Aula 00

TJ-PI (Analista Judiciário - Estatístico)
Cálculo e Álgebra Linear

Autor:
Equipe Exatas Estratégia Concursos

26 de Janeiro de 2023

Índice

AVISO IMPORTANTE!

Olá, Alunos (as)!

Passando para informá-los a respeito da **disposição das questões** dentro do nosso material didático. Informamos que a escolha das bancas, dentro dos nossos Livros Digitais, é feita de maneira estratégica e pedagógica pelos nossos professores a fim de proporcionar a melhor didática e o melhor direcionamento daquilo que mais se aproxima do formato de cobrança da banca do seu concurso.

Assim, o formato de questões divididas por tópico facilitará o seu processo de estudo, deixando mais alinhado às disposições constantes no edital.

No mais, continuaremos à disposição de todos no Fórum de dúvidas!

Atenciosamente,

Equipe Exatas

Estratégia Concursos

APRESENTAÇÃO DO CURSO

Olá, pessoal! Tudo bem?

É com grande satisfação que damos início ao nosso curso!

Os professores **Eduardo Mocellin, Francisco Rebouças, Luana Brandão, Djefferson Maranhão** e **Vinicius Veleda** ficarão responsáveis pelo **Livro Digital**.

Antes de continuarmos, vamos apresentar os professores do material escrito:

Eduardo Mocellin: Fala, pessoal! Meu nome é Eduardo Mocellin, sou professor de Matemática e de Raciocínio Lógico do Estratégia Concursos e engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Sinto-me feliz em poder contribuir com a sua aprovação! Não deixe de me seguir no Instagram: **@edu.mocellin**

Francisco Rebouças: Fala, alunos! Aqui é o Francisco Rebouças, professor de Matemática do Estratégia Concursos. Sou Engenheiro Aeroespacial formado pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Saiba que será uma honra fazer parte da sua jornada rumo à aprovação e que estaremos sempre aqui para auxiliá-los com o que precisarem. Um grande abraço e nos vemos nas aulas!

Luana Brandão: Oi, pessoal! O meu nome é Luana Brandão e sou professora de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduada, Mestre e Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense. Passei nos concursos de Auditor Fiscal (2009/2010) e Analista Tributário (2009) da Receita Federal e de Auditor Fiscal do Estado do Rio de Janeiro (2010). Sou Auditora Fiscal do Estado do RJ desde 2010. Vamos juntos nesse caminho até a aprovação? **@professoraluanabrandao**

Djefferson Maranhão: Olá, amigos do Estratégia Concursos, tudo bem? Meu nome é Djefferson Maranhão, professor de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduado em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Desde 2015, sou Auditor da Controladoria Geral do Estado do Maranhão (2015 - 5º lugar). Antes, porém, exerci os cargos de Analista de Sistemas na UFMA (2010 - 1º lugar) e no TJ-MA (2011 - 1º lugar). Já estive na posição de vocês e sei o quanto a vida de um concurseiro é um tanto atribulada! São vários assuntos para se dominar em um curto espaço de tempo. Por isso, contem comigo para auxiliá-los nessa jornada rumo à aprovação. Um grande abraço.

Vinicius Veleda: Olá, caros alunos! Sou Auditor Fiscal do Estado do Rio Grande do Sul. Professor de Matemática e Matemática Financeira do Estratégia Concursos. Aprovado nos Concursos de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda dos Estados do Rio Grande do Sul (SEFAZ RS - 2019), Santa Catarina (SEFAZ SC - 2018) e Goiás (SEFAZ GO - 2018). Formado em Engenharia de Petróleo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com graduação sanduíche em Engenharia Geológica pela Universidade Politécnica de Madrid (UPM). Pela UFRJ, fui campeão sul americano do Petrobowl (Buenos Aires) e, posteriormente, Campeão Mundial (Dubai). Cursei meu ensino médio na Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx). Contem comigo nessa trajetória! **@viniciusveleda**

O material escrito em **PDF** está sendo construído para ser sua fonte **autossuficiente** de estudos. Isso significa que o livro digital será **completo** e **voltado para o seu edital**, justamente para que você não perca o seu precioso tempo "caçando por aí" o conteúdo que será cobrado na sua prova. Ademais, sempre que necessário, você poderá fazer perguntas sobre as aulas no **fórum de dúvidas**. **Bons estudos!**

INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES

Conceitos Introdutórios

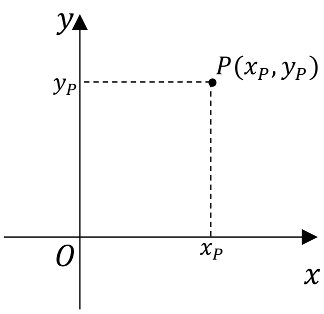
Par Ordenado e o Plano Cartesiano

Quando falamos de um par, pensamos logo em dois objetos: por exemplo, em um par de tênis ou de luvas. Na matemática, **um par é representado por um conjunto de dois elementos**. Por exemplo, {1 ,2} e {3, 4} são pares. Tudo bem?!

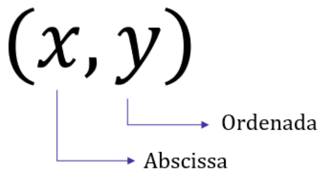
Os **pares ordenados são pares em que a ordem dos elementos deve ser considerada**. Por exemplo, $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ **não é igual a** $(\mathbf{2}, \mathbf{1})$. Perceba que para representar pares ordenados, usei parênteses ao invés de chaves. Essa é a notação que usamos para diferenciar um par ordenado de um par qualquer.

- Em um par qualquer: $\{a, b\} = \{b, a\}$
- Em um **par ordenado** $(a, b) \neq (b, a)$

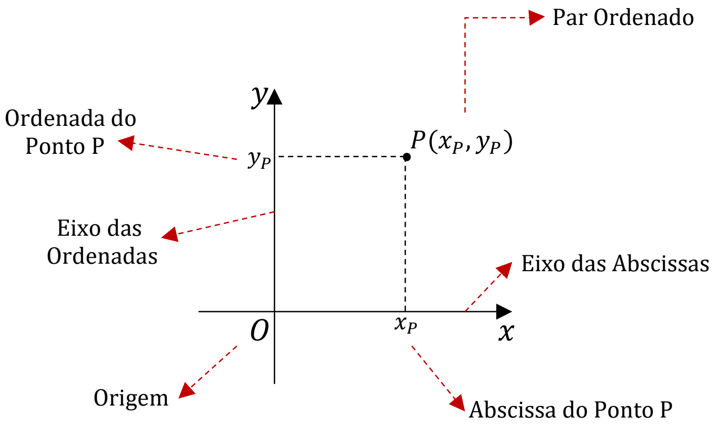
Um **par ordenado pode ser representado por um ponto** no plano cartesiano. Esse plano possui **duas retas numéricas que se cruzam ortogonalmente, organizando o que chamamos de um sistema de coordenadas ortogonal.**. *Como assim, professor?!* Veja abaixo uma imagem!



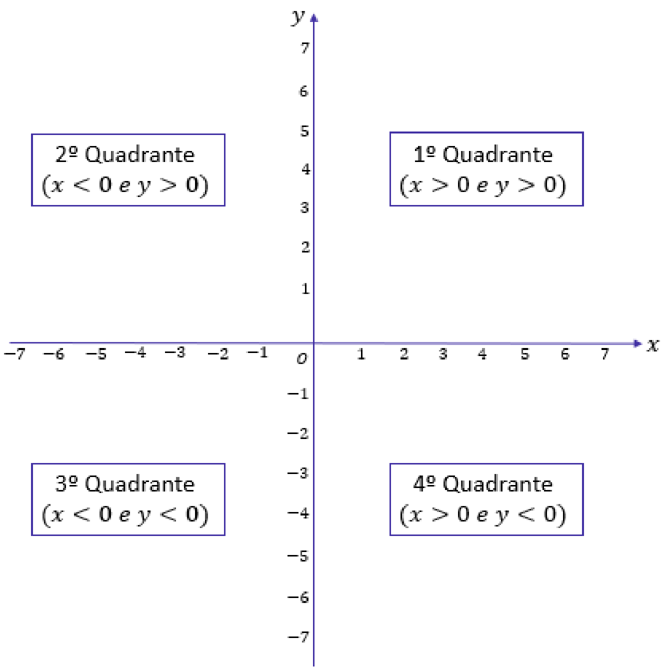
O ponto P está representado pelo par ordenado (x_p, y_p). Dizemos que x_p e y_p são as coordenadas do ponto, possuindo cada um nomes bem conhecidos: x_p é a **abscissa** e y_p é a **ordenada**.



Ademais, temos duas retas que se cruzam em um ponto O, que vamos chamar de **origem**. O eixo horizontal Ox é denominado **eixo das abscissas**. Por sua vez, o eixo vertical Oy é denominado **eixo das ordenadas**. Quando falarmos em "eixos coordenados", estaremos nos referindo aos dois eixos.



É interessante perceber que **um ponto pode estar em qualquer lugar do plano**, inclusive sobre o eixo. Quando a ordenada do ponto é nula ($y = 0$), dizemos que o ponto está sobre o eixo Ox. De igual modo, quando a abscissa do ponto é nula ($x = 0$), dizemos que ele está sobre o eixo Oy. Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões:



Gostaria que você notasse duas coisas:

- Cada região do plano é chamada de quadrante;
- A ordem dos quadrantes é tomada usando o sentido anti-horário.

Por enquanto, não precisaremos saber mais do que isso. Em breve, utilizaremos esse plano para representar várias coisas, incluindo conjuntos e funções. Tudo bem?!

Produto Cartesiano

A partir desse ponto da matéria, falaremos muito de conjuntos. É muito importante que você já tenha passado por nossa aula sobre eles. Caso sinta dificuldade mais a frente, recomendo fazer uma rápida revisão. Garanto que será muito proveitoso para a aula de hoje! Vamos começar.

