que Pedro resolveu, Marco resolveu 3. A diferença entre o número de questões resolvidas por Marco e o número de questões resolvidas por Pedro foi de

a) 6

b) 8

c) 12

d) 10

e) 9

Comentários:

Considere que Pedro e Marco resolveram, respectivamente, P e M questões da prova.

Para cada 2 questões que Pedro resolveu, Marco resolveu 3. Logo:

$$\frac{P}{M} = \frac{2}{3}$$

$$P = \frac{2}{3}M$$

O total de questões da prova é 30. Logo:

$$P + M = 30$$

Substituindo $P = \frac{2}{3}M$ na equação anterior, temos:

$$\frac{2}{3}M + M = 30$$

$$\frac{2M + 3M}{3} = 30$$

$$\frac{5}{3}M = 30$$

$$M = \frac{30 \times 3}{5}$$

$$M = 18$$

Agora que sabemos que Marco resolveu 18 questões, temos:

$$P + M = 30$$

$$P + 18 = 30$$

$$P = 30 - 18$$

$$P = 12$$

Logo, a diferença entre o número de questões resolvidas por Marco e o número de questões resolvidas por Pedro foi de:

$$M - P = 18 - 12$$

$$= 6$$

Gabarito: Letra A.

4.(FCC/TJ CE/2022) De uma pizza com 8 fatias idênticas Marcos comeu duas fatias inteiras e mais meia fatia. Em relação à pizza inteira, a proporção comida por Marcos foi de

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{5}{16}$

c) $\frac{3}{16}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{3}{8}$

Comentários:

Marcos comeu **duas fatias inteiras e mais meia fatia**. Logo, ele comeu:

$$2 + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}\ \text{fatias}$$

A razão entre as fatias comidas por Marcos e o total de fatias da pizza é:

$$\frac{\frac{5}{2}\ \text{fatias}}{8\ \text{fatias}}$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{5}{16}$$

Logo, em relação à pizza inteira, a "proporção" comida por Marcos foi de $\frac{5}{16}$.

Gabarito: Letra B.

5.(FCC/ALAP/2020) Para fazer um refresco de maracujá utiliza-se uma parte de suco de maracujá concentrado e três partes de água. Assim, a fim de obter 20 L de refresco de maracujá, além do suco concentrado, o número necessário de garrafas de 1,5 L de água é

a) 7

b) 9

c) 8

d) 10

e) 6

Comentários:

Para obter um total de 20 L de refresco, a soma dos volumes em litros de suco de maracujá (M) e de água (A) deve ser 20:

$$M + A = 20$$

A razão entre o volume de suco de maracujá e o volume de água é dada por:

$$\frac{M}{A} = \frac{1}{3}$$

$$M = \frac{1}{3}A$$

Substituindo a expressão acima em $M + A = 20$, obtemos:

$$\frac{1}{3}A + A = 20$$

$$\frac{4}{3}A = 20$$

$$A = \frac{20 \times 3}{4}$$

$$A = 15$$

Precisamos de 15 litros de água, e isso corresponde a 10 garrafas de 1,5 L, pois:

$$\frac{15 \text{ litros}}{1{,}5 \text{ litros por garrafa}} = 10 \text{ garrafas}$$

Gabarito: Letra D.

6. (FCC/SABESP/2019) Eduardo tem uma coleção de 2.100 selos entre nacionais e estrangeiros. Se para cada 5 selos nacionais ele tem 2 selos estrangeiros, então a diferença entre o número de selos nacionais e o número de selos estrangeiros é

a) 630.

b) 1.050.

c) 820.

d) 900.

e) 700.

Comentários:

Seja o número de selos nacionais dado por N e o número de selos estrangeiros dado por E.

O total de selos é $N + E = 2.100$.

A razão entre os selos nacionais e estrangeiros é:

$$\frac{N}{E} = \frac{5}{2}$$

$$N = \frac{5}{2}E$$

Substituindo na soma $N + E = 2.100$, temos:

$$\frac{5}{2}E + E = 2.100$$

$$\left(\frac{5+2}{2}\right)E = 2.100$$

$$\frac{7}{2}E = 2.100$$

$$E = \frac{2.100 \times 2}{7}$$

$$E = 600$$

Como $N + E = 2.100$, temos:

$$N + 600 = 2.100$$

$$N = 2.100 - 600$$

$$N = 1.500$$

A diferença entre o número de selos nacionais e o número de selos estrangeiros é:

$$N - E = 1.500 - 600 = 900$$

Gabarito: Letra D.

7. (FCC/METRO SP/2019) Em uma livraria, a cada 12 clientes que compram livros em português, 7 clientes compram livros em língua estrangeira, sendo que nenhum cliente compra livros em mais de uma língua. Certo dia, o número de clientes que compraram livros em língua estrangeira foi 190 a menos do que o número de clientes que compraram livros em português. O número de clientes que, nesse dia, fizeram compra de livros, foi:

a) 488.

b) 599.

c) 611.

d) 722.

e) 833.

Comentários:

Seja P o número de livros de língua portuguesa comprados e E o número de livros de língua estrangeira comprados.

A cada 12 clientes que compram livros em português, 7 compram em língua estrangeira. Logo:

$$\frac{P}{E} = \frac{12}{7}$$

$$P = \frac{12}{7}E$$

"Certo dia, o número de clientes que compraram livros em língua estrangeira foi 190 a menos do que o número de clientes que compraram livros em português." Logo:

$$E = P - 190$$

Substituindo $P = \frac{12}{7}E$ na igualdade anterior, temos:

$$E = \frac{12}{7}E - 190$$

$$190 = \frac{12}{7}E - E$$

$$190 = \left(\frac{12-7}{7}\right)E$$

$$\frac{5}{7}E = 190$$

$$E = \frac{190 \times 7}{5}$$

$$E = 266$$

Como $E = P - 190$, temos:

$$266 = P - 190$$

$$266 + 190 = P$$

$$P = 456$$

O número de clientes que fizeram compra de livros foi:

$$P + E = 456 + 266 = 722$$

Gabarito: Letra D.

8. (FCC/CM Fortaleza/2019) Aldo, Bento e Chico são donos de um imóvel em sociedade. Aldo é proprietário de $\frac{1}{3}$ do imóvel, Bento é proprietário de $\frac{1}{4}$ do imóvel e Chico é proprietário da fração restante. Chico decidiu sair da sociedade e vendeu sua parte aos outros dois sócios de modo que, após a venda, a proporção entre a parte do imóvel de propriedade de Aldo em relação à parte do imóvel de propriedade de Bento se mantivesse igual à mesma proporção de antes da venda. Assim, a proporção do imóvel que Chico vendeu a Aldo foi de

a) $\frac{5}{24}$

b) $\frac{5}{21}$

c) $\frac{5}{36}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{1}{3}$

Comentários:

Inicialmente, Aldo e Bento proprietários de:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{4+3}{12}$$

$$\frac{7}{12}\text{ do imóvel}$$

A parte que inicialmente pertence a Chico é:

$$1-\frac{7}{12}=\frac{12-7}{12}$$

$$=\frac{5}{12}\text{ do imóvel}$$

Se a parte pertencente a Chico que foi vendida a Aldo for C_A e a parte que foi vendida a Bento for C_B, então:

$$C_A+C_B=\frac{5}{12}\text{ do imóvel}$$

A nova parte do imóvel que cabe a Aldo é $\frac{1}{3}+C_A$, e a nova parte que cabe a Bento é $\frac{1}{4}+C_B$.

▪

"*Após a venda, a proporção entre a parte do imóvel de propriedade de Aldo em relação à parte do imóvel de propriedade de Bento se mantivesse igual à mesma proporção de antes da venda*". Logo:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{3}+C_A}{\frac{1}{4}+C_B}$$

$$\frac{4}{3}=\frac{\frac{1}{3}+C_A}{\frac{1}{4}+C_B}$$

Podemos realizar a "multiplicação cruzada" e determinar a relação entre C_A e C_B:

$$4\times\left(\frac{1}{4}+C_B\right)=3\times\left(\frac{1}{3}+C_A\right)$$

$$1+4C_B=1+3C_A$$

$$4C_B=3C_A$$

$$C_B=\frac{3}{4}C_A$$

Substituindo o valor acima em $C_A + C_B = \frac{5}{12}$ do imóvel, temos:

$$C_A + \frac{3}{4}C_A = \frac{5}{12}$$

$$\left(\frac{4+3}{4}\right)C_A = \frac{5}{12}$$

$$\frac{7}{4}C_A = \frac{5}{12}$$

$$C_A = \frac{5 \times 4}{7 \times 12}$$

$$C_A = \frac{5}{21} \text{ do imóvel}$$

Gabarito: Letra B.

9.(FCC/TRT 6/2018) Em uma empresa, no ano de 2005, o total de funcionários era 100, e a razão entre o número de homens e o número de mulheres era $\frac{7}{3}$. De 2005 até 2010 nenhum funcionário se desligou da empresa e foram feitas contratações de modo a duplicar o número total de funcionários. Após essas contratações a razão, que era $\frac{7}{3}$, passou a ser $\frac{3}{2}$. Desse modo, é correto concluir que a razão entre o número de homens contratados e o número de mulheres contratadas, nesse período, foi

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{2}{1}$

d) $\frac{1}{1}$

e) $\frac{4}{5}$

Comentários:

Seja o **total de homens** em 2005 $\boldsymbol{H_1}$ e o **total de mulheres** em 2005 $\boldsymbol{M_1}$.

O total de funcionários, em 2005, era 100: $H_1 + M_1 = 100$.

A razão entre o número de homens e o número de mulheres, em 2005, era $\frac{7}{3}$:

$$\frac{H_1}{M_1} = \frac{7}{3}$$

$$H_1 = \frac{7}{3} M_1$$

Substituindo esse resultado em $H_1 + M_1 = 100$, obtemos:

$$\frac{7}{3} M_1 + M_1 = 100$$

$$\frac{10}{3} M_1 = 100$$

$$M_1 = \frac{100 \times 3}{10}$$

$$\boldsymbol{M_1 = 30}$$

Como de um total de 100 pessoas 30 eram mulheres, o total de homens era:

$$H_1 = 100 - 30$$

$$\boldsymbol{H_1 = 70}$$

Após as contratações, considere que o **novo número de homens é H_2** e o **novo número de mulheres é M_2.**

O total de funcionários dobrou: $H_2 + M_2 = 200$

A razão entre o número de homens e o número de mulheres passou a ser $\frac{3}{2}$:

$$\frac{H_2}{M_2} = \frac{3}{2}$$

$$H_2 = \frac{3}{2} M_2$$

Substituindo esse resultado em $H_2 + M_2 = 200$, obtemos:

$$\frac{3}{2} M_2 + M_2 = 200$$

$$\frac{5}{2} M_2 = 200$$

$$M_2 = \frac{200 \times 2}{5}$$

$$\boldsymbol{M_2 = 80}$$

Como de um total de 200 pessoas 80 são mulheres, o total de homens é:

$$H_2 = 200 - 80$$

$$\boldsymbol{H_2 = 120}$$

O total de homens contratados é $\boldsymbol{H_2} - \boldsymbol{H_1} = \boldsymbol{120} - \boldsymbol{70} = 50$.