O **produto cartesiano de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$** é o conjunto formado por **todos os pares ordenados** (x, y), em que x pertence a A e o y pertence a B. Representamos esse conjunto por $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$. Matematicamente,

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Professor, entendi foi nada! Quer dizer que o produto cartesiano de dois conjuntos é um outro conjunto?
Isso mesmo, pessoal. Vamos tentar entender por meio de um exemplo. Considere os dois conjuntos abaixo:

- $A = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$
- $B = \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}$

1ª parte da definição: $A \times B$ é um conjunto formado por **todos os pares ordenados** (x, y).

$$A \times B = \{(x, y), (x, y), (x, y), (x, y), (x, y), (x, y)\}$$

2ª parte da definição: em que x pertence a A,

$$A \times B = \{(\mathbf{1}, y), (\mathbf{1}, y), (\mathbf{2}, y), (\mathbf{2}, y), (\mathbf{3}, y), (\mathbf{3}, y)\}$$

Observe que substituímos os "x's" apenas por elementos de $A = \{1, 2, 3\}$.

3ª parte da definição: e o y pertence a B.

$$A \times B = \{(1, \mathbf{4}), (1, \mathbf{5}), (2, \mathbf{4}), (2, \mathbf{5}), (3, \mathbf{4}), (3, \mathbf{5})\}$$

Agora, substituímos os "y's" apenas por elementos de $B = \{4, 5\}$. O "x" dos pares ordenados é formado por elementos de A e o "y" dos pares ordenados é formado por elementos de B!! Devemos criar **todos os pares possíveis** tendo essa regra na cabeça! Vamos tentar criar um procedimento para facilitar a determinação de $A \times B$

Pegue o primeiro elemento de $A = \{\mathbf{1}, 2, 3\}$, no caso o número "1". O "x" dos pares ordenados virão de A.

$$(1, y)$$

Como o conjunto $B = \{4, 5\}$ tem dois elementos, conseguiremos formar dois pares em que "$x = 1$".

$$(\mathbf{1}, \mathbf{4}) \text{ e } (\mathbf{1}, \mathbf{5})$$

Vamos para o segundo elemento de $A = \{1, \mathbf{2}, 3\}$, no caso, "2". Repetimos o procedimento.

$$(2, y)$$

O conjunto $B = \{4, 5\}$ tem dois elementos que poderemos usar para formar os pares.

$$(\mathbf{2}, \mathbf{4}) \text{ e } (\mathbf{2}, \mathbf{5})$$

Por fim, o último elemento de $A = \{1, 2, \mathbf{3}\}$ é o número "3".

$$(3, y)$$

Usamos os dois elementos de B para formar os pares $(\mathbf{3}, \mathbf{4})$ **e** $(\mathbf{3}, \mathbf{5})$**.** Pronto, em vermelho estão todos os pares que podemos formar obedecendo a regra que **x pertence a $\boldsymbol{A}$ e y pertence a $\boldsymbol{B}$**.

EXEMPLIFICANDO

Exemplo 1:

- $A = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ e $B = \{\mathbf{2}\}$

$$A \times B = \{(\mathbf{0}, \mathbf{2}), (\mathbf{1}, \mathbf{2})\}$$

Exemplo 2:

- $A = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{5}\}$ e $B = \{\mathbf{250}, \mathbf{350}\}$

$$A \times B = \{(\mathbf{1}, \mathbf{250}), (\mathbf{1}, \mathbf{350}), (\mathbf{2}, \mathbf{250}), (\mathbf{2}, \mathbf{350}), (\mathbf{5}, \mathbf{250}), (\mathbf{5}, \mathbf{350})\}$$

Agora, quero que vocês observem algumas coisas:

- No exemplo (1), o conjunto A tinha 2 elementos e o conjunto B tinha 1 elemento. O produto cartesiano desses dois conjuntos possui **$2 \cdot 1 = 2$ elementos**.
- No exemplo (2), o conjunto A tinha 3 elementos e o conjunto B tinha 2 elementos. O produto cartesiano desses dois conjuntos possui **$3 \cdot 2 = 6$ elementos**.

Obs.: **Cada par ordenado do produto cartesiano é considerado um elemento do conjunto $A \times B$.**

Perceba que o número de elementos do produto cartesiano $A \times B$ será sempre **o produto dos elementos de cada um dos conjuntos envolvidos**.

Sejam $n(A)$ e $n(B)$ as quantidades de elementos de A e B, respectivamente, então

$$\boldsymbol{n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)}$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. BETIM/2020) Considere os conjuntos $\boldsymbol{A}$ = {$\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$}, $\boldsymbol{B}$ = {$\mathbf{1}$} e $\boldsymbol{C}$ = {$\mathbf{0}$, $\mathbf{5}$}. Em relação aos produtos cartesianos entre dois desses conjuntos, é correto afirmar que

A) $A \times B = \{(2,1), (3,1), (1,4)\}$
B) $A \times C = \{(2,0), (3,0), (4,0)\}$
C) $B \times C = \{(1,0), (1,5), (0,1), (5,1)\}$
D) $C \times B = \{(0,1), (5,1)\}$
E) $C \times A = \{(0,2), (0,3), (5,2), (5,3), (5,4)\}$

Comentários:

Vamos determinar o produto cartesiano de cada uma das alternativas.

A) $A \times B = \{(2,1), (3,1), (1,4)\}$

ERRADO. Pessoal, o produto cartesiano de A por B é o conjunto formado por TODOS os pares ordenados em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

$$A \times B = \{(2,1), (3,1), \boldsymbol{(4,1)}\}$$

Veja que **a alternativa trocou o último par ordenado, $\boldsymbol{(4,1) \neq (1,4)}$.**

B) $A \times C = \{(2,0), (3,0), (4,0)\}$
ERRADO. O produto cartesiano de A por C é o conjunto formado por TODOS os pares ordenados em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a C.

$$A \times C = \{(2,0), (3,0), (4,0), \mathbf{(2,5)}, \mathbf{(3,5)}, \mathbf{(4,5)}\}$$

A alternativa esqueceu de listar os pares ordenados que possuem o "5" como segundo elemento.

C) $B \times C = \{(1,0), (1,5), (0,1), (5,1)\}$
ERRADO. O produto cartesiano de B por C é o conjunto formado por TODOS os pares ordenados em que o primeiro elemento pertence a B e o segundo elemento pertence a C.

$$B \times C = \{(1,0), (1,5)\}$$

A alternativa acrescentou alguns pares que <u>não pertencem</u> ao produto cartesiano. Note que $B = \{1\}$. Logo, só podemos ter pares com primeiro elemento igual a 1.

D) $C \times B = \{(0,1), (5,1)\}$
CERTO. O produto cartesiano de C por B é o conjunto formado por TODOS os pares ordenados em que o primeiro elemento pertence a C e o segundo elemento pertence a B.

$$C \times B = \{(0,1), (5,1)\}$$

E) $C \times A = \{(0,2), (0,3), (5,2), (5,3), (5,4)\}$
ERRADO. O produto cartesiano de C por A é o conjunto formado por TODOS os pares ordenados em que o primeiro elemento pertence a C e o segundo elemento pertence a A.

$$C \times A = \{(0,2), (0,3), \mathbf{(0,4)}, (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

A alternativa esqueceu de listar o par ordenado $\mathbf{(0,4)}$. Gabarito: LETRA D.

Pessoal, o produto cartesiano de A por B **<u>não é igual</u>** ao produto cartesiano de B por A.

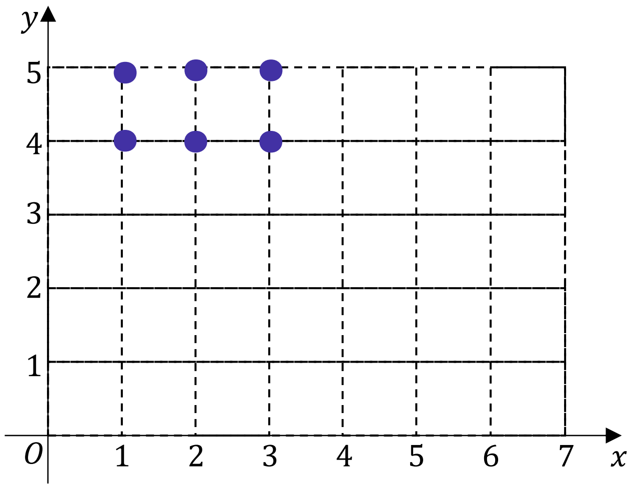
$$A \times B \neq B \times A$$

São dois conjuntos diferentes. A igualdade somente ocorre quando $B = A$.

Para finalizar essa parte de produto cartesiano, tenho mais alguns comentário a fazer. Falamos diversas vezes que **o produto cartesiano de dois conjuntos é um outro conjunto, formado por pares ordenados.** Um pouco mais antes, falamos que pares ordenados podem ser representados no plano cartesiano por pontos. Assim, **é possível representar o produto cartesiano no plano**. Vamos pegar aquele nosso primeiro exemplo!

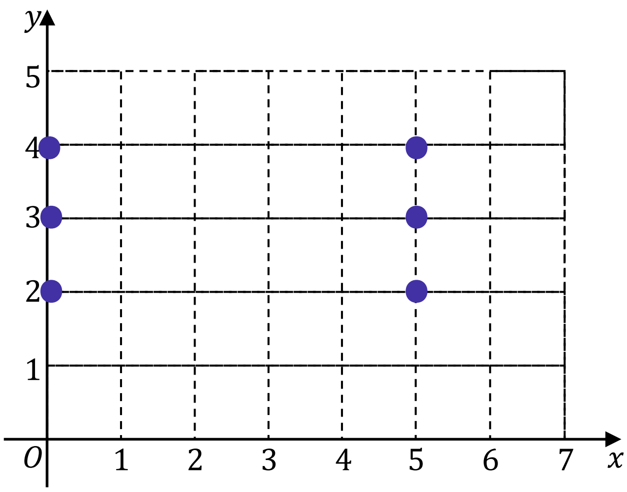
$$A \times B = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$$

Como ficaria a representação desse conjunto no plano? Vejamos!



Pronto, cada um dos pontos acima representa um dos pares ordenados do conjunto $A \times B$. Vamos ver mais!

$$C \times A = \{(0,2), (0,3), (0,4), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$



Sabemos representar o produto cartesiano no plano? **Devemos colocar ponto por ponto**. Se tudo estiver claro até aqui, vamos avançar!

Vimos o produto cartesiano entre dois **conjuntos finitos**. *Mas, e se um dos conjuntos for infinito? Ou os dois? Por exemplo, sabemos que o conjunto dos números reais possui infinitos elementos, seria possível calcular* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *?* Seria sim! **O resultado é um conjunto com um número infinito de pares ordenados.**

Não é muito comum concursos públicos entrarem nessa seara. Quando entram, **é apenas para identificarmos a região correspondente no plano**. Por exemplo, considere os intervalos abaixo.

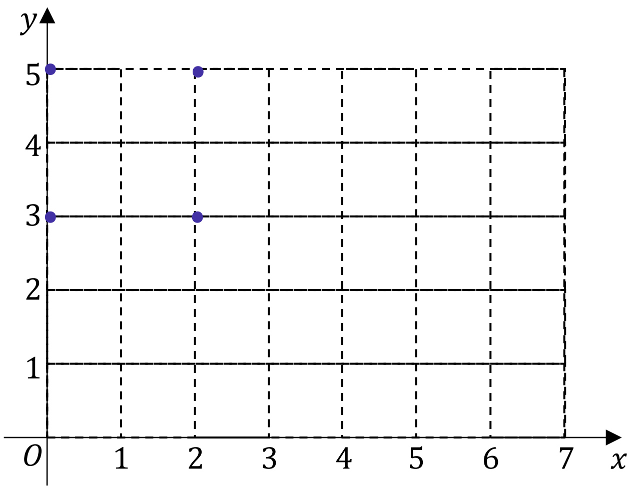
- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,2]$
- $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\} = [3,5]$

Temos dois intervalos. **O primeiro é formado por todos os números entre 0 e 2. O segundo, por sua vez, é formado por todos os números entre 3 e 5. As extremidades estão incluídas em ambos os intervalos.**

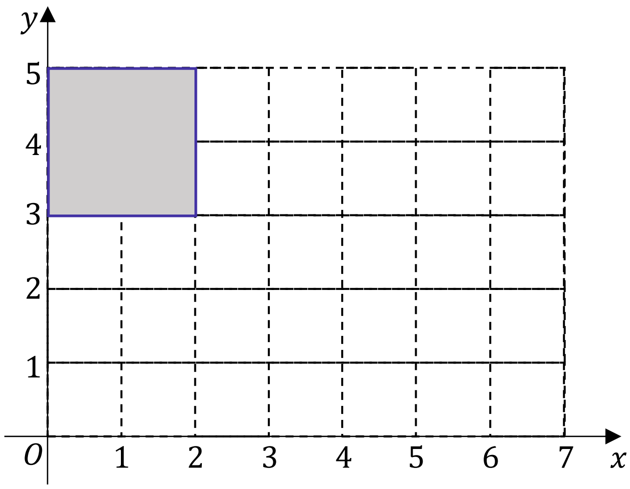
Para não complicar a vida de vocês, aqui serei bem direto: as questões gostam de saber qual a região do plano que representa o produto cartesiano de A por B. A dica aqui é a seguinte: **esqueça que é um intervalo**. Pense que $A = \{0,2\}$ e $B = \{3,5\}$. Nessa situação,

$$A \times B = \{(0,3), (0,5), (2,3), (2,5)\}$$

Vamos marcar esses pontos no plano conforme aprendemos anteriormente.



A situação acima seria no caso de conjuntos finitos. No entanto, estamos trabalhando com intervalos e vamos ter infinitos pontos. Todos os demais pontos estarão dentro do quadrado formado pelos pontos que acabamos de desenhar.



Pronto, o produto cartesiano de A por B ($A \times B$ ou $[0,2] \times [3,5]$) é representado por toda essa região quadrada que destacamos, incluída as bordas.

(PREF. TAUÁ/2014) Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$, podemos afirmar corretamente que o gráfico do produto cartesiano $A \times B$ é representado pela área de um

A) triângulo.

B) trapézio.

C) quadrado.

D) retângulo.

Comentários:

Questão muito parecida com o exemplo que acabamos de desenvolver. Temos:

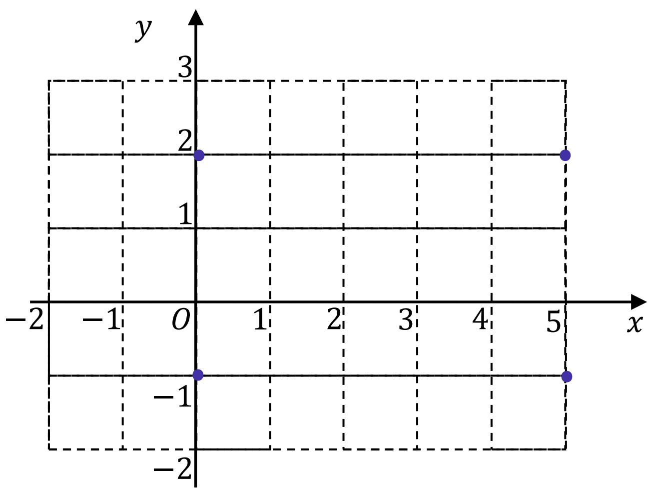
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\} = [0, 5]$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2]$$

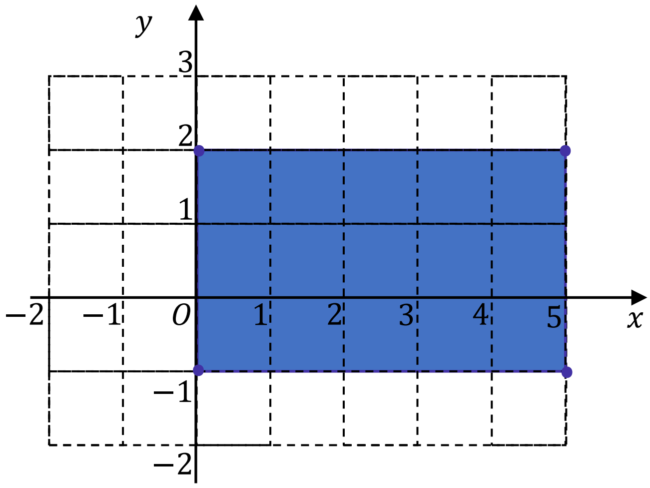
A representação gráfica de $A \times B$, sendo A e/ou B conjuntos infinitos, vamos pensar que eles não são, pois aprendemos bem a fazer quando os conjuntos são finitos. Considere que $A = \{0,5\}$ e $B = \{-1,2\}$. Assim,

$$A \times B = \{(0,-1), (0,2), (5,-1), (5,2)\}$$

Agora, vamos organizar esses pontos no plano cartesiano.



Pronto, veja que **os pontos estão dispostos conforme vértices de um retângulo**. A região que representa o produto cartesiano dos dois intervalos da questão é exatamente a área interna ao retângulo formado por esses pontos, **incluído aqueles que formam as bordas**.



Portanto, **o produto cartesiano $A \times B$ é representado pela área de um retângulo**.

Gabarito: LETRA D.

Por definição, **qualquer produto cartesiano que envolva o conjunto vazio resultará no próprio conjunto vazio**.

- $A \times \emptyset = \emptyset$ - $\emptyset \times A = \emptyset$ - $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$

Relações Binárias

Agora que aprendemos bem o produto cartesiano, podemos entrar nas relações binárias. Começaremos com a definição, anote aí!

Chamamos de relação binária de A em B todo subconjunto de $A \times B$.

Matematicamente, dizemos que R é uma relação binária de A em B se, e somente se,

$$R \subset A \times B$$

A definição não ajuda muito a entender, não é verdade? Vou explicar melhor. Por exemplo, considere o produto cartesiano que já estávamos trabalhando.

$$A \times B = \{(1{,}4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3{,}4), (3{,}5)\}$$

Agora, vamos selecionar os pares ordenados (x, y) em que temos $y = x + 2$.

$$R_1 = \{(2{,}4), (3{,}5)\}$$

Pronto, note que **R_1 é um subconjunto de $A \times B$**. Logo, R_1 é uma relação binária de A em B. A expressão "$y = x + 2$" foi escolhida apenas para selecionarmos esses pares. Podíamos ter usado qualquer outra expressão. Se fosse "$y = x + 3$", a relação seria:

$$R_2 = \{(1{,}4), (2{,}5)\}$$

R_2 é outra relação binária de $A \times B$, pois **R_2 também é um subconjunto de $A \times B$**. Formalmente, escreveríamos essas relações da seguinte forma:

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 3\}$$

HORA DE PRATICAR!

(CM VASSOURAS/2015) Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Dentre as alternativas, a única que não representa uma relação de A em B, é:

A) $\{(0{,}2);\ (1{,}3);\ (2{,}5)\}$
B) $\{(1{,}4);\ (3{,}2);\ (2{,}5);\ (0{,}3)\}$
C) $\{(0{,}5);\ (2{,}4)\}$
D) $\{(0{,}2);\ (1{,}4);\ (0{,}5)\}$
E) $\{(1{,}5);\ (2{,}4);\ (5{,}2)\}$

Comentários:

Sabemos que **uma relação de A em B é um <u>subconjunto</u> do produto cartesiano $A \times B$**. Portanto, para encontrarmos a alternativa que não apresenta uma relação de A em B, basta encontrarmos aquela que não é um subconjunto de $A \times B$.

Lembre-se que $A \times B$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y) em que o "x" sempre vem do conjunto A e o "y" do conjunto B. Assim, se $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, então

$$A \times B = \{(0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), \\ (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5)\}$$

Como **A tem 5 elementos e B, 4 elementos, então o produto cartesiano $\boldsymbol{A \times B}$ tem $\boldsymbol{5 \cdot 4 = 20}$ elementos**. Por mais que o conjunto seja um pouco grande, não é muito demorado escrevê-lo. Agora, vamos ver as alternativas.

A) $\{(0,2);\ (1,3);\ (2,5)\}$

É uma relação.

$$A \times B = \{\boldsymbol{(0,2)}, (0,3), (0,4), (0,5), (1,2), \boldsymbol{(1,3)}, (1,4), (1,5), \\ (2,2), (2,3), (2,4), \boldsymbol{(2,5)}, (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5)\}$$

Veja que **todos os pares da alternativa são elementos de $\boldsymbol{A \times B}$**. Desse modo, $\{(0,2);\ (1,3);\ (2,5)\}$ é um subconjunto de $A \times B$. Portanto, é uma relação de A em B.

B) $\{(1,4);\ (3,2);\ (2,5);\ (0,3)\}$

É uma relação.

$$A \times B = \{(0,2), \boldsymbol{(0,3)}, (0,4), (0,5), (1,2), (1,3), \boldsymbol{(1,4)}, (1,5), \\ (2,2), (2,3), (2,4), \boldsymbol{(2,5)}, \boldsymbol{(3,2)}, (3,3), (3,4), (3,5), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5)\}$$

Veja que **todos os pares da alternativa são elementos de $\boldsymbol{A \times B}$**. Desse modo, $\{(1,4);\ (3,2);\ (2,5);\ (0,3)\}$ é um subconjunto de $A \times B$. Portanto, é uma relação de A em B.