O total de mulheres contratadas é $\boldsymbol{M_2} - \boldsymbol{M_1} = \boldsymbol{80} - \boldsymbol{30} = 50$.

Logo, a razão entre o número de homens contratados e mulheres contratadas é $\frac{50}{50} = \frac{1}{1}$.

Gabarito: Letra D.

10.(FCC/TRT 12/2013) Fincadas na areia de uma praia estão pranchas de *surf* e de *bodyboard*, na razão de 7 para 4. Sabendo que são 24 pranchas de surf a mais que as de *bodyboard*, o número total dessas pranchas fincadas na areia é igual a

a) 62.

b) 48.

c) 12.

d) 88.

e) 27.

Comentários:

Seja o número de pranchas de *surf* e *bodyboard* respectivamente S e B.

Temos 24 pranchas de *surf* a mais do que de *bodyboard*. Logo:

$$S = B + 24$$

A razão entre as pranchas de *surf* e *bodyboard* é:

$$\frac{S}{B} = \frac{7}{4}$$

$$S = \frac{7}{4}B$$

Substituindo o valor em $S = B + 24$, temos:

$$\frac{7}{4}B = B + 24$$

$$\frac{7}{4}B - B = 24$$

$$\left(\frac{7-4}{4}\right)B = 24$$

$$\frac{3}{4}B = 24$$

$$B = \frac{24 \times 4}{3}$$

$$B = 32$$

O número de pranchas de *surf* é:

$$S = B + 24$$

$$S = 32 + 24$$

$$S = 56$$

Logo, total de pranchas é dado por $S + B = 56 + 32 = 88$.

Gabarito: Letra D.

QUESTÕES COMENTADAS – FCC

Proporcionalidade

1.(FCC/TRT 22/2022) Alberto tem 25 anos, Breno 40 anos e Carlos 35 anos. Os três trabalham como garçons em um restaurante e decidiram dividir entre eles o valor total das gorjetas. Alberto, que trabalha no restaurante há apenas 5 meses, propôs dividir o total das gorjetas proporcionalmente à idade de cada um, mas Carlos, que trabalha há 1 ano e 3 meses, discorda e propõe que a divisão seja proporcional ao tempo de serviço de cada um no restaurante. Breno, com 1 ano e 8 meses no restaurante foi convidado a desempatar e decidiu que o valor total fosse dividido proporcionalmente ao tempo de serviço. Com um valor total de gorjetas de R$ 1.200,00 e considerando as duas propostas, Alberto deixou de ganhar, em reais,

a) 100,00.

b) 250,00.

c) 30,00.

d) 150,00.

e) 300,00.

Comentários:

Segundo o enunciado:

- Alberto tem **25 anos** e **5 meses** de serviço;
- Breno tem **40 anos** e 1×12+8 = **20 meses** de serviço;
- Carlos tem **35 anos** e 1×12+3= **15 meses** de serviço.

Além disso, sabemos que o **total de gorjetas** a ser dividido é **R$ 1.2000,00**.

–

Primeiramente, vamos obter o valor que Alberto ganharia caso a divisão fosse feita em **partes diretamente proporcionais à idade**.

Suponha que os valores recebidos por Alberto, Breno e Carlos sejam, respectivamente, a_1, b_1 e c_1. Nesse caso, sendo a divisão feita em partes diretamente proporcionais às idades 25, 40, 35, temos:

$$\frac{a_1}{25} = \frac{b_1}{40} = \frac{c_1}{35} = k$$

A soma das partes totaliza 1.200 reais. Logo, $a_1 + b_1 + c_1 = 1.200$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a_1}{25} = \frac{b_1}{40} = \frac{c_1}{35}$, temos:

$$\frac{a_1}{25} = \frac{b_1}{40} = \frac{c_1}{35} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{25 + 40 + 35}$$

$$\frac{a_1}{25} = \frac{b_1}{40} = \frac{c_1}{35} = \frac{1.200}{100}$$

$$\boxed{\frac{a_1}{25} = \frac{b_1}{40} = \frac{c_1}{35} = 12}$$

Logo, se a divisão fosse feita em partes diretamente proporcionais à idade, Alberto receberia a seguinte quantia:

$$\frac{a_1}{25} = 12$$

$$a_1 = \text{R\$ } 300{,}00$$

–

Nesse momento, vamos obter o valor que Alberto ganharia caso a divisão fosse feita em **partes diretamente proporcionais ao tempo de serviço**.

Suponha que os valores recebidos por Alberto, Breno e Carlos sejam, respectivamente, a_2, b_2 e c_2. Nesse caso, sendo a divisão feita em partes diretamente proporcionais aos tempos em meses 5, 20, 15, temos:

$$\frac{a_2}{5} = \frac{b_2}{20} = \frac{c_2}{15} = k$$

A soma das partes totaliza 1.200 reais. Logo, $a_2 + b_2 + c_2 = 1.200$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a_2}{5} = \frac{b_2}{20} = \frac{c_2}{15}$, temos:

$$\frac{a_2}{5} = \frac{b_2}{20} = \frac{c_2}{15} = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{5 + 20 + 15}$$

$$\frac{a_2}{5} = \frac{b_2}{20} = \frac{c_2}{15} = \frac{1200}{40}$$

$$\boxed{\frac{a_2}{5} = \frac{b_2}{20} = \frac{c_2}{15} = 30}$$

Logo, se a divisão fosse feita em partes diretamente proporcionais ao tempo de serviço, Alberto receberia a seguinte quantia:

$$\frac{a_2}{5} = 30$$

$$a_2 = \text{R\$ } 150{,}00$$

$$-$$

Considerando as duas propostas, Alberto deixou de ganhar, em reais, a seguinte quantia:

$$a_1 - a_2 = 300 - 150$$

$$= R\$\, 150{,}00$$

Gabarito: Letra D.

2. (FCC/TRT 23/2022) Em um processo de partilha de herança entre Ana, Beatriz e Clara, ficou decidido que os valores recebidos serão diretamente proporcionais às suas respectivas idades. Sabe-se que Ana tem o triplo da idade de Clara que, por sua vez, tem a metade da idade de Beatriz. Clara receberá 100 mil reais.

O valor total da herança é de:

a) R$ 700.000,00

b) R$ 400.000,00

c) R$ 600.000,00

d) R$ 900.000,00

e) R$ 500.000,00

Comentários:

Suponha que **Clara** tenha $\boldsymbol{x}$ **anos**. Nesse caso, como Clara tem a metade da idade de Beatriz, temos que Beatriz tem o dobro da idade da Clara. Logo, **Beatriz** tem $\boldsymbol{2x}$ **anos**. Além disso, como Ana tem o triplo da idade de Clara, **Ana** tem $\boldsymbol{3x}$ **anos**.

Agora que temos uma relação entre as idades de Ana, Clara e Beatriz, devemos descrever a divisão em partes proporcionais às idades.

Suponha que os valores recebidos por **Ana**, **Beatriz** e **Clara** sejam, respectivamente, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Como a quantia total da herança foi repartida em partes diretamente proporcionais às idades $\boldsymbol{3x}$, $\boldsymbol{2x}$ e $\boldsymbol{x}$, temos:

$$\frac{a}{3x} = \frac{b}{2x} = \frac{c}{x} = k$$

Queremos obter o total da herança (H), que corresponde à soma das partes: $H = a + b + c$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a}{3x} = \frac{b}{2x} = \frac{c}{x}$, temos:

$$\frac{a}{3x} = \frac{b}{2x} = \frac{c}{x} = \frac{a+b+c}{3x+2x+x}$$

$$\boxed{\frac{a}{3x} = \frac{b}{2x} = \frac{c}{x} = \frac{H}{6x}}$$

Como Clara receberá 100 mil reais, temos que $c = R\$ \ 100.000{,}00$. Logo:

$$\frac{c}{x} = \frac{H}{6x}$$

Simplificando o x, temos:

$$c = \frac{H}{6}$$

$$100.000 = \frac{H}{6}$$

$$H = R\$ \ 600.000{,}00$$

Portanto, o valor total da herança é de R$ 600.000,00.

Gabarito: Letra C.

3. (FCC/MANAUSPREV/2021) Tiago Duarte e Bruno Castro ganharam um prêmio de R$ 35.000,00 em uma loteria. Tiago propôs que a divisão fosse feita proporcionalmente ao número de vogais do primeiro nome de cada um. Bruno propôs que o prêmio fosse dividido proporcionalmente ao número de consoantes do sobrenome de cada um. A proposta com a menor diferença entre os valores que cada um receberia é:

a) Tiago receberia R$ 7.000,00 a mais que Bruno.

b) Tiago receberia R$ 5.000,00 a mais que Bruno.

c) Bruno receberia R$ 7.000,00 a mais que Tiago.

d) Bruno receberia R$ 6.000,00 a mais que Tiago.

e) Bruno receberia R$ 5.000,00 a mais que Tiago.

Comentários:

Note que:

- No primeiro nome de T**ia**g**o** Duarte, temos **3 vogais**; e
- No primeiro nome de Br**u**n**o** Castro, temos **2 vogais**.

Além disso:

- No segundo nome de Tiago **Duarte**, temos **3 consoantes**; e
- No segundo nome de Bruno **Castro**, temos **4 consoantes**.

Além disso, sabemos que o **prêmio** a ser dividido é de **R$ 35.000,00**.

—

Primeiramente, vamos realizar a divisão do prêmio em **partes diretamente proporcionais ao número de vogais do primeiro nome de cada um**.

Suponha que os valores recebidos por Tiago Duarte e Bruno Castro sejam, respectivamente, t_1 e b_1. Nesse caso, sendo a divisão feita em partes diretamente proporcionais **ao número de vogais do primeiro nome de cada um** (**3** e **2**), temos:

$$\frac{t_1}{3} = \frac{b_1}{2} = k$$

A soma das partes totaliza R$ 35.000,00. Logo, $t_1 + b_1 = 35.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{t_1}{3} = \frac{b_1}{2}$, temos:

$$\frac{t_1}{3} = \frac{b_1}{2} = \frac{t_1 + b_1}{3 + 2}$$

$$\frac{t_1}{3} = \frac{b_1}{2} = \frac{35.000}{5}$$

$$\boxed{\frac{t_1}{3} = \frac{b_1}{2} = 7.000}$$

Logo, realizando a divisão em partes diretamente proporcionais **ao número de vogais do primeiro nome de cada um**, Tiago Duarte e Bruno Castro receberiam, respectivamente:

$$\frac{t_1}{3} = 7.000 \rightarrow t_1 = R\$\ 21.000{,}00$$

$$\frac{b_1}{2} = 7.000 \rightarrow b_1 = R\$\ 14.000{,}00$$

—

Nesse momento, vamos realizar a divisão do prêmio em partes diretamente proporcionais **ao número de consoantes do sobrenome de cada um**.