C) $\{(0,5);\ (2,4)\}$

É uma relação.

$$A \times B = \{(0,2), (0,3), (0,4), \boldsymbol{(0,5)}, (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), \\ (2,2), (2,3), \boldsymbol{(2,4)}, (2,5), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5)\}$$

Veja que **todos os pares da alternativa são elementos de $\boldsymbol{A \times B}$**. Desse modo, $\{(0,5);\ (2,4)\}$ é um subconjunto de $A \times B$. Portanto, é uma relação de A em B.

D) $\{(0,2);\ (1,4);\ (0,5)\}$

É uma relação.

$$A \times B = \{\boldsymbol{(0,2)}, (0,3), (0,4), \boldsymbol{(0,5)}, (1,2), (1,3), \boldsymbol{(1,4)}, (1,5),$$

$$(2{,}2),(2{,}3),(2{,}4),(2{,}5),(3{,}2),(3{,}3),(3{,}4),(3{,}5),(4{,}2),(4{,}3),(4{,}4),(4{,}5)\}$$

Todos os pares da alternativa são elementos de $\boldsymbol{A \times B}$, de forma que $\{(0{,}2);\ (1{,}4);\ (0{,}5)\}$ é um subconjunto de $A \times B$. Portanto, é uma relação de A em B.

E) $\{(1{,}5);\ (2{,}4);\ (5{,}2)\}$
Não é uma relação.

$$A \times B = \{(0{,}2),(0{,}3),(0{,}4),(0{,}5),(1{,}2),(1{,}3),(1{,}4),\mathbf{(1,5)},$$
$$(2{,}2),(2{,}3),\mathbf{(2,4)},(2{,}5),(3{,}2),(3{,}3),(3{,}4),(3{,}5),(4{,}2),(4{,}3),(4{,}4),(4{,}5)\}$$

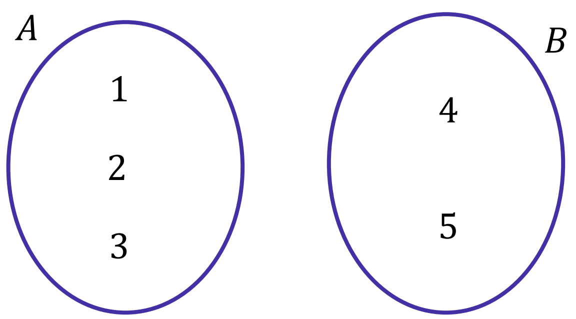
O par $(5,2)$ não é um elemento de $\boldsymbol{A \times B}$, de forma que $\{(1{,}5);\ (2{,}4);\ (5{,}2)\}$ não pode ser um subconjunto do produto cartesiano de A por B. Portanto, não é uma relação de A em B.

Gabarito: LETRA E.

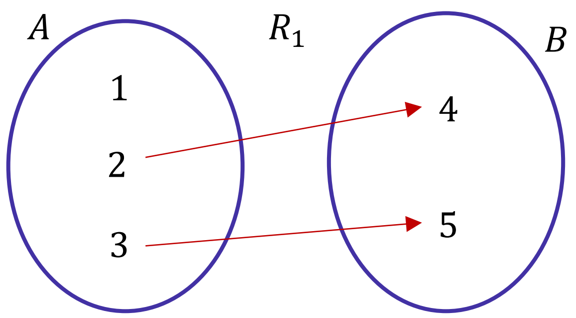
É muito comum representarmos relações **por meio de diagramas**. Considere o produto cartesiano abaixo:

$$A \times B = \{(1{,}4),(1,5),(2,4),(2,5),(3{,}4),(3{,}5)\}$$

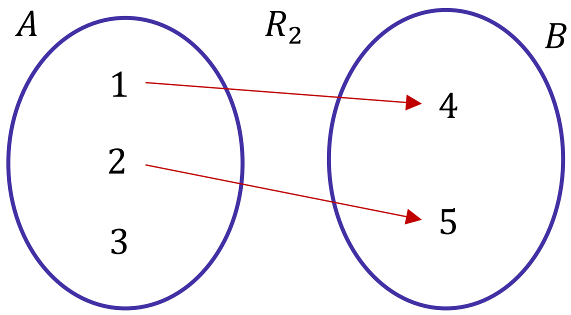
Lembre-se que ele foi obtido por meio dos seguintes conjuntos: $A = \{1,2,3\}\ e\ B = \{4,5\}$ O primeiro passo é desenhar cada um dos conjuntos lado a lado.



A relação $R_1 = \{(2{,}4),(3{,}5)\}$ seria representada assim:



Veja que usamos setas. O par ordenado (2, 4) é representado com uma seta que parte do 2 e chega no 4. Analogamente, o par ordenado (3,5) é representado com uma seta que parte do 3 e chega no 5. Por esse motivo, **chamamos A de conjunto de partida** e **o conjunto B de conjunto de chegada**. Por sua vez, a relação $R_2 = \{(1,4),(2,5)\}$ teria a seguinte representação:



Novamente, veja que o par ordenado (1, 4) é representado com uma seta saindo do número "1" e chegando no número "4". Da mesma forma, o par ordenado (2,5) é representado com uma seta saindo número "2" e chegando no número "5". Vamos prosseguir!

Lembre-se que **uma relação binária de A em B nada mais é do que um subconjunto de $A \times B$**. Assim, para descobrir quantas relações podemos formar, basta determinarmos quantos subconjuntos existem em $A \times B$. Vamos voltar na nossa aula de teoria dos conjuntos.

Seja A um conjunto com $n(A)$ elementos. A quantidade de subconjuntos de A é dada por:

$$\mathbf{2^{n(A)}}$$

Assim, como o número de relações entre A e B é o número de subconjuntos $A \times B$, anote aí o seguinte!

Seja $n(A \times B)$ o número de elementos do produto cartesiano de A por B, então o número de relações de A em B é:

$$\textbf{Número de relações de } \boldsymbol{A} \textbf{ em } \boldsymbol{B} = \mathbf{2^{n(A\times B)}} = \mathbf{2^{n(A)\cdot n(B)}}$$

Acontece que um **subconjunto de qualquer conjunto é o conjunto vazio**. A relação que envolve o conjunto vazio é denominada relação vazia. Algumas questões pedem o número de relações não vazias. Para isso, basta descontarmos 1 do resultado acima.

$$\textbf{Número de relações } \underline{\textbf{não vazias}} \textbf{ de } \boldsymbol{A} \textbf{ em } \boldsymbol{B} = \mathbf{2^{n(A)\cdot n(B)} - 1}$$

HORA DE PRATICAR!

(PETROBRÁS/2012) Toma-se um conjunto P com 2 elementos e um conjunto Q com 3 elementos. Quantas são as possíveis relações não vazias de P em Q?

A) 6

B) 8

C) 16

D) 48

E) 63

Comentários:

Questão para aplicarmos a fórmula que vimos na teoria. Lembre-se que o número de relação não vazias, entre dois conjuntos P e Q, é dado por:

$$\text{RELAÇÕES NÃO VAZIAS} = 2^{n(P)\cdot n(Q)} - 1$$

$n(P)$ representa o número de elementos de P e $n(Q)$ é o número de elementos de Q.

O enunciado falou que $n(P) = 2$ e $n(Q) = 3$, devemos fazer a substituição.

$$\begin{aligned}\text{RELAÇÕES NÃO VAZIAS} &= 2^{2\cdot 3} - 1\\ &= 2^6 - 1\\ &= 64 - 1\\ &= 63\end{aligned}$$

Assim, **o número de relações não vazias de P em Q é 63**.

Gabarito: LETRA E.

Pessoal, são muitos conceitos que estamos construindo aqui! Vamos resumir as principais informações?

RESUMINDO

Par Ordenado	Elemento matemático que possui a seguinte forma: (x, y). É um par pois contém dois elementos, x e y, e é ordenado pois a ordem importa, de forma que $(x, y) \neq (y, x)$

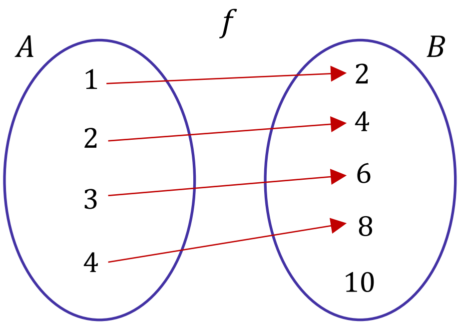
Produto Cartesiano de A por B $A \times B$	Conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) em que o primeiro elemento, **"x", pertence ao conjunto A** e o segundo elemento, **"y", pertence ao conjunto B**.
Relação Binária de A em B	Chamamos de **relação binária** todo subconjunto de $A \times B$.
Conjunto de Partida	Em uma relação binária de A em B, chamamos de **conjunto de partida** o conjunto "A", que está associado aos valores de "x" no par ordenado (x, y).
Conjunto de Chegada	Em uma relação binária de A em B, chamamos de **conjunto de chegada** o conjunto "B", que está associado aos valores de "y" no par ordenado (x, y).
Número de Relações de A em B	$2^{n(A) \cdot n(B)}$
Número de Relações Não Vazias de A em B	$2^{n(A) \cdot n(B)} - 1$

Funções

Uma função é uma relação com algumas características especiais. Portanto, guarde de início isso:

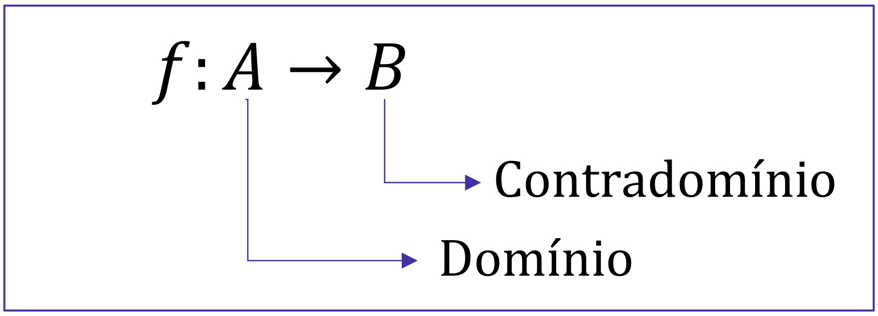
Toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função.

Para compreender quando uma relação vai ser uma função, precisamos voltar aos diagramas.



Domínio, Contradomínio e Imagem

O diagrama acima representa uma função. Entenderemos o porquê já já. Por enquanto, quero introduzir alguns novos conceitos. Quando tivermos uma função, **chamamos o conjunto de partida de "domínio" e o conjunto de chegada de "contradomínio"**. Nesse contexto, para não precisar desenhar os diagramas, podemos utilizar uma notação mais simplificada:

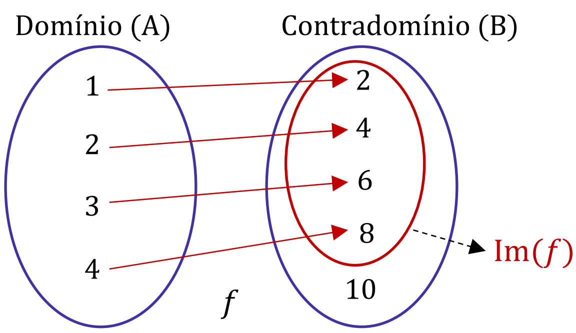


Assim, quando você se deparar com a notação $f: A \to B$, saiba que ela significa que temos **uma função cujo domínio (conjunto de partida) é A e contradomínio é B (conjunto de chegada)**.

Um outro conceito importante é o de conjunto imagem (ou simplesmente imagem). **A imagem é o conjunto formado por todos os elementos do contradomínio em que efetivamente chega uma seta**. Do nosso exemplo acima, temos que:

- Domínio: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Contradomínio: $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- Imagem: $Im(f) = \{2, 4, 6, 8\}$

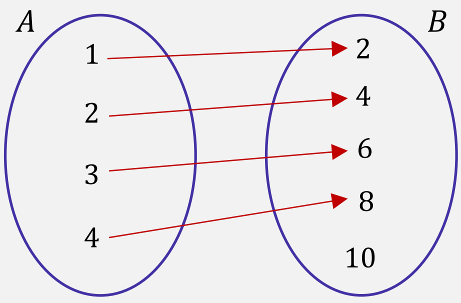
Note que **o conjunto imagem da função, apesar de ser muito parecido com o contradomínio, não são conjuntos necessariamente iguais.** Muito atenção nisso! Tudo bem?!



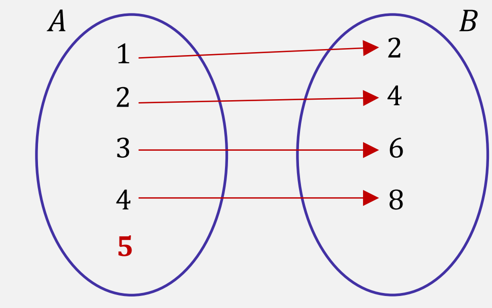
Algumas vezes, usaremos a palavra "imagem" para nos referir não ao conjunto, mas aos elementos. Considerando o exemplo acima, temos que a imagem de "1" é "2", a imagem de "3" é "6". Vamos avançar!

Condições para que uma relação seja considerada uma função:

1) Para cada elemento do domínio, deve existir uma imagem correspondente. Nos diagramas, **devemos ver setas partindo de todos os elementos de A**.



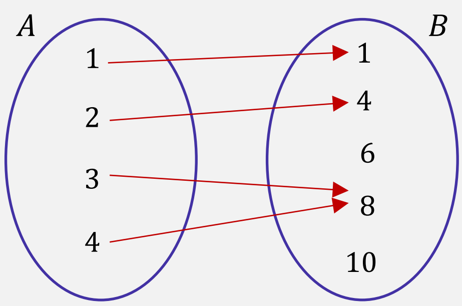
Representa uma função!



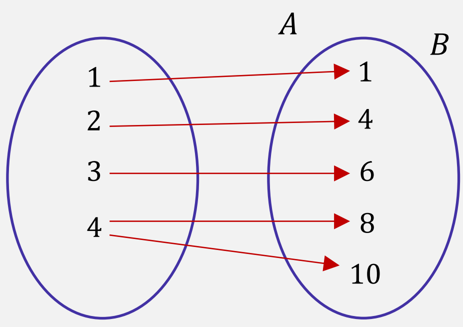
Não representa uma função ("5"está sobrando)

Uma observação importante que podemos fazer é: enquanto não pode “sobrar” elementos em “A”, não há problema algum em sobrar elementos em “B”.

2) Não pode existir mais de uma imagem para o mesmo elemento do domínio. Nos diagramas, **devemos ver uma única seta partindo de cada elemento**.



Representa uma função!



Não representa uma função ("4" tem duas imagens)

Nesse caso, é importante notarmos que por mais que não possamos ter um mesmo elemento do domínio com duas imagens, **não há problema algum que dois elementos do domínio tenham a mesma imagem** (conforme representamos no diagrama da esquerda).

(AEB/2024) Julgue o item a seguir.

Uma função é uma relação específica entre dois conjuntos, onde cada elemento de um conjunto está ligado a vários elementos do outro, sem seguir uma regra definida. Esta relação indica uma dependência entre as variáveis envolvidas. A função é expressa pela notação $f: A \to B$, onde $y = f(x)$.

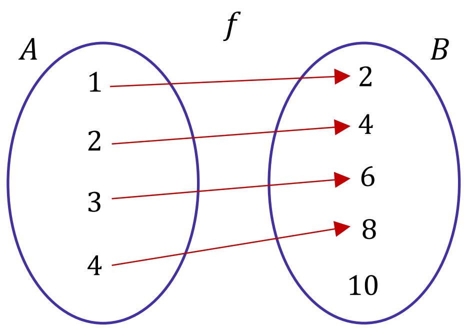
Comentários:

Errado, pessoal! Cada elemento de um conjunto (domínio) está ligado a um **único elemento** do outro conjunto (contradomínio). **É a segunda condição que vimos no quadro anterior**. O item também está errado quando afirma que não há uma regra definida. Veremos logo a seguir que isso não é verdade. Cada elemento está ligado a outro **por meio de uma regra bem definida**, a qual chamamos de "Lei de Correspondência".

Gabarito: ERRADO.

Lei de Correspondência

Agora que sabemos as condições necessárias para que uma relação seja uma função, vamos introduzir **a lei de correspondência** ao nosso estudo. Considere a seguinte função representada em diagramas:



Cada elemento do domínio está associado ao seu dobro. Por exemplo, o número "1" está associado ao "2", o número "2" ao "4" e assim sucessivamente. Existe uma notação especial para representar isso.

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned}$$

Isso significa que cada elemento "x" do domínio (A) está associado a um elemento "$2x$" no contradomínio (B). **A imagem de um elemento "x" é representada por $f(x)$** (lemos "f de x"). Simplificadamente, temos o seguinte: $f: A \to B$ com $f(x) = 2x$. Veja que **precisamos de <u>três</u> elementos para definir uma função**: domínio, contradomínio e a lei de correspondência.

Função	Domínio
	Contradomínio
	Lei de Correspondência

Muitas vezes, as questões apenas informam a lei de correspondência. Não há problema algum nisso. Quando isso acontecer, o domínio e o contradomínio **certamente não serão necessários** para a resolução do exercício. Vamos falar um pouco mais da lei de correspondência então.

Considere uma função f tal que $f(x) = 5x$.

- Quando $x = 1$, temos que $f(1) = 5 \cdot 1 = 5$. Lemos "f de um é igual a cinco".

Com isso, podemos dizer que **o ponto $(1, 5)$ pertence a f**.

- Quando $x = 20$, temos que $f(20) = 5 \cdot 20 = 100$. Lemos "f de vinte é igual a cem".

Logo, **o ponto $(20, 100)$ pertence a f**. Minha intenção é mostrar que podemos obter a imagem de qualquer ponto aplicando a lei de correspondência. Devemos **substituir o "x" pelo número que queremos**.

(PREF. JOÃO LISBOA/2011) Dado $X = \{2, 3, 4, 5\}$ um conjunto, e consideremos a função $f: X \to R$ definida por $f(x) = 4x$. Determine a imagem de f:

A) $Im(f) = \{2, 4, 8, 12\}$

B) $Im(f) = \{2, 3, 4, 5\}$

C) $Im(f) = \{4, 8, 12, 16\}$

D) $Im(f) = \{8, 12, 16, 20\}$

Comentários:

Para acharmos a imagem de f, vamos aplicar $f(x) = 4x$ para cada um dos elementos do domínio X.

- Para $x = 2$

$$f(2) = 4 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(2) = 8}$$

- Para $x = 3$

$$f(3) = 4 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(3) = 12}$$

- Para $x = 4$

$$f(4) = 4 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(4) = 16}$$

- Para $x = 5$

$$f(5) = 4 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f(5) = 20}$$

Pronto, temos os valores das imagens de cada um dos elementos do domínio, podemos escrever:

$$\boldsymbol{Im(f) = \{8, 12, 16, 20\}}$$

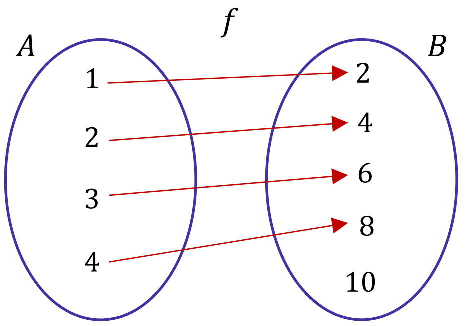
Gabarito: LETRA D.

Representação Gráfica de uma Função

Pessoal, na maioria das vezes, **o domínio e o contradomínio não vão ser conjuntos finitos** como estamos vendo aqui. Essa é uma forma simplificada para começarmos a entender o assunto. As funções normalmente estão definidas nos reais, com imagens nos reais.