Suponha que os valores recebidos por Tiago Duarte e Bruno Castro sejam, respectivamente, t_2 e b_2. Nesse caso, sendo a divisão feita em partes diretamente proporcionais **ao número de consoantes do sobrenome de cada um** (**3** e **4**), temos:

$$\frac{t_2}{3} = \frac{b_2}{4} = k$$

A soma das partes totaliza R$ 35.000,00. Logo, $t_2 + b_2 = 35.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{t_2}{3} = \frac{b_2}{4}$, temos:

$$\frac{t_2}{3} = \frac{b_2}{4} = \frac{t_2 + b_2}{3 + 4}$$

$$\frac{t_2}{3} = \frac{b_2}{4} = \frac{35.000}{7}$$

$$\boxed{\frac{t_2}{3} = \frac{b_2}{4} = 5.000}$$

Logo, realizando a divisão em partes diretamente proporcionais **ao número de <u>consoantes</u> do <u>sobrenome</u> de cada um**, Tiago Duarte e Bruno Castro receberiam, respectivamente:

$$\frac{t_2}{3} = 5.000 \rightarrow t_2 = 15.000$$

$$\frac{b_2}{4} = 5.000 \rightarrow b_2 = 20.000$$

–

A <u>proposta com a menor diferença entre os valores</u> que cada um receberia é a segunda, cuja divisão é feita em partes diretamente proporcionais **ao número de <u>consoantes</u> do <u>sobrenome</u> de cada um**:

- **Diferença na primeira proposta**: $\boldsymbol{t_1 - b_1} = 21.000 - 14.000 = \boldsymbol{R\$\ 7.000}$
- **Diferença na segunda proposta**: $\boldsymbol{b_2 - t_2} = 20.000 - 15.000 = \boldsymbol{R\$\ 5.000}$

Note que, nessa segunda proposta, **Bruno** $(\boldsymbol{b_2})$ **receberia R$ 5.000,00 a mais que Tiago** $(\boldsymbol{t_2})$.

Gabarito: Letra E.

4.(FCC/Pref. Recife/2019) Sabe-se que as sequências S_1 e S_2 abaixo são diretamente proporcionais $(x > 0)$, isto é, a razão entre os elementos correspondentes das duas sequências é constante:

Sequência S_1: $\{4, x, 16, \ldots\}$

Sequência S_2: $\{x, 9, y, \ldots\}$

O valor de y é igual a

a) 15.

b) 9.

c) 12.

d) 6.

e) 24.

Comentários:

Se as duas sequências S_1 e S_2 são proporcionais, então:

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{9} = \frac{16}{y} = k$$

Ao realizar a "**multiplicação cruzada**" em $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$, obtemos:

$$x \times x = 4 \times 9$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$x = \pm 6$$

Como $x > 0$, temos apenas a possibilidade positiva para x. Portanto, $\boldsymbol{x = 6}$.

Ao realizar a "**multiplicação cruzada**" em $\frac{4}{x} = \frac{16}{y}$, obtemos:

$$\frac{4}{6} = \frac{16}{y}$$

$$4 \times y = 16 \times 6$$

$$y = \frac{16 \times 6}{4}$$

$$y = 24$$

Gabarito: Letra E.

5. (FCC/SABESP/2019) Albertina dividiu certa quantia entre seus 3 netos, um de 11 anos, um de 12 anos e outro de 14 anos, de maneira que cada neto recebeu um valor diretamente proporcional à própria idade. Se o neto mais novo recebeu R$ 33,00, então os dois netos mais velhos receberam um total de

a) R$ 71,00.

b) R$ 78,00.

c) R$ 85,00.

d) R$ 92,00.

e) R$ 99,00.

Comentários:

A quantia total distribuída foi dividida em partes proporcionais às idades. Se as partes proporcionais a 11, 12 e 14 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{11} = \frac{b}{12} = \frac{c}{14} = k$$

Note que $a = 33$, pois o neto mais novo, de 11 anos, recebeu R$ 33,00.

$$\frac{33}{11} = \frac{b}{12} = \frac{c}{14} = k$$

Nossa constante de proporcionalidade é $\frac{33}{11} = 3$. Logo:

$$\frac{b}{12} = 3 \ \rightarrow b = 36$$

$$\frac{c}{14} = 3 \ \rightarrow c = 42$$

O valor total recebido pelos dois netos mais velhos é:

$$b + c = 36 + 42$$

$$b + c = 78\, reais$$

Gabarito: Letra B.

6. (FCC/Pref. SJRP/2019) Renato e Ricardo fizeram uma viagem de carro e percorreram um total de 3 552 km. Eles se revezaram na direção de maneira que, para cada 123 km que Renato dirigia, Ricardo dirigia 321 km. A distância total percorrida por Ricardo na direção do veículo foi de

a) 2.247 km.

b) 2.444 km.

c) 2.568 km.

d) 2.727 km.

e) 2.889 km.

Comentários:

Devemos dividir a distância total de 3.552km em partes proporcionais a 123km e 321km.

Se Renato dirigiu uma distância E e Ricardo dirigiu uma distância I, então a proporção é dada por:

$$\frac{E}{123} = \frac{I}{321} = k$$

A soma do que Renato e Ricardo dirigiram é $E + I = 3.552$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{E}{123} = \frac{I}{321}$, temos:

$$\frac{E}{123} = \frac{I}{321} = \frac{E + I}{123 + 321}$$

$$\frac{E}{123} = \frac{I}{321} = \frac{3.552}{444}$$

$$\boxed{\frac{E}{123} = \frac{I}{321} = 8}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 8.

$$\frac{I}{321} = 8$$

$$I = 321 \times 8$$

$$I = 2.568$$

Logo, a distância percorrida por Ricardo é de 2.568km.

Gabarito: Letra C.

7.(FCC/METRO SP/2019) As 3 estações de maior movimento em uma cidade são X, Y e Z. Pela estação X passam 20.136 pessoas por dia e pela estação Z passam, por dia, 6.712 pessoas a mais do que pela estação Y. Serão contratados 18 agentes para trabalhar nessas estações, que serão distribuídos entre as estações de forma diretamente proporcional ao número de pessoas que passam por dia em cada estação. Sabendo que a estação X receberá 6 agentes, o número de passageiros que passam pela estação Z, por dia, é:

a) 23.492.

b) 23.832.

c) 24.560.

d) 24.724.

e) 25.250.

Comentários:

ESTA É DIFÍCIL!

Veja que devemos distribuir os agentes de maneira proporcional ao número de pessoas que passam pela estação. Assim:

$$\frac{\text{Número de agentes}}{\text{Número de pessoas}} = k$$

Suponha que as estações X, Y e Z receberão, respectivamente, 6, b e c agentes. Além disso, suponha que o número de pessoas que passam pelas estações X, Y e Z são, respectivamente, 20.136, y e $y + 6.712$.

$$\frac{6}{20.136} = \frac{b}{y} = \frac{c}{y + 6.712} = k$$

A soma dos agentes é dada por $6 + b + c = 18$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{6}{20.136} = \frac{b}{y} = \frac{c}{y+6.712}$, temos:

$$\frac{6}{20.136} = \frac{b}{y} = \frac{c}{y + 6.712} = \frac{6 + b + c}{20.136 + y + (y + 6.712)}$$

$$\frac{6}{20.136} = \frac{b}{y} = \frac{c}{y + 6.712} = \frac{18}{2y + 26.848}$$

Podemos obter y pela igualdade:

$$\frac{6}{20.136} = \frac{18}{2y + 26.848}$$

Simplificando os numeradores:

$$\frac{1}{20.136} = \frac{3}{2y + 26.848}$$

Ao realizar a "**multiplicação cruzada**", obtemos:

$$2y + 26.848 = 3 \times 20.136$$

$$2y + 26.848 = 3 \times 20.136$$

$$2y + 26.848 = 60.408$$

$$2y = 33.560$$

$$y = 16.780$$

O número de passageiros que passa pela estação Z é:

$$y + 6.712$$

$$= 16.780 + 6.712$$

$$= 23.492$$

Gabarito: Letra A.

8. (FCC/SEFAZ BA/2019) Certa empresa de tecnologia foi criada a partir do aporte de capital investido por três sócios. O sócio B participou com o dobro do sócio A, enquanto o sócio C participou com a metade do investido pelo sócio A. Na partilha do lucro de 525 mil reais, proporcionalmente ao que cada um investiu, o sócio A receberia o valor de, em mil reais,

a) 140.

b) 150.

c) 210.

d) 250.

e) 280.

Comentários:

O lucro será dividido em partes proporcionais aos valores investidos.

Se o sócio A investiu um valor I, o sócio B investiu $2I$ (o dobro) e o sócio C investiu $\frac{I}{2}$ (metade).

Se as partes do lucro que cada sócio recebeu, proporcionais a I, $2I$ e $\frac{I}{2}$, forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{I} = \frac{b}{2I} = \frac{c}{\frac{I}{2}} = k$$

A soma das partes é o lucro líquido total, isto é, $a + b + c = 525$ mil reais.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{I} = \frac{b}{2I} = \frac{c}{\frac{I}{2}}$, temos:

$$\frac{a}{I} = \frac{b}{2I} = \frac{c}{\frac{I}{2}} = \frac{a + b + c}{I + 2I + \frac{I}{2}}$$

$$\frac{a}{I}=\frac{b}{2I}=\frac{c}{\frac{I}{2}}=\frac{525}{\frac{2I+4I+I}{2}}$$

$$\frac{a}{I}=\frac{b}{2I}=\frac{c}{\frac{I}{2}}=\frac{525}{\frac{7I}{2}}$$

$$\boxed{\frac{a}{I}=\frac{b}{2I}=\frac{c}{\frac{I}{2}}=\frac{150}{I}}$$

Temos que:

$$\frac{a}{I}=\frac{150}{I}$$

$$a=150\text{ mil reais}$$

Gabarito: Letra B.

9.(FCC/IAPEN AP/2018) A quantia de R$ 900,00 foi repartida em partes diretamente proporcionais às idades de Dimitri, 5 anos, Luiz, 7 anos e Nicolas, 8 anos. Então a diferença entre as quantias que Nicolas e Luiz receberam é, em reais, de

a) 135,00.

b) 90,00.

c) 225,00.

d) 45,00.

e) 35,00.