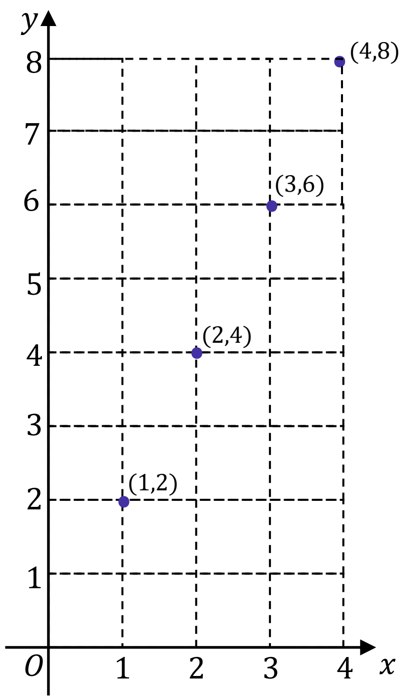
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

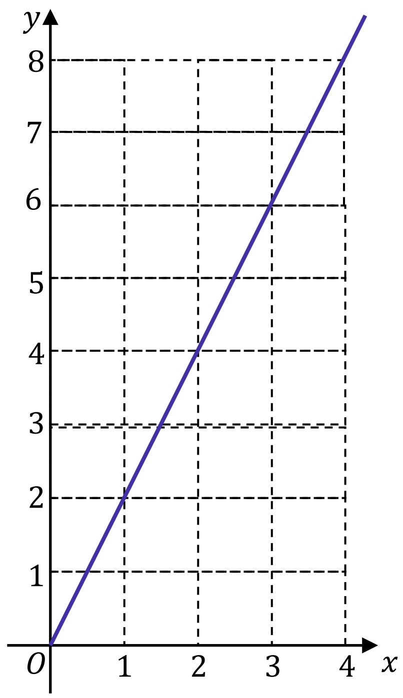
Com infinitos elementos no domínio, fica muito difícil representar essas funções com diagramas, não concorda? Nesse contexto, a alternativa que temos é representar as funções graficamente. Para começar, veja a função abaixo, representada no diagrama da esquerda. Ela possui domínio formado por um número finito de elementos. No lado direito, temos os pontos colocados em uma tabela, para organizar os dados.



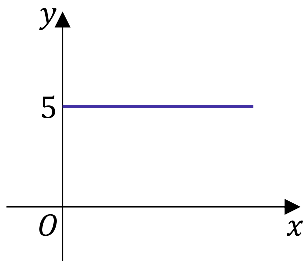
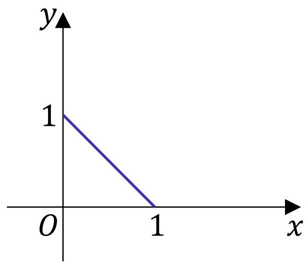
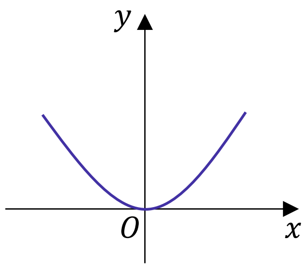
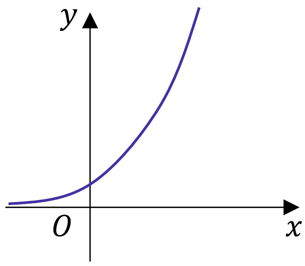
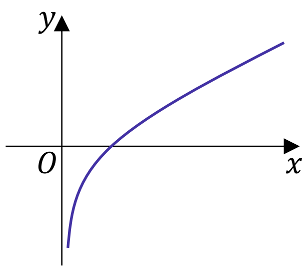
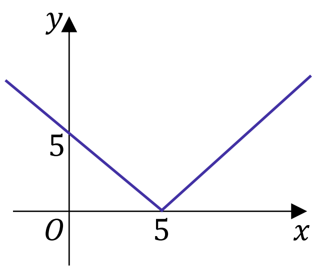
$y = 2x$	
x	y
1	2
2	4
3	6
4	8

Agora, veja abaixo uma comparação entre o gráfico formado caso a função seja definida conforme acima (figura da esquerda) e a mesma função com domínio no conjunto dos reais (figura da direita).

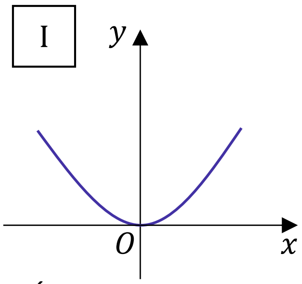




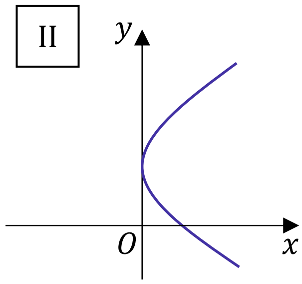
A depender da lei de correspondência, teremos os mais diversos tipos de gráficos e funções. Para termos um primeiro contato, abaixo segue uma tabela resumo com as principais funções.

Função	Exemplo	Gráfico
Função Constante	$f(x) = 5$	
Função de Primeiro Grau	$f(x) = -x + 1$	
Função de Segundo Grau	$f(x) = x^2$	
Função Exponencial	$f(x) = 2^x$	
Função Logarítmica	$f(x) = \log_2 x$	
Função Modular	$f(x) = \|x - 5\|$	

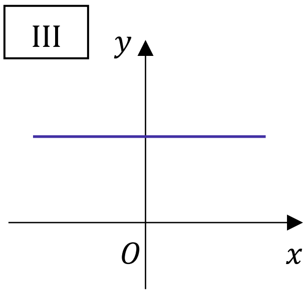
Sabe do que as questões gostam? De fornecer vários gráficos e perguntar qual deles pode representar uma função. Para responder isso, precisaremos lembrar o seguinte: para que uma relação seja uma função, **todo elemento do domínio deve estar associado a uma <u>única</u> imagem**. Esse fato leva a consequências que podem ser vistas nos gráficos. Para começar essas discussão, vejamos a imagem abaixo.



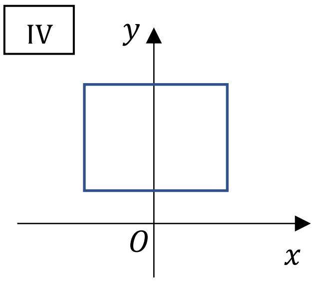
É gráfico de função.



<u>Não</u> é gráfico de função.



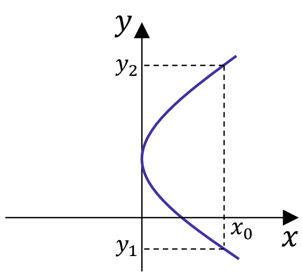
É gráfico de função.



<u>Não</u> é gráfico de função.

- **O gráfico I representa uma função**. Mais especificamente, é uma função de segundo grau (devido seu formato de parábola, dedicaremos uma aula só para estudá-la).

- **O gráfico II <u>não</u> representa uma função**. Isso acontece por que se olharmos bem, um mesmo elemento do domínio está apresentando duas imagens! Observe:



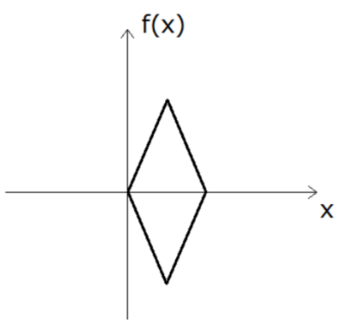
Qual a imagem de x_0? É y_2 ou y_1? Ora, cada elemento de domínio deve possuir apenas uma única imagem. Por esse motivo, tal gráfico não pode representar uma função.

- **O gráfico III representa uma função.** Sempre que você visualizar um gráfico que é uma reta horizontal, você estará trabalhando com a função constante. Qualquer elemento do domínio estará gerando a mesma imagem. Não há problema algum nisso. Como exemplo, temos a função $f(x) = 1$.

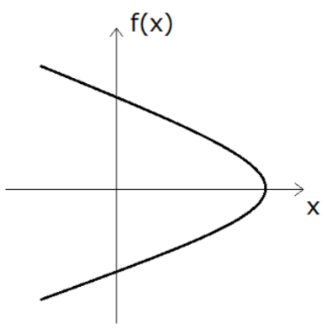
- **O gráfico IV não representa uma função**. Assim como no gráfico II, há elementos do domínio que apresentam mais de uma imagem. Quando isso acontece, sabemos que não temos uma função.

(PREF. NOVO HORIZONTE/2019) Qual dos esboços de gráficos a seguir pode representar uma função $f(x)$?

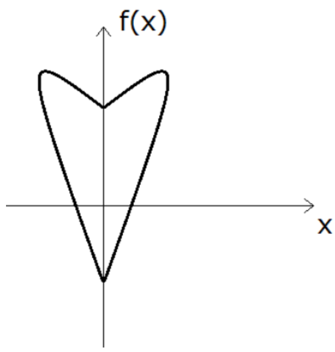
A)



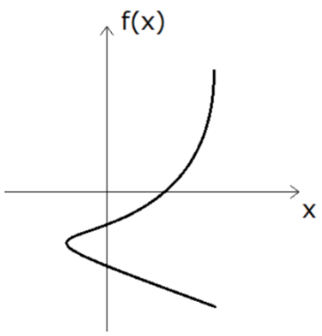
B)



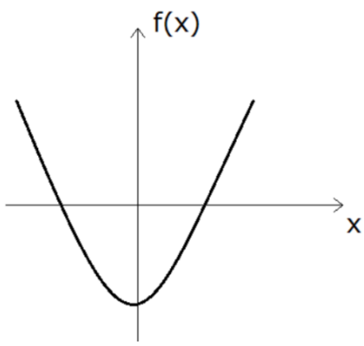
C)



D)

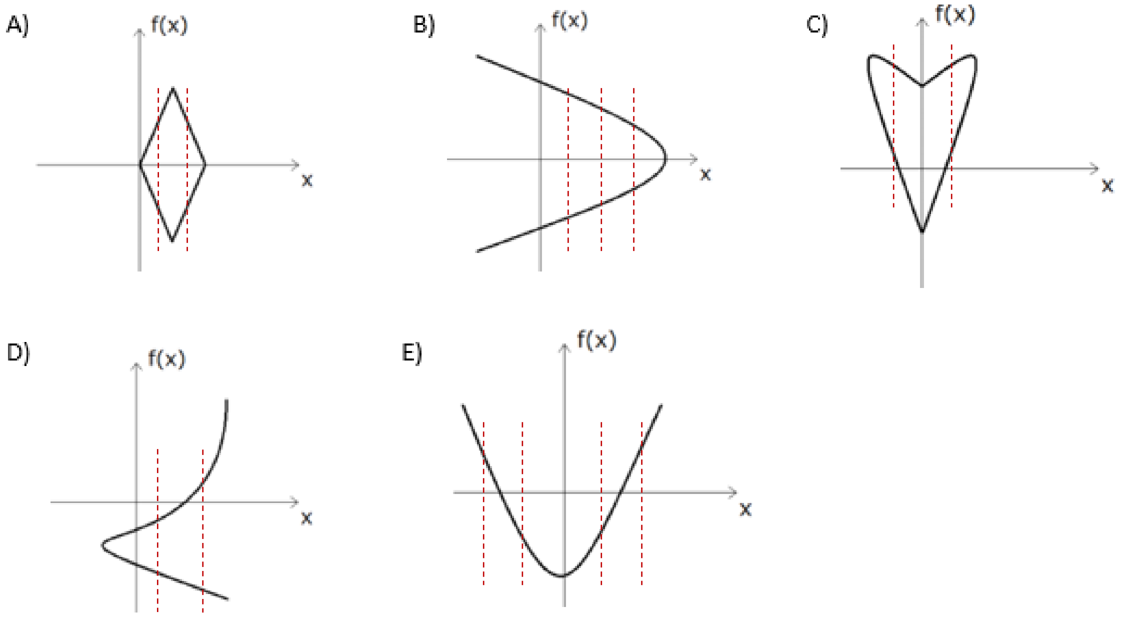


E)



Comentários:

Questão que pede para identificarmos o gráfico que pode representar uma função. Uma dica rápida para isso é: **traçar retas verticais** e ver se ela toca em mais de um ponto do gráfico, **se sim**, então esse gráfico **não pode representar uma função**. Podemos concluir isso, pois esse simples macete nos diz se há um elemento do domínio que possui duas imagens (ou mais) e sabemos que **isso não pode acontecer em uma função**.



Note que **o gráfico da letra E é o único em que as retas verticais tocam em apenas um ponto**. Assim, é o que pode representar uma função. **Gabarito:** LETRA E.

Problemas envolvendo domínios

É muito comum questões que pedem para encontrarmos o domínio de uma função.

Considere $f(x) = 1/x$.

Estudamos que, **nas frações, o denominador não pode ser nulo.** Desse modo, $f(0) = 1/0$ não está definido.

O conjunto dos reais poderia ser um domínio para essa função?

Certamente não, moçada. Note que o 0, sendo um real, estaria nesse domínio. Para f ser uma função, todo elemento do domínio deve possuir uma imagem e, **nessa situação, o 0 não possuiria**. Portanto, temos que tirar o "0" do domínio de f. Ficaríamos assim,

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Portanto, o domínio dessa função seria o conjunto dos reais excluído o número 0!

Considere $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Pessoal, podemos usar qualquer valor de "x" na função acima? **Não podemos, não.** Lembre-se que **não existe, nos reais, raiz quadrada de número negativo**. Por exemplo, se $x = -10$, teríamos

$$f(-10) = \sqrt{-10+1} = \sqrt{-9}$$

Quanto é, nos reais, a raiz de -9*?* Veja que não possuímos essa resposta. Portanto, devemos garantir que o domínio contenha apenas valores que deixam **o radicando da raiz acima maior ou igual a zero**. Assim,

$$x + 1 \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad x \geq -1$$

Portanto, para que os valores dentro da raiz sejam positivos ou nulo, temos que escolher apenas valores maiores ou iguais a -1. Dessa forma, dizemos que o domínio de f é o conjunto:

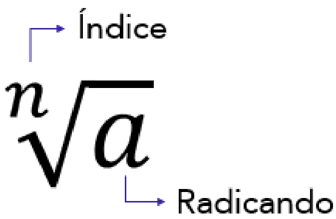
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$$

Pessoal, esses dois exemplos que ilustrei acima traz as duas situações que normalmente vamos ter problema: **no denominador da função** ou **no radicando de alguma raiz com índice par**.

> Rigorosamente, não faz sentido uma questão pedir para encontrarmos o domínio de uma função. O domínio é definido no momento de construir a função. Na prática, o que estamos fazendo é encontrando o maior conjunto possível em que a função analisada pode ser definida. É o maior “concorrente” para ser o domínio. Tudo bem?!

Portanto, sempre que uma questão pedir para você identificar o domínio se uma função, quero que vocês prestem atenção se a lei de correspondência possui um ou os dois detalhes abaixo:

1) Fração em que o denominador possua uma expressão envolvendo "x";
2) Raiz de índice par ($\sqrt{\quad}$, $\sqrt[4]{\quad}$, $\sqrt[6]{\quad}$, ...) em que o radicando seja uma expressão envolvendo "x".



Na primeira situação, devemos excluir do domínio o valor que torna zero o denominador da fração.

No segundo caso, devemos considerar como domínio apenas os valores que fazem o radicando ser positivo.

Vamos resolver uma questão de concurso em que esse tipo de conhecimento foi cobrado?

HORA DE
PRATICAR!

(CRECI-14/2017/ADAP.) Seja a função dada por $f(x) = \frac{\sqrt{-2x+1}}{x+3}$ em $\mathbb{R}$. O domínio de $f(x)$ é:

A) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2}\right\}$

B) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$

C) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2}\ e\ x \neq -3\right\}$

D) $D = \{x \in \mathbb{R}\}$

Comentários:

Galera, veja que essa questão reuniu as duas situações que comentamos! Sabemos que o denominador não pode ser zero. Assim,

$$x + 3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq -3$$

Portanto, já sabemos que **o "-3" não pode estar no domínio, pois ele zera o denominador**. Lembre-se que frações com denominadores nulos são indeterminadas. Agora, vamos para a segunda situação: o radicando dentro da raiz de índice par deve ser positivo para que a raiz exista nos reais! Logo,

$$-2x + 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 2x \leq 1 \quad \rightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}$$

Para que o valor dentro da raiz seja sempre positivo, **devemos escolher apenas números menores que $\frac{1}{2}$**! Dessa forma, garantimos que os elementos do domínio sempre terão uma imagem real.

Veja que temos duas condições:

$$x \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x \neq -3$$

O domínio fica $\boldsymbol{D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2}\ e\ x \neq -3\right\}}$, conforme nossa alternativa C.

Gabarito: LETRA C

(PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Acerca de funções reais de variáveis reais, julgue o item subsequente.

O domínio da função $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ é o conjunto dos números reais.

Comentários:

Pessoal, aqui vai uma informação muito importante: um radical de índice par só existe nos reais quando o radicando é positivo. Por exemplo, quanto é $\sqrt{-2}$? **Esse número não existe no conjunto dos reais.** Assim, o que acontece se substituirmos um valor de x na função acima e o que estiver dentro dela ficar negativo? Nessa situação, **não teremos uma função real**.

Nesse contexto, para saber qual o domínio de uma função que envolva uma raiz com índice par, **devemos impor que o radicando seja maior ou igual zero**.

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

Agora, note que o membro da esquerda é um **quadrado perfeito**.

$$(x+1)^2 \geq 0$$

Logo, qualquer valor de x que substituirmos na expressão acima vai gerar um valor positivo. Faça o teste com alguns valores! Lembre-se que **qualquer número, inclusive negativos, quando elevados a um expoente par, fornecem resultados positivos.** Tudo bem?!

Como não encontramos restrições para os valores que x pode assumir, podemos dizer que **o domínio da função em análise é o próprio conjunto dos reais**.

Gabarito: CERTO.

Problemas com Domínios
Se na lei de correspondência da função houver **denominador que envolva "x"**, devemos tirar do domínio o elemento que o anula.
Se na lei de correspondência houver uma **raiz de índice par que possua radicando também envolvendo "x"**, devemos impor que esse radicando seja **maior ou igual a zero**.
Essas são as situações mais comuns, mas não são únicas. Procure por outras restrições ao valor de x. Às vezes, algumas questões podem pedir o domínio de funções que envolvam logaritmo. Aprenderemos isso em aula específica sobre esse tipo de função.

Função Injetora (ou injetiva)

Simplificadamente, uma função é dita injetora se cada elemento do domínio possui uma imagem distinta dos demais elementos. Em termos matemáticos, escrevemos que:

$$\text{A função f: A} \rightarrow \text{B é injetora} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A)\big(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\big)$$

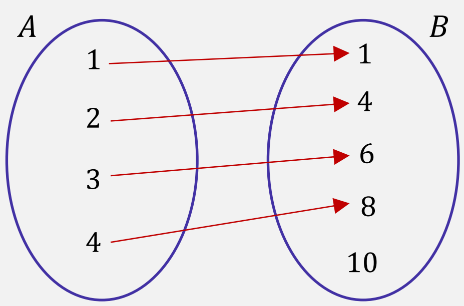
Pessoal, peço que não se preocupem com esse monte de símbolos. Parece complicado, mas a noção de função injetora é bem mais simples do que parece. Para mostrar para vocês o que é uma função injetora, vou começar mostrando o que não é. Considere **a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$**.

- Quando $x = 2$, temos que $f(2) = 2^2 = 4$.

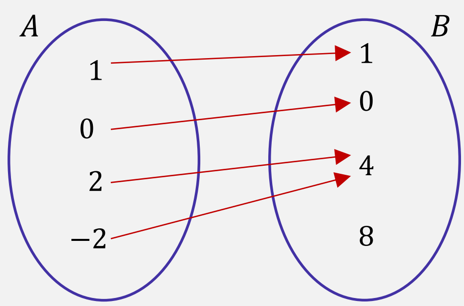
- Quando $x = -2$, temos que $f(-2) = (-2)^2 = 4$.

Veja que **dois elementos distintos do domínio possuem a mesma imagem**. Quando isso acontecer, **a função não será injetora**. Para que a função seja injetora, não podem existir elementos do domínio com a mesma imagem!

ESCLARECENDO!



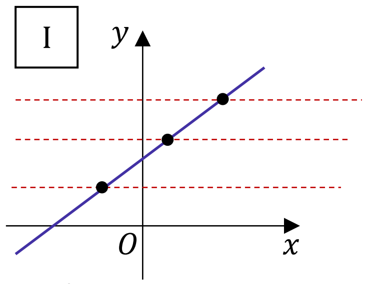
Representa uma função injetora!