Comentários:

A quantia total distribuída foi dividida em partes proporcionais às idades. Se as partes proporcionais a 5, 7 e 8 forem respectivamente d, l e n, então:

$$\frac{d}{5}=\frac{l}{7}=\frac{n}{8}=k$$

A soma das partes é 900. Logo, $d+l+n=900$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{d}{5}=\frac{l}{7}=\frac{n}{8}$, temos:

$$\frac{d}{5}=\frac{l}{7}=\frac{n}{8}=\frac{d+l+n}{5+7+8}$$

$$\frac{d}{5} = \frac{l}{7} = \frac{n}{8} = \frac{900}{20}$$

$$\boxed{\frac{d}{5} = \frac{l}{7} = \frac{n}{8} = 45}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 45.

$$\frac{l}{7} = 45 \rightarrow l = 315$$

$$\frac{n}{8} = 45 \rightarrow n = 360$$

A diferença entre as quantias que Nicolas e Luiz receberam é:

$$n - l = 360 - 315$$

$$n - l = 45 \text{ reais}$$

Gabarito: Letra D.

10.(FCC/SABESP/2018) Cento e quarenta tarefas anuais serão distribuídas entre 4 funcionários diretamente proporcional ao tempo de empresa de cada um. Dois dos funcionários têm 6 anos de empresa. Dos 4 funcionários, aquele que tem mais tempo de empresa possui o triplo dos anos de empresa do único funcionário dos 4 com menos de 6 anos de empresa. Se a média aritmética simples dos anos de empresa dos 4 funcionários é de 7 anos, o funcionário com mais anos de empresa receberá a quantidade de tarefas anuais igual a

a) 65

b) 64

c) 58

d) 66

e) 60

Comentários:

Temos 140 tarefas para serem distribuídas entre 4 funcionários proporcionalmente ao tempo de empresa.

Se o funcionário que tem menos tempo de empresa tiver x anos, o funcionário que tem mais tempo terá $3x$ anos. Logo, o tempo de empresa dos 4 funcionários é:

$$x;\;\; 6;\;\; 6;\;\; 3x$$

A média de tempo dos 4 funcionários é 7 anos. Logo:

$$\frac{x + 6 + 6 + 3x}{4} = 7$$

$$4x + 12 = 4 \times 7$$

$$4x = 28 - 12$$

$$4x = 16$$

$$x = 4$$

Logo, o tempo de empresa dos 4 funcionários é:

$$4; \;\; 6; \;\; 6; \;\; 12$$

Se esses quatro funcionários receberam um total de tarefas correspondente a a, b, c e d, respectivamente, então temos a seguinte proporção:

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{6} = \frac{d}{12} = k$$

Sabemos que o total de tarefas é dado por $a + b + c + d = 140$

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**", temos:

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{6} = \frac{d}{12} = \frac{a + b + c + d}{4 + 6 + 6 + 12}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{6} = \frac{d}{12} = \frac{140}{28}$$

$$\boxed{\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{6} = \frac{d}{12} = 5}$$

Logo, a nossa constante de proporcionalidade é 5. O funcionário com mais anos de empresa receberá:

$$\frac{d}{12} = 5$$

$$d = 5 \times 12$$

$$d = 60 \text{ tarefas}$$

Gabarito: Letra E.

11. (FCC/SABESP/2018) Quarenta e uma tarefas devem ser distribuídas entre Ana, Bruna, Célia e Débora para que realizem ao longo de uma semana de trabalho.

Sabendo-se que funcionárias mais experientes são mais rápidas na realização das tarefas, o número de tarefas que cada funcionária receberá será diretamente proporcional ao número de anos que ela trabalha na empresa. Das quatro funcionárias, Ana é a que possui menos anos de empresa, o que corresponde a $\frac{2}{5}$ dos anos de trabalho de Débora, que é a mais antiga na empresa. Célia tem 2 anos a menos de empresa do que Débora, e Bruna tem 1 ano a mais de empresa do que Ana. Se a média de anos de empresa das quatro funcionárias é igual a 10,25 anos, então, do total de tarefas que serão distribuídas entre as quatro funcionárias, Ana receberá

a) $\frac{15}{41}$.

b) $\frac{3}{41}$.

c) $\frac{3}{20}$.

d) $\frac{6}{41}$.

e) $\frac{1}{5}$.

Comentários:

Considere que o número de anos em que Débora trabalha na empresa é D.

- Ana tem $\frac{2}{5}$ do tempo de Débora: $\frac{2}{5}D$.
- Célia tem 2 anos a menos de empresa do que Débora: $D-2$.
- Bruna tem 1 ano a mais de empresa do que Ana: $\frac{2}{5}D+1$.

A média de anos de empresa das 4 funcionárias é de 10,25 anos. Logo:

$$\frac{D+\frac{2}{5}D+(D-2)+\left(\frac{2}{5}D+1\right)}{4}=10{,}25$$

$$2D+2\times\frac{2}{5}D-1=4\times 10{,}25$$

$$\left(2+\frac{4}{5}\right)D=41+1$$

$$\frac{14}{5}D=42$$

$$D=15$$

Portanto, os tempos de empresa de Ana $(\frac{2}{5}D)$, Bruna $\left(\frac{2}{5}D+1\right)$, Célia $(D-2)$ e Débora (D) são, respectivamente, 6, 7, 13 e 15.

Observe que a soma dos tempos de empresa é $6 + 7 + 13 + 15 = 41$, e temos 41 tarefas para distribuir proporcionalmente entre esses tempos.

Logo, Ana receberá um total de 6 tarefas, pois ela tem 6 anos de empresa. Assim, Ana receberá $\frac{6}{41}$ do total de tarefas.

Gabarito: Letra D.

12.(FCC/CL DF/2018) Miguel, Otávio e Pedro foram convocados para realizar um trabalho emergencial. Para recompensá-los posteriormente, decide-se dividir uma quantia em reais entre os 3 em partes diretamente proporcionais ao tempo dedicado de cada um para realizar o trabalho e inversamente proporcionais às respectivas idades. Sabe-se que Miguel dedicou 4 horas para o trabalho e sua idade é igual a 30 anos, Otávio dedicou 8 horas e sua idade é igual a 40 anos e Pedro dedicou 15 horas e sua idade é igual a 60 anos. Se a menor parte correspondente a esta divisão foi de R$ 4.800,00, então a maior parte foi igual a

a) R$ 9.000,00.

b) R$ 6.000,00.

c) R$ 12.000,00.

d) R$ 8.400,00.

e) R$ 7.200,00.

Comentários:

A quantia foi dividida em partes <u>diretamente proporcionais</u> aos tempos dedicados e <u>inversamente proporcionais</u> às idades.

Considere que as partes recebidas por Miguel, Otávio e Pedro são, respectivamente, m, o e p.

"Sabe-se que Miguel dedicou 4 horas para o trabalho e sua idade é igual a 30 anos, Otávio dedicou 8 horas e sua idade é igual a 40 anos e Pedro dedicou 15 horas e sua idade é igual a 60 anos." Logo, temos a seguinte proporção:

$$\frac{m}{4 \times \frac{1}{30}} = \frac{o}{8 \times \frac{1}{40}} = \frac{p}{15 \times \frac{1}{60}} = k$$

$$\boxed{\frac{m}{\frac{2}{15}} = \frac{o}{\frac{1}{5}} = \frac{p}{\frac{1}{4}} = k}$$

Para determinar a quem corresponde a menor parte da divisão, dada por R$ 4.800, devemos determinar qual dos números é o menor:

$$\frac{2}{15}; \frac{1}{5} \text{ ou } \frac{1}{4}$$

Essas frações correspondem, respectivamente, a:

$$0{,}1333\ldots;\ 0{,}2 \text{ e } 0{,}25$$

Logo:

$$\frac{2}{15} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$$

Isso significa que $\frac{2}{15}$ é menor e, portanto, a menor quantia foi recebida por Miguel (m). Portanto:

$$m = 4.800$$

A proporção fica assim:

$$\frac{4.800}{\frac{2}{15}} = \frac{o}{\frac{1}{5}} = \frac{p}{\frac{1}{4}} = k$$

A questão pergunta qual a maior parte correspondente à divisão. Trata-se de p, pois $\frac{1}{4}$ é a maior das frações.

$$\frac{p}{\frac{1}{4}} = \frac{4.800}{\frac{2}{15}}$$

$$4p = 36.000$$

$$p = 9.000$$

Gabarito: Letra A.

13. (FCC/TRT 11/2017) José Souza, Paulo Almeida e Claudio Prinot são três funcionários que têm que realizar, no total para os três, 72 tarefas diariamente. Cada dia eles escolhem um critério diferente para repartir as tarefas. Por exemplo, no dia de ontem eles decidiram que as 72 tarefas seriam divididas entre eles diretamente proporcional às consoantes do sobrenome de cada um. Sendo assim, ontem Paulo Almeida teve que realizar o total de tarefas igual a

a) 15.

b) 12.

c) 18.

d) 9.

e) 24

Comentários:

Antes de realizar a divisão proporcional, devemos determinar o número de consoantes de cada sobrenome.

- José **S**ou**z**a: 2 consoantes.
- Paulo A**lm**ei**d**a: 3 consoantes.
- Claudio **Pr**i**n**o**t**: 4 consoantes.

Logo, se José, Paulo e Claudio receberam, respectivamente, j, p e c tarefas, essas tarefas serão diretamente proporcionais a 2, 3 e 4. Temos a seguinte proporção:

$$\frac{j}{2} = \frac{p}{3} = \frac{c}{4} = k$$

A soma das tarefas repartidas é 72. Logo, $j + p + c = 72$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{j}{2} = \frac{p}{3} = \frac{c}{4}$, temos:

$$\frac{j}{2} = \frac{p}{3} = \frac{c}{4} = \frac{j + p + c}{2 + 3 + 4}$$

$$\frac{j}{2} = \frac{p}{3} = \frac{c}{4} = \frac{72}{9}$$

$$\frac{j}{2} = \frac{p}{3} = \frac{c}{4} = \frac{72}{9}$$

$$\boxed{\frac{j}{2} = \frac{p}{3} = \frac{c}{4} = 8}$$

Portanto, a constante de proporcionalidade é 8. O total de tarefas atribuídas a Paulo Almeida é:

$$\frac{p}{3} = 8$$

$$p = 3 \times 8$$

$$p = 24 \text{ tarefas}$$

Gabarito: Letra E.

14. (FCC/SEMA MA/2016) Aline, Beta, Clara e Débora estão montando um restaurante. Aline investiu, inicialmente, R$ 40.000,00; Beta, R$ 32.000,00; Clara, R$ 48.000,00; Débora, R$ 30.000,00. Ficou decidido que os lucros seriam divididos proporcionalmente às quantias inicialmente investidas.

Assim, se, em determinado mês, o restaurante lucrou R$ 7.500,00, a parte do lucro devida à Beta é de

a) R$ 2.400,00.

b) R$ 1.200,00.

c) R$ 3.200,00.

d) R$ 2.600,00.

e) R$ 1.600,00.

Comentários:

O lucro será dividido em partes proporcionais aos valores investidos.

Se o Aline (R$ 40.000,00), Beta (R$ 32.000,00), Clara (R$ 48.000,00) e Débora (R$ 30.000,00) receberam como lucro respectivamente a, b, c e d, então:

$$\frac{a}{40.000} = \frac{b}{32.000} = \frac{c}{48.000} = \frac{d}{30.000} = k$$

A soma das partes é o lucro total, ou seja, $a + b + c + d = 7.500$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção, temos:

$$\frac{a}{40.000} = \frac{b}{32.000} = \frac{c}{48.000} = \frac{d}{30.000} = \frac{a + b + c + d}{40.000 + 32.000 + 48.000 + 30.000}$$

$$\frac{a}{40.000} = \frac{b}{32.000} = \frac{c}{48.000} = \frac{d}{30.000} = \frac{7.500}{150.000}$$

$$\boxed{\frac{a}{40.000} = \frac{b}{32.000} = \frac{c}{48.000} = \frac{d}{30.000} = \frac{1}{20}}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é $\frac{1}{20}$. A parte do lucro devido à Beta é:

$$\frac{b}{32.000} = \frac{1}{20}$$

$$b = \frac{32.000}{20}$$

$$b = 1.600$$

Gabarito: Letra E.

15. (FCC/TRF 3/2016) Uma herança de R$ 82.000,00 será repartida de modo inversamente proporcional às idades, em anos completos, dos três herdeiros. As idades dos herdeiros são: 2, 3 e x anos. Sabe-se que os números que correspondem às idades dos herdeiros são números primos entre si (o maior divisor comum dos três números é o número 1) e que foi R$ 42.000,00 a parte da herança que o herdeiro com 2 anos recebeu. A partir dessas informações o valor de x é igual a

a) 7.

b) 5.

c) 11.

d) 1.

e) 13.

Comentários:

A herança será dividida em partes inversamente proporcionais às idades.

Se as partes que os herdeiros de 2, 3 e x anos receberam foram respectivamente 42.000, b e c, então:

$$\frac{42.000}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{x}} = k$$

Note, portanto, que a constante de proporcionalidade é $k = \frac{42.000}{1/2} = 84.000$. Podemos agora determinar b.

$$\frac{b}{\frac{1}{3}} = k$$

$$3b = 84.000$$

$$b = \frac{84.000}{3}$$

$$b = 28.000$$

O total da herança é dado pela soma das partes:

$$42.000 + b + c = 82.000$$

$$42.000 + 28.000 + c = 82.000$$

$$c = 82.000 - 42.000 - 28.000$$

$$c = 12.000$$

Com o valor de c, podemos determinar x:

$$\frac{c}{\frac{1}{x}} = k$$

$$12.000 \times x = 84.000$$

$$x = \frac{84.000}{12.000} = 7$$

Gabarito: Letra A.

16.(FCC/ARSETE/2016) Em uma empresa, um prêmio em dinheiro foi dividido entre 3 funcionários (Antônio, Bento e Celso) em partes diretamente proporcionais ao tempo de serviço de cada um na empresa e inversamente proporcionais ao número de faltas injustificadas deles dentro de um período. O quadro abaixo forneceu as informações necessárias para o cálculo desta divisão.

Informação	Antônio	Beto	Celso
Tempo de serviço	8 anos	10 anos	18 anos
Número de faltas injustificadas	2 dias	5 dias	6 dias

Se Celso recebeu R$ 13.500,00, então Antônio recebeu, em reais,

a) 12.000,00

b) 9.000,00

c) 27.000,00

d) 18.000,00

e) 22.500,00

Comentários:

A quantia foi dividida em partes diretamente proporcionais ao tempo de serviço e inversamente proporcionais ao número de faltas injustificadas.

Se Antônio, Beto e Celso receberam, respectivamente, a, b e $R\$\ 13.500$, então temos a seguinte proporção:

$$\frac{a}{8 \times \frac{1}{2}} = \frac{b}{10 \times \frac{1}{5}} = \frac{\mathbf{13.500}}{\mathbf{18 \times \frac{1}{6}}} = k$$

Note que a constante de proporcionalidade é:

$$k = \frac{\mathbf{13.500}}{\mathbf{18 \times \frac{1}{6}}} = \frac{13.500}{3} = 4.500$$

Para obter o valor a que o Antônio recebeu, devemos utilizar a seguinte igualdade:

$$\frac{a}{8 \times \frac{1}{2}} = \boldsymbol{k}$$

$$\frac{a}{4} = 4.500$$

$$a = 4.500 \times 4$$

$$a = 18.000 \text{ reais}$$

Gabarito: Letra D.

17.(FCC/Cam. Mun. SP/2014) Na tabela abaixo, a sequência de números da coluna A é inversamente proporcional à sequência de números da coluna B.

A	B
16	60
12	X
8	120
4	240

A letra X representa o número:

a) 90.

b) 80.

c) 96.

d) 84.

e) 72.

Comentários:

Para duas sequências serem inversamente proporcionais, a multiplicação das grandezas deve ser sempre igual a uma constante, isto é:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = k$$

Para determinar X, podemos utilizar o primeiro e o segundo termo das duas sequências:

$$16 \times 60 = 12 \times X$$

$$\frac{16 \times 60}{12} = X$$

$$X = 80$$

Gabarito: Letra B.

18. (FCC/SABESP/2014) Dividindo uma determinada quantia em dinheiro entre Arnaldo, Bento e Célio em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 5, respectivamente, observa-se que a pessoa que recebeu o

maior valor apresentou um valor de R$ 72.000,00 a mais que a pessoa que recebeu o menor valor. O valor que Bento recebeu é, em R$, igual a

a) 72.000,00.

b) 60.000,00.

c) 48.000,00.

d) 80.000,00.

e) 96.000,00.

Comentários:

O dinheiro será dividido entre Arnaldo, Bento e Célio em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 5. Se Arnaldo, Bento e Célio receberem, respectivamente, a, b e c, então temos a seguinte proporção:

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{5}} = k$$

Note que a pessoa que recebeu o maior valor é Arnaldo, pois ele recebeu de modo inversamente proporcional ao menor número (2). A pessoa que recebeu o menor valor é Célio, pois ele recebeu de modo inversamente proporcional ao maior número (5).

"A pessoa que recebeu o maior valor apresentou um valor de R$ 72.000,00 a mais que a pessoa que recebeu o menor valor". Logo:

$$a - c = 72.000$$

Podemos utilizar a "**propriedade fundamental da subtração**" na proporção:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}} = \frac{\boldsymbol{a - c}}{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}}$$

$$2a = 3b = 5c = \frac{72.000}{\frac{5-2}{10}}$$

$$2a = 3b = 5c = \frac{72.000}{\frac{3}{10}}$$

$$\boxed{2a = 3b = 5c = 240.000}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 240.000. O valor que Bento recebeu é tal que:

$$3b = 240.000$$

$$b = \frac{240.000}{3}$$

$$b = 80.000 \text{ reais}$$

Gabarito: Letra D.

19. (FCC/SERGAS/2013) O gerente de uma empresa decide dividir uma quantia em dinheiro entre 3 de seus funcionários, em partes inversamente proporcionais ao número de erros que eles tiveram na elaboração de uma determinada tarefa. O número de erros registrados para estes funcionários foram exatamente 2, 3 e 5. Se o funcionário que recebeu o maior valor apresentou um valor de R$ 540,00 a mais que o funcionário que recebeu o menor valor, então o funcionário que teve 3 erros recebeu, em reais,

a) 540,00.

b) 720,00.

c) 600,00.

d) 840,00.

e) 450,00.

Comentários:

Suponha que o dinheiro será repartido nas partes a, b e c de modo inversamente proporcional a, respectivamente, 2, 3 e 5. Temos a seguinte proporção:

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{5}} = k$$

O maior valor recebido é a, pois ele é inversamente proporcional ao menor número (2). Além disso, o menor valor recebido é c, pois ele é inversamente proporcional ao maior número (5).

"O funcionário que recebeu o maior valor apresentou um valor de R$ 540,00 a mais que o funcionário que recebeu o menor valor". Logo:

$$a - c = 540$$

Podemos utilizar a "**propriedade fundamental da subtração**" na proporção:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\frac{1}{2}}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{\frac{1}{5}}} = \frac{\boldsymbol{a - c}}{\boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}}$$

$$2a = 3b = 5c = \frac{540}{\frac{5-2}{10}}$$

$$2a = 3b = 5c = \frac{540}{\frac{3}{10}}$$

$$\boxed{2a = 3b = 5c = 1.800}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.800. O valor que o funcionário que cometeu 3 erros recebeu é tal que:

$$3b = 1.800$$

$$b = \frac{1.800}{3}$$

$$b = 600$$

Gabarito: Letra C.

LISTA DE QUESTÕES – FCC

Frações

1. (FCC/ISS Jaboatão dos Guararapes/2024) O dominó é um antigo jogo de tabuleiro que é jogado com 28 peças e cada uma delas com pontos dos dois lados que variam de nenhum a 6 pontos. Com exceção da peça que não há pontos nos dois lados, pode-se ver as outras 27 peças como frações menores do que 1. Por exemplo, a peça com 5 pontos de um lado e 3 pontos do outro lado representaria a fração 3/5, independentemente do lado em que estão os 3 pontos ou os 5 pontos. A soma de todas as frações representadas pelas peças em que pelo menos em um dos lados há 4 pontos é

a) 106/12

b) 119/30

c) 106/15

d) 53/30

e) 44/30

2. (FCC/TRT CE/2024) Em um fórum há processos trabalhistas, tributários, ambientais e regulatórios. Nesse fórum, 1/5 dos processos são trabalhistas, 1/7 são ambientais e os restantes são regulatórios ou tributários. Sabe-se que há 260 processos ambientais e que há, pelo menos, 100 processos tributários. A quantidade máxima de processos regulatórios é:

a) 1096

b) 1296

c) 1560

d) 1456

e) 1196

3. (FCC/TRT 9/2022) O valor da soma $\frac{1}{2022^{-2}+1}+\frac{1}{2022^{-1}+1}+\frac{1}{2022^{0}+1}+\frac{1}{2022^{1}+1}+\frac{1}{2022^{2}+1}$ é:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{5}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{2}$

e) $\frac{9}{2}$

4. (FCC/TRT 4/2022) Um terreno foi dividido entre quatro irmãos, Ana, Bento, Carla e Daniel. Ana ficou com metade do terreno; Bento ficou com um terço do terreno; Carla ficou com um sétimo do terreno e Daniel ficou com 500 m². A área total do terreno, antes da divisão, era de:

a) 21.000 m²

b) 20.000 m²

c) 25.000 m²

d) 18.000 m²

e) 15.000 m²

5. (FCC/TRT 9/2022) Em relação às frações $\frac{7}{15}, \frac{8}{21}, \frac{2}{5}$ tem-se que

a) $\frac{8}{21} < \frac{7}{15} < \frac{2}{5}$.

b) $\frac{2}{5} < \frac{8}{21} < \frac{7}{15}$.

c) $\frac{8}{21} < \frac{2}{5} < \frac{7}{15}$.

d) $\frac{7}{15} < \frac{2}{5} < \frac{8}{21}$.

e) $\frac{2}{5} < \frac{7}{15} < \frac{8}{21}$.

6. (FCC/TRT 23/2022) Em uma fábrica de produção de robôs, registrou-se o número total de robôs produzidos em 3 anos. No primeiro ano foram produzidos 2/5 do total, no segundo ano foram produzidos 1/3 do total e no terceiro ano foram produzidos 8 robôs.

O número de robôs produzidos no primeiro ano foi

a) 8

b) 10

c) 12

d) 9

e) 6

7. (FCC/TRT 22/2022) Uma empresa de construção possui 48 funcionários divididos igualmente em 4 setores. No setor da Engenharia, 2/3 são formados em Engenharia Civil sendo metade desses mulheres. No setor de Contabilidade todos os funcionários são homens, no setor de Administração 1/4 dos funcionários são mulheres e, finalmente, no setor de Arquitetura, metade são mulheres. No máximo, o número de mulheres dentre os 48 funcionários é

a) 31.

b) 17.

c) 25.

d) 13.

e) 12.

8. (FCC/TJ CE/2022) Uma pesquisa em uma universidade verificou que cada estudante utiliza-se de apenas um meio de transporte para se deslocar até lá. A pesquisa também mostrou que três quartos de seus estudantes vão de ônibus, um décimo vai de carro, um oitavo vai de bicicleta e os 200 estudantes restantes vão a pé. O número de estudantes entrevistados é igual a

a) 24000.

b) 16000.

c) 20000.

d) 8000.

e) 6000.

9. (FCC/TRT 9/2022) Os preços dos bilhetes para uma peça de teatro são diferentes para professores e para alunos. O bilhete de professor custa R$ 35,00 e o bilhete de aluno custa 3/7 do preço do bilhete de professor.

O valor total gasto, em reais, com as entradas para uma peça de teatro de um grupo de 91 alunos e 6 professores é

a) 1.775,00.

b) 1.375,00.

c) 1.175,00.

d) 1.575,00.

e) 1.975,00.

10. (FCC/MANAUSPREV/2021) Marina e Paula trabalham o mesmo número de horas diárias em um escritório. Na segunda-feira, Marina usou $\frac{3}{5}$ das horas de trabalho para arquivar processos. Nesse mesmo dia, Paula usou, ininterruptamente, $\frac{2}{3}$ das horas que Marina usou arquivando processos para conferir o trabalho realizado por Marina. Se Paula começou o trabalho de conferência às 8h40 e terminou às 11h16, então, cada uma dessas funcionárias trabalha diariamente nesse escritório um total de

a) 7 horas e 40 minutos.

b) 7 horas e 20 minutos.

c) 6 horas e 40 minutos.

d) 6 horas e 30 minutos.

e) 6 horas e 20 minutos.

11.(FCC/BANRISUL/2019) Considere os dados, abaixo

$$x = \frac{7}{9}, y = \frac{16}{21} \text{ e } z = \frac{11}{14}$$

É correto afirmar que

a) y < x < z.

b) z < x < y.

c) y < z < x.

d) z < y < x.

e) x < z < y.

12. (FCC/CM Fortaleza/2019) O valor da expressão $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2019}\right)$ é

a) $\frac{2}{1009}$

b) $\frac{1}{1008}$

c) $\frac{2}{2018}$

d) $\frac{1}{2019}$

e) $\frac{2}{2019}$

13. (FCC/Pref. SJRP/2019) No início de uma campanha eleitoral, o candidato A possuía $\frac{5}{8}$ das intenções de voto e o candidato B, $\frac{3}{8}$. Após uma ação promocional do candidato B, $\frac{1}{3}$ das intenções de voto do candidato A migrou para o candidato B. A nova proporção de votos do candidato A é:

a) $\frac{5}{24}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{2}{3}$

14. (FCC/Pref. SJRP/2019) João gasta 18 minutos de ônibus para ir de sua casa até o trabalho e 45 minutos se for a pé. Em um dia ensolarado, João desceu do ônibus faltando 1/3 do caminho a ser percorrido e completou o percurso até o trabalho a pé. Supondo que as velocidades, tanto do ônibus quanto a de João, são constantes durante o trajeto, o tempo gasto por João para ir ao trabalho nesse dia foi de

a) 24 minutos.

b) 27 minutos.

c) 30 minutos.

d) 33 minutos.

e) 21 minutos.

15.(FCC/SABESP/2019) Um armazém possui 400 caixas de garrafas, cada caixa com 15 garrafas, sendo que dois terços das garrafas são de água mineral e as demais são de suco de uva. Dois quintos das garrafas de água são de 1,5 L, e um quinto das garrafas de suco são de 1,5 L. O total de garrafas de 1,5 L nesse armazém é

a) 2.000.

b) 2.700.

c) 3.900.

d) 3.600.

e) 3.200.

16. (FCC/Pref. Recife/2019) Um reservatório de água tem 1/5 de sua capacidade ocupada. Após a adição de 32.400 litros de água, o reservatório ficou com 7/8 de sua capacidade ocupada. A capacidade, em litros, do reservatório é de

a) 37.000.

b) 48.000.

c) 25.920.

d) 40.500.

e) 23.350.

17. (FCC/CM Fortaleza/2019) Algumas raposas estão comendo os ovos de um depósito. No primeiro dia elas comeram $\frac{1}{8}$ dos ovos. No segundo dia elas comeram $\frac{1}{5}$ dos ovos que sobraram e no terceiro dia comeram $\frac{1}{3}$ dos ovos que ainda restaram. Nesses três dias nenhum ovo foi reposto ou retirado do depósito. A fração dos ovos que inicialmente estavam no depósito e que sobraram intactos é

a) $\frac{7}{15}$

b) $\frac{119}{120}$

c) $\frac{7}{120}$

d) $\frac{1}{24}$

e) $\frac{1}{36}$

18. (FCC/Pref. Recife/2019) Antônio, Bernardo e Carlos adquiriram um terreno em sociedade de modo que a Antônio coube 1/4 do valor do terreno, a Bernardo, 1/3 e a Carlos, o restante. Antônio vendeu sua parte aos outros dois sócios, metade a cada um deles. Após essa transação, a parte que cabe a Carlos corresponde a

a) 3/5 do valor do terreno.

b) 7/12 do valor do terreno.

c) 5/8 do valor do terreno.

d) 2/3 do valor do terreno.

e) 13/24 do valor do terreno.

19. (FCC/DETRAN SP/2019) Uma fábrica produz camisetas em duas cores: brancas ou vermelhas. No último mês, 3/5 do total de camisetas produzidas eram brancas e as demais, vermelhas. Ainda, 3/10 do total de camisetas produzidas de cada cor tinham estampa na frente e as demais, atrás. Se 216 das camisetas produzidas naquele mês eram brancas com estampa na frente, então o número de camisetas vermelhas com estampa atrás foi de

a) 720.

b) 504.

c) 142.

d) 480.

e) 336.

20. (FCC/AFAP/2019) A rodovia que liga a cidade A à cidade B possui duas saídas: uma para a cidade C e mais a frente uma para a cidade D. A saída para a cidade C está situada a 1/5 de toda rodovia medido a partir do ponto de partida na cidade A. Viajando mais 27 km pela rodovia em sentido da cidade B, encontramos a segunda saída que é a que vai para a cidade D. O trecho da segunda saída até o final da rodovia corresponde a 13/20 de toda a rodovia. Logo a fração que corresponde ao trecho entre a primeira e a segunda saída e o percurso total da rodovia, em quilômetros, é

a) 17/20 e 180.

b) 3/20 e 200.

c) 14/25 e 99.

d) 3/20 e 180.

e) 14/25 e 200.

21.(FCC/SABESP/2018) Três quintos da área de uma garagem será destinada à construção de um jardim, e $\frac{5}{21}$ desse jardim será plantado com árvores frutíferas. Dessa forma, a fração da área da garagem que será destinada à parte do jardim plantada com árvores frutíferas é igual a

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{35}$

d) $\frac{88}{105}$

e) $\frac{1}{35}$

22.(FCC/TRT 6/2018) Josué sempre fez um levantamento de gastos, do mês anterior, em quatro categorias: moradia, alimentação, transporte e educação. Sempre em referência ao total das entradas do mês anterior, os gastos foram: $\frac{3}{10}$ para moradia, $\frac{1}{9}$ para alimentação, $\frac{1}{6}$ para transporte, x para educação. Os gastos com educação corresponderam a $\frac{3}{19}$ do que havia sobrado após os gastos nas outras três categorias. Desse modo, é correto afirmar que a fração do total das entradas do mês anterior que sobrou para Josué após os gastos nessas quatro categorias foi

a) $\frac{13}{45}$.

b) $\frac{8}{45}$.

c) $\frac{16}{45}$.

d) $\frac{4}{45}$.

e) $\frac{20}{45}$.

23. (FCC/IAPEN AP/2018) O preço de um produto à vista é $\frac{4}{5}$ do preço normal anunciado. O mesmo produto se comprado à prestação custa, no total, $\frac{3}{2}$ do preço anunciado. A diferença entre o preço à prestação e o preço à vista é igual ao preço anunciado multiplicado por:

a) $\frac{6}{5}$

b) $\frac{7}{10}$

c) $\frac{15}{8}$

d) $\frac{23}{10}$

e) $\frac{1}{3}$

24.(FCC/TRT 6/2018) Duas pessoas, P e Q, distam uma da outra, em linha reta, x metros. Simultaneamente P e Q caminham, uma em direção à outra, durante 15 minutos. P caminha exatamente $\frac{1}{4}$ de x e Q caminha exatamente $\frac{2}{5}$ de x. Nesse momento, a distância que as separam é y. Nos 15 minutos seguintes, P caminha exatamente $\frac{1}{3}$ de y e Q caminha exatamente $\frac{1}{2}$ de y. Após esses 30 minutos de caminhada, é correto afirmar que

a) P e Q estão exatamente no mesmo lugar.

b) P e Q já se cruzaram e estão separadas por uma distância igual a $\frac{13}{120}$ de x.

c) P e Q ainda não se cruzaram e estão separadas por uma distância igual a $\frac{7}{120}$ de x.

d) P e Q já se cruzaram e estão separadas por uma distância igual a $\frac{17}{120}$ de x.

e) P e Q ainda não se cruzaram e estão separadas por uma distância igual a $\frac{11}{120}$ de x.

25.(FCC/SABESP/2017) Se $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{7}{20}$, $c = \frac{9}{27}$ e $d = \frac{11}{30}$, então

a) c < b < d < a.

b) c < d < b < a.

c) b < c < d < a.

d) c < b < a < d.

e) b < c < a < d.

26. (FCC/TRT 24/2017) Francisco verificou que havia x pastas em um diretório. Ele abriu $\frac{1}{3}$ dessas pastas, deixou as restantes fechadas e foi embora. Geraldo encontra as pastas como Francisco havia deixado, abre $\frac{5}{7}$ das pastas que ainda estavam fechadas e foi embora. Humberto observa a situação das pastas após a intervenção de Geraldo, fecha $\frac{7}{34}$ das pastas que encontrou abertas e abre metade das pastas que encontrou fechadas. Após a intervenção de Humberto, a fração, das x pastas, que ficaram abertas é igual a

a) $\frac{31}{42}$

b) $\frac{5}{34}$

c) $\frac{13}{21}$

d) $\frac{15}{34}$

e) $\frac{9}{21}$

27. (FCC/TRT 20/2016) Manoel e Dolores precisavam classificar um grande número de processos. Manoel começou antes do que Dolores e ao final do dia havia classificado $\frac{3}{8}$ do total de processos. Dolores trabalhou mais rápido do que Manoel e ao final do dia havia classificado $\frac{1}{3}$ de processos a mais do que aqueles que Manoel havia classificado. Após esse dia de trabalho de Manoel e Dolores, é correto afirmar que

a) ainda faltam $\frac{1}{4}$ dos processos para serem classificados.

b) eles terminaram a tarefa.

c) ainda faltam $\frac{1}{8}$ dos processos para serem classificados.

d) eles classificaram $\frac{17}{24}$ dos processos.

e) eles classificaram apenas metade dos processos.

28. (FCC/TRT 14/2016) Em um curso de informática, $\frac{2}{3}$ dos alunos matriculados são mulheres. Em certo dia de aula, $\frac{2}{5}$ das mulheres matriculadas no curso estavam presentes e todos os homens matriculados estavam presentes, o que totalizou 27 alunos (homens e mulheres) presentes na aula. Nas condições dadas, o total de alunos homens matriculados nesse curso é igual a

a) 18.

b) 10.

c) 15.

d) 12.

e) 21.

29. (FCC/CNMP/2015) O resultado da expressão numérica

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right).(-6+13).\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\right).(-4-2).\left(\frac{11}{4}-\frac{10}{4}\right).(-1+11).\left(\frac{3}{7}-\frac{9}{7}\right).\left(-\frac{4}{9}-\frac{5}{9}\right)$$

é igual a

a) − 6.

b) 9.

c) −12.

d) 8.

e) − 4.

30.(FCC/TCE-PI/2014) Considere a soma S, dada por

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{2013 \times 2014}$$

Observando que

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

e assim sucessivamente, pode-se reescrever a soma S da seguinte maneira:

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2013} - \frac{1}{2014}\right)$$

O valor da soma S é igual a

a) $\frac{1}{2013}$

b) $\frac{2013}{2014}$

c) $\frac{1}{2015}$

d) $\frac{1}{2014}$

e) $\frac{2014}{2015}$

GABARITO – FCC

Frações

1. LETRA B
2. LETRA A
3. LETRA B
4. LETRA A
5. LETRA C
6. LETRA C
7. LETRA B
8. LETRA D
9. LETRA D
10. LETRA D
11. LETRA A
12. LETRA D
13. LETRA B
14. LETRA B
15. LETRA A
16. LETRA B
17. LETRA A
18. LETRA E
19. LETRA E
20. LETRA D
21. LETRA A
22. LETRA C
23. LETRA B
24. LETRA C
25. LETRA A
26. LETRA A
27. LETRA C
28. LETRA C
29. LETRA C
30. LETRA B

Lista de Questões – FCC

Razão e proporção

1.(FCC/SEDU ES/2022) Dona Paula pediu aos alunos de sua turma que formassem dois grupos. Ao final, ela percebeu que o grupo A ficou formado por 12 rapazes e 6 moças e o grupo B ficou com 18 moças. Para que a proporção de rapazes fique a mesma nos dois grupos e apenas retirando rapazes do grupo A e os colocando no grupo B, o número de rapazes que devem ir para o grupo B é:

a) 8.

b) 5.

c) 6.

d) 3.

e) 9.

2.(FCC/CBM AP/2022) Considere a seguinte recomendação sobre a aquisição de veículos de suporte básico (B) e avançado (A):

As ambulâncias de suporte básico à vida devem ser adquiridas na proporção de um veículo para cada grupo de 100 a 150 mil habitantes, e as de suporte avançado à vida de um veículo para cada grupo de 400 a 450 mil habitantes.

De acordo com essa recomendação, os atuais veículos de suporte básico de uma cidade seriam suficientes para, no máximo, 750 mil habitantes, e os de suporte avançado para, no máximo, 450 mil habitantes. Se a cidade possui atualmente 1 milhão de habitantes, as quantidades mínimas de veículos de suporte básico (B) e de veículos de suporte avançado (A) a serem adquiridas para a cidade se adequar à recomendação são:

a) A = 1 e B = 2

b) A = 1 e B = 3

c) A = 1 e B = 4

d) A = 2 e B = 2

e) A = 2 e B = 3

3. (FCC/TRT 19/2022) Pedro e Marco resolveram juntos uma prova com 30 questões. Para cada 2 questões que Pedro resolveu, Marco resolveu 3. A diferença entre o número de questões resolvidas por Marco e o número de questões resolvidas por Pedro foi de

a) 6

b) 8

c) 12

d) 10

e) 9

4.(FCC/TJ CE/2022) De uma pizza com 8 fatias idênticas Marcos comeu duas fatias inteiras e mais meia fatia. Em relação à pizza inteira, a proporção comida por Marcos foi de

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{5}{16}$

c) $\frac{3}{16}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{3}{8}$

5.(FCC/ALAP/2020) Para fazer um refresco de maracujá utiliza-se uma parte de suco de maracujá concentrado e três partes de água. Assim, a fim de obter 20 L de refresco de maracujá, além do suco concentrado, o número necessário de garrafas de 1,5 L de água é

a) 7

b) 9

c) 8

d) 10

e) 6

6. (FCC/SABESP/2019) Eduardo tem uma coleção de 2.100 selos entre nacionais e estrangeiros. Se para cada 5 selos nacionais ele tem 2 selos estrangeiros, então a diferença entre o número de selos nacionais e o número de selos estrangeiros é

a) 630.

b) 1.050.

c) 820.

d) 900.

e) 700.

7.(FCC/METRO SP/2019) Em uma livraria, a cada 12 clientes que compram livros em português, 7 clientes compram livros em língua estrangeira, sendo que nenhum cliente compra livros em mais de uma língua. Certo dia, o número de clientes que compraram livros em língua estrangeira foi 190 a menos do que o

número de clientes que compraram livros em português. O número de clientes que, nesse dia, fizeram compra de livros, foi:

a) 488.

b) 599.

c) 611.

d) 722.

e) 833.

8. (FCC/CM Fortaleza/2019) Aldo, Bento e Chico são donos de um imóvel em sociedade. Aldo é proprietário de $\frac{1}{3}$ do imóvel, Bento é proprietário de $\frac{1}{4}$ do imóvel e Chico é proprietário da fração restante. Chico decidiu sair da sociedade e vendeu sua parte aos outros dois sócios de modo que, após a venda, a proporção entre a parte do imóvel de propriedade de Aldo em relação à parte do imóvel de propriedade de Bento se mantivesse igual à mesma proporção de antes da venda. Assim, a proporção do imóvel que Chico vendeu a Aldo foi de

a)$\frac{5}{24}$

b)$\frac{5}{21}$

c)$\frac{5}{36}$

d)$\frac{3}{4}$

e)$\frac{1}{3}$

9.(FCC/TRT 6/2018) Em uma empresa, no ano de 2005, o total de funcionários era 100, e a razão entre o número de homens e o número de mulheres era $\frac{7}{3}$. De 2005 até 2010 nenhum funcionário se desligou da empresa e foram feitas contratações de modo a duplicar o número total de funcionários. Após essas contratações a razão, que era $\frac{7}{3}$, passou a ser $\frac{3}{2}$. Desse modo, é correto concluir que a razão entre o número de homens contratados e o número de mulheres contratadas, nesse período, foi

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{2}{1}$

d) $\frac{1}{1}$

e) $\frac{4}{5}$

10.(FCC/TRT 12/2013) Fincadas na areia de uma praia estão pranchas de *surf* e de *bodyboard*, na razão de 7 para 4. Sabendo que são 24 pranchas de surf a mais que as de *bodyboard*, o número total dessas pranchas fincadas na areia é igual a

a) 62.

b) 48.

c) 12.

d) 88.

e) 27.

Gabarito – FCC

Razão e proporção

1. LETRA E
2. LETRA D
3. LETRA A
4. LETRA B
5. LETRA D
6. LETRA D
7. LETRA D
8. LETRA B
9. LETRA D
10. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES – FCC

Proporcionalidade

1.(FCC/TRT 22/2022) Alberto tem 25 anos, Breno 40 anos e Carlos 35 anos. Os três trabalham como garçons em um restaurante e decidiram dividir entre eles o valor total das gorjetas. Alberto, que trabalha no restaurante há apenas 5 meses, propôs dividir o total das gorjetas proporcionalmente à idade de cada um, mas Carlos, que trabalha há 1 ano e 3 meses, discorda e propõe que a divisão seja proporcional ao tempo de serviço de cada um no restaurante. Breno, com 1 ano e 8 meses no restaurante foi convidado a desempatar e decidiu que o valor total fosse dividido proporcionalmente ao tempo de serviço. Com um valor total de gorjetas de R$ 1.200,00 e considerando as duas propostas, Alberto deixou de ganhar, em reais,

a) 100,00.

b) 250,00.

c) 30,00.

d) 150,00.

e) 300,00.

2. (FCC/TRT 23/2022) Em um processo de partilha de herança entre Ana, Beatriz e Clara, ficou decidido que os valores recebidos serão diretamente proporcionais às suas respectivas idades. Sabe-se que Ana tem o triplo da idade de Clara que, por sua vez, tem a metade da idade de Beatriz. Clara receberá 100 mil reais.

O valor total da herança é de:

a) R$ 700.000,00

b) R$ 400.000,00

c) R$ 600.000,00

d) R$ 900.000,00

e) R$ 500.000,00

3. (FCC/MANAUSPREV/2021) Tiago Duarte e Bruno Castro ganharam um prêmio de R$ 35.000,00 em uma loteria. Tiago propôs que a divisão fosse feita proporcionalmente ao número de vogais do primeiro nome de cada um. Bruno propôs que o prêmio fosse dividido proporcionalmente ao número de consoantes do sobrenome de cada um. A proposta com a menor diferença entre os valores que cada um receberia é:

a) Tiago receberia R$ 7.000,00 a mais que Bruno.

b) Tiago receberia R$ 5.000,00 a mais que Bruno.

c) Bruno receberia R$ 7.000,00 a mais que Tiago.

d) Bruno receberia R$ 6.000,00 a mais que Tiago.

e) Bruno receberia R$ 5.000,00 a mais que Tiago.

4.(FCC/Pref. Recife/2019) Sabe-se que as sequências S_1 e S_2 abaixo são diretamente proporcionais $(x > 0)$, isto é, a razão entre os elementos correspondentes das duas sequências é constante:

Sequência S_1: $\{4, x, 16, \ldots\}$

Sequência S_2: $\{x, 9, y, \ldots\}$

O valor de y é igual a

a) 15.

b) 9.

c) 12.

d) 6.

e) 24.

5. (FCC/SABESP/2019) Albertina dividiu certa quantia entre seus 3 netos, um de 11 anos, um de 12 anos e outro de 14 anos, de maneira que cada neto recebeu um valor diretamente proporcional à própria idade. Se o neto mais novo recebeu R$ 33,00, então os dois netos mais velhos receberam um total de

a) R$ 71,00.

b) R$ 78,00.

c) R$ 85,00.

d) R$ 92,00.

e) R$ 99,00.

6. (FCC/Pref. SJRP/2019) Renato e Ricardo fizeram uma viagem de carro e percorreram um total de 3 552 km. Eles se revezaram na direção de maneira que, para cada 123 km que Renato dirigia, Ricardo dirigia 321 km. A distância total percorrida por Ricardo na direção do veículo foi de

a) 2.247 km.

b) 2.444 km.

c) 2.568 km.

d) 2.727 km.

e) 2.889 km.

7.(FCC/METRO SP/2019) As 3 estações de maior movimento em uma cidade são X, Y e Z. Pela estação X passam 20.136 pessoas por dia e pela estação Z passam, por dia, 6.712 pessoas a mais do que pela estação Y. Serão contratados 18 agentes para trabalhar nessas estações, que serão distribuídos entre as estações de forma diretamente proporcional ao número de pessoas que passam por dia em cada estação. Sabendo que a estação X receberá 6 agentes, o número de passageiros que passam pela estação Z, por dia, é:

a) 23.492.

b) 23.832.

c) 24.560.

d) 24.724.

e) 25.250.

8. (FCC/SEFAZ BA/2019) Certa empresa de tecnologia foi criada a partir do aporte de capital investido por três sócios. O sócio B participou com o dobro do sócio A, enquanto o sócio C participou com a metade do investido pelo sócio A. Na partilha do lucro de 525 mil reais, proporcionalmente ao que cada um investiu, o sócio A receberia o valor de, em mil reais,

a) 140.

b) 150.

c) 210.

d) 250.

e) 280.

9.(FCC/IAPEN AP/2018) A quantia de R$ 900,00 foi repartida em partes diretamente proporcionais às idades de Dimitri, 5 anos, Luiz, 7 anos e Nicolas, 8 anos. Então a diferença entre as quantias que Nicolas e Luiz receberam é, em reais, de

a) 135,00.

b) 90,00.

c) 225,00.

d) 45,00.

e) 35,00.

10.(FCC/SABESP/2018) Cento e quarenta tarefas anuais serão distribuídas entre 4 funcionários diretamente proporcional ao tempo de empresa de cada um. Dois dos funcionários têm 6 anos de empresa. Dos 4 funcionários, aquele que tem mais tempo de empresa possui o triplo dos anos de empresa do único funcionário dos 4 com menos de 6 anos de empresa. Se a média aritmética simples dos anos de

empresa dos 4 funcionários é de 7 anos, o funcionário com mais anos de empresa receberá a quantidade de tarefas anuais igual a

a) 65

b) 64

c) 58

d) 66

e) 60

11. (FCC/SABESP/2018) Quarenta e uma tarefas devem ser distribuídas entre Ana, Bruna, Célia e Débora para que realizem ao longo de uma semana de trabalho.

Sabendo-se que funcionárias mais experientes são mais rápidas na realização das tarefas, o número de tarefas que cada funcionária receberá será diretamente proporcional ao número de anos que ela trabalha na empresa. Das quatro funcionárias, Ana é a que possui menos anos de empresa, o que corresponde a $\frac{2}{5}$ dos anos de trabalho de Débora, que é a mais antiga na empresa. Célia tem 2 anos a menos de empresa do que Débora, e Bruna tem 1 ano a mais de empresa do que Ana. Se a média de anos de empresa das quatro funcionárias é igual a 10,25 anos, então, do total de tarefas que serão distribuídas entre as quatro funcionárias, Ana receberá

a) $\frac{15}{41}$.

b) $\frac{3}{41}$.

c) $\frac{3}{20}$.

d) $\frac{6}{41}$.

e) $\frac{1}{5}$.

12.(FCC/CL DF/2018) Miguel, Otávio e Pedro foram convocados para realizar um trabalho emergencial. Para recompensá-los posteriormente, decide-se dividir uma quantia em reais entre os 3 em partes diretamente proporcionais ao tempo dedicado de cada um para realizar o trabalho e inversamente proporcionais às respectivas idades. Sabe-se que Miguel dedicou 4 horas para o trabalho e sua idade é igual a 30 anos, Otávio dedicou 8 horas e sua idade é igual a 40 anos e Pedro dedicou 15 horas e sua idade é igual a 60 anos. Se a menor parte correspondente a esta divisão foi de R$ 4.800,00, então a maior parte foi igual a

a) R$ 9.000,00.

b) R$ 6.000,00.

c) R$ 12.000,00.

d) R$ 8.400,00.

e) R$ 7.200,00.

13. (FCC/TRT 11/2017) José Souza, Paulo Almeida e Claudio Prinot são três funcionários que têm que realizar, no total para os três, 72 tarefas diariamente. Cada dia eles escolhem um critério diferente para repartir as tarefas. Por exemplo, no dia de ontem eles decidiram que as 72 tarefas seriam divididas entre eles diretamente proporcional às consoantes do sobrenome de cada um. Sendo assim, ontem Paulo Almeida teve que realizar o total de tarefas igual a

a) 15.

b) 12.

c) 18.

d) 9.

e) 24

14. (FCC/SEMA MA/2016) Aline, Beta, Clara e Débora estão montando um restaurante. Aline investiu, inicialmente, R$ 40.000,00; Beta, R$ 32.000,00; Clara, R$ 48.000,00; Débora, R$ 30.000,00. Ficou decidido que os lucros seriam divididos proporcionalmente às quantias inicialmente investidas.

Assim, se, em determinado mês, o restaurante lucrou R$ 7.500,00, a parte do lucro devida à Beta é de

a) R$ 2.400,00.

b) R$ 1.200,00.

c) R$ 3.200,00.

d) R$ 2.600,00.

e) R$ 1.600,00.

15. (FCC/TRF 3/2016) Uma herança de R$ 82.000,00 será repartida de modo inversamente proporcional às idades, em anos completos, dos três herdeiros. As idades dos herdeiros são: 2, 3 e x anos. Sabe-se que os números que correspondem às idades dos herdeiros são números primos entre si (o maior divisor comum dos três números é o número 1) e que foi R$ 42.000,00 a parte da herança que o herdeiro com 2 anos recebeu. A partir dessas informações o valor de x é igual a

a) 7.

b) 5.

c) 11.

d) 1.

e) 13.

16.(FCC/ARSETE/2016) Em uma empresa, um prêmio em dinheiro foi dividido entre 3 funcionários (Antônio, Bento e Celso) em partes diretamente proporcionais ao tempo de serviço de cada um na empresa e inversamente proporcionais ao número de faltas injustificadas deles dentro de um período. O quadro abaixo forneceu as informações necessárias para o cálculo desta divisão.

Informação	Antônio	Beto	Celso
Tempo de serviço	8 anos	10 anos	18 anos
Número de faltas injustificadas	2 dias	5 dias	6 dias

Se Celso recebeu R$ 13.500,00, então Antônio recebeu, em reais,

a) 12.000,00

b) 9.000,00

c) 27.000,00

d) 18.000,00

e) 22.500,00

17.(FCC/Cam. Mun. SP/2014) Na tabela abaixo, a sequência de números da coluna A é inversamente proporcional à sequência de números da coluna B.

A	B
16	60
12	X
8	120
4	240

A letra X representa o número:

a) 90.

b) 80.

c) 96.

d) 84.

e) 72.

18. (FCC/SABESP/2014) Dividindo uma determinada quantia em dinheiro entre Arnaldo, Bento e Célio em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 5, respectivamente, observa-se que a pessoa que recebeu o maior valor apresentou um valor de R$ 72.000,00 a mais que a pessoa que recebeu o menor valor. O valor que Bento recebeu é, em R$, igual a

a) 72.000,00.

b) 60.000,00.

c) 48.000,00.

d) 80.000,00.

e) 96.000,00.

19. (FCC/SERGAS/2013) O gerente de uma empresa decide dividir uma quantia em dinheiro entre 3 de seus funcionários, em partes inversamente proporcionais ao número de erros que eles tiveram na elaboração de uma determinada tarefa. O número de erros registrados para estes funcionários foram exatamente 2, 3 e 5. Se o funcionário que recebeu o maior valor apresentou um valor de R$ 540,00 a mais que o funcionário que recebeu o menor valor, então o funcionário que teve 3 erros recebeu, em reais,

a) 540,00.

b) 720,00.

c) 600,00.

d) 840,00.

e) 450,00.

GABARITO – FCC

Proporcionalidade

1. LETRA D
2. LETRA C
3. LETRA E
4. LETRA E
5. LETRA B
6. LETRA C
7. LETRA A
8. LETRA B
9. LETRA D
10. LETRA E
11. LETRA D
12. LETRA A
13. LETRA E
14. LETRA E
15. LETRA A
16. LETRA D
17. LETRA B
18. LETRA D
19. LETRA C

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.