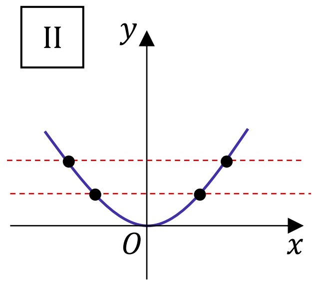
Não representa uma função injetora

O motivo do diagrama da direita não representar uma função injetora é o fato de haver dois elementos do domínio ("2" e "-2") com a mesma imagem ("4"). Por sua vez, no diagrama da esquerda conseguimos ver que cada elemento da imagem "recebe" uma única seta, indicando a injetividade da função.

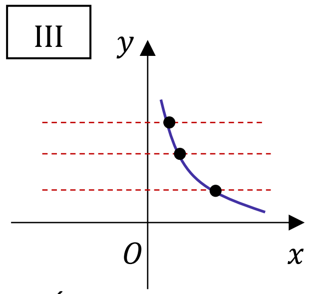
É possível identificar funções injetoras por meio do gráfico da função. Existe um bizu para isso: **traçamos retas horizontais no gráfico.** Se todas essas retas horizontais tocarem o gráfico da função **em apenas um ponto**, então ela será injetora



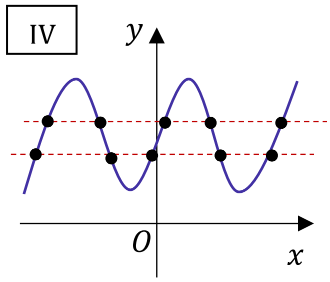
É gráfico de uma função injetora.



Não é gráfico de uma função injetora.



É gráfico de uma função injetora.



Não é gráfico de uma função injetora.

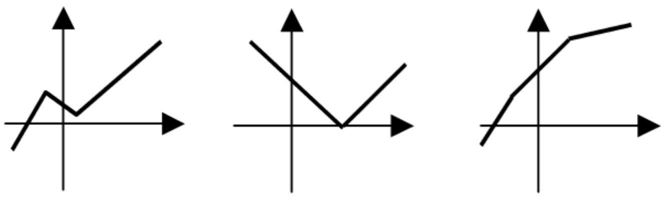
- I e III são gráficos de uma função injetora, pois **as retas horizontais tocam o gráfico em apenas um ponto**. Na prática, isso significa que só existe uma única imagem distinta para cada elemento do domínio (é o que precisamos para ter uma função injetora).

- II e IV **não** são gráficos de função injetora, **pois as retas horizontais tocam o gráfico em vários pontos**. Isso indica que existem vários elementos do domínio com a mesma imagem.

Anteriormente, nós traçamos retas verticais para determinar se o gráfico poderia representar uma função. Agora, estamos traçando retas horizontais para determinar se o gráfico em análise corresponde a de uma função injetora. Tudo bem?! Não confunda!

- Retas verticais para analisar se o gráfico pode representar uma função;
- Retas horizontais para analisar se o gráfico é de uma função injetora.

(EEAR/2008) Considere os gráficos:



Função I Função II Função III

É(são) injetora(s) a(s) função(ões):

A) I e III, apenas.

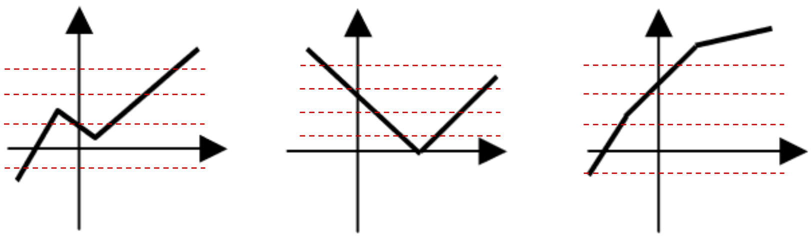
B) III, apenas.

C) I, apenas.

D) I, II e III.

Comentários:

O único gráfico que, quando traçamos retas horizontais, vamos ter apenas um ponto de intersecção por reta, é o da função III.



Função I Função II Função III

Gabarito: LETRA B.

(PC-SC/2017) Uma função f definida nos números reais é dita injetiva se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$. Considere as afirmativas abaixo:

1. A função $f: R \to R$ dada por $f(x) = x^2$ é injetiva.
2. Se f é uma função tal que $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$, então, f é injetiva.
3. A função $f: R \to R$ dada por $f(x) = -2x + 5$ é injetiva.

Assinale a alternativa que indica todas as afirmativas corretas.

A) É correta apenas a afirmativa 3.

B) São corretas apenas as afirmativas 1 e 2.

C) São corretas apenas as afirmativas 1 e 3.

D) São corretas apenas as afirmativas 2 e 3.

E) São corretas as afirmativas 1, 2 e 3.

Comentários:

1. A função $f: R \to R$ dada por $f(x) = x^2$ é injetiva.

ERRADO. Pessoal, quando definida como $f: R \to R$, a função $f(x) = x^2$ é o exemplo clássico de função que não é injetora! Note que $f(2) = f(-2) = 4$. Note que para diferentes valores de "x", tivemos o mesmo valor de imagem. Quando isso acontece, sabemos que **a função não é injetora (injetiva)**.

2. Se f é uma função tal que $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$, então, f é injetiva.
CERTO. É exatamente a definição para função injetora. Em linguagem matemática, a afirmativa está nos dizendo que **se os valores das duas imagens forem iguais** $(f(x) = f(y))$, então **devemos ter que $x = y$.**

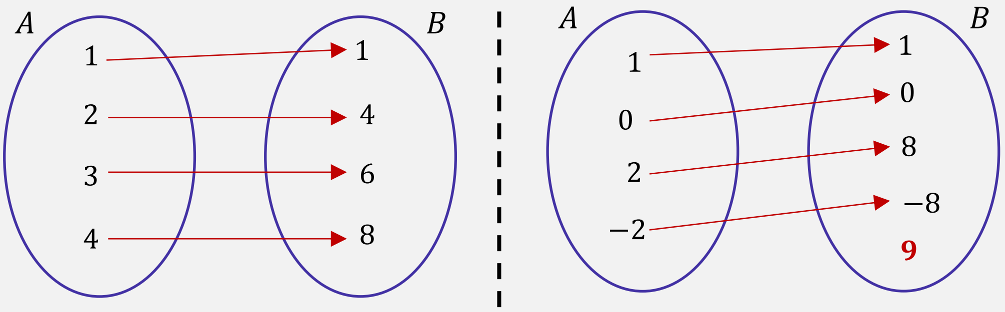
3. A função $f: R \to R$ dada por $f(x) = -2x + 5$ é injetiva.
CERTO. Como vimos, **a função de primeiro grau é o exemplo clássico de função injetiva**. Afinal, para cada elemento do domínio, teremos apenas uma única imagem, que será distinta de todas as outras.

Gabarito: LETRA D.

Função Sobrejetora (ou sobrejetiva)

Uma função é dita sobrejetora quando seu **contradomínio for igual a imagem**.

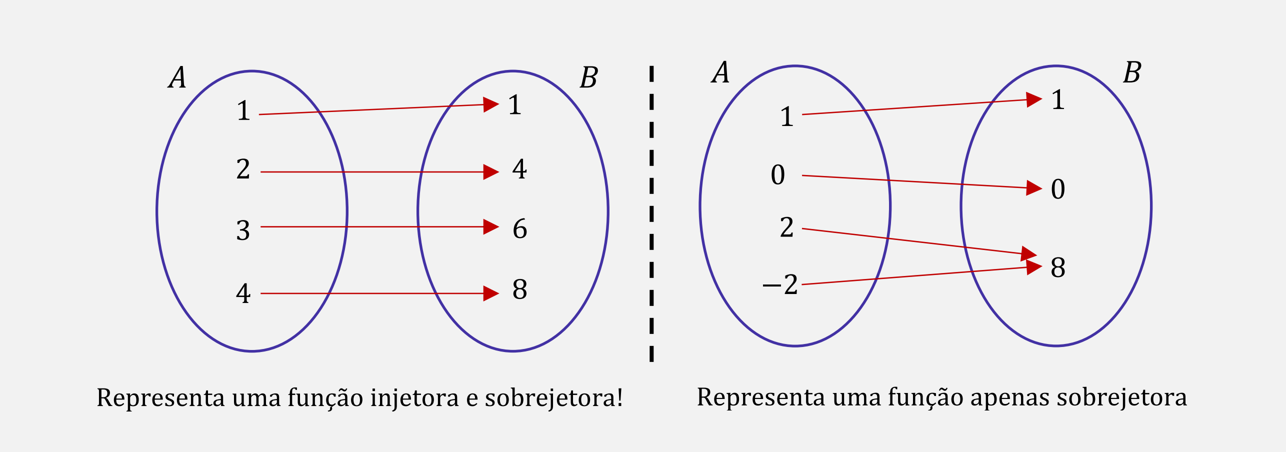
$$f \text{ é sobrejetora} \Leftrightarrow CD(f) \equiv Im(f)$$



Representa uma função sobrejetora! **Não** representa uma função sobrejetora.

O motivo do diagrama da direita não representar uma função sobrejetora é o fato da imagem não coincidir com o contradomínio B. Note que $Im(f) = \{1, 0, 8, -8\}$. Por sua vez, $CD(f) = \{1, 0, 8, -8, \mathbf{9}\}$.

Observação: Uma função não precisa ser injetora para ser sobrejetora. Podemos ter funções apenas injetoras, função apenas sobrejetoras e funções que sejam simultaneamente injetoras e sobrejetoras (nesse caso, vamos chamá-las de funções bijetoras). Por exemplo, veja o diagrama abaixo:



(PREF. SANTO ANDRÉ/2023) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dado por $y = f(x)$, é uma função, então, necessariamente,

A) o domínio de f é igual à imagem de f, que é o conjunto dos números reais.

B) a imagem de f é o conjunto dos números reais somente se f é sobrejetora.

C) o domínio de f é o conjunto dos números reais somente se f é injetora.

D) f é bijetora, pois seu domínio é igual ao seu contradomínio, que é o conjunto dos números reais.

E) f admite uma função inversa f^{-1}, que faz com que $x = f^{-1}(y)$.

Comentários:

Vamos analisar cada uma das alternativas.

A) o domínio de f é igual à imagem de f, que é o conjunto dos números reais.

Errado! Pela definição da função, conseguimos apenas afirmar que o domínio de f é igual ao **contradomínio** de f. Sobre a imagem de f, não conseguimos afirmar nada, uma vez que não temos a lei de correspondência.

B) a imagem de f é o conjunto dos números reais somente se f é sobrejetora.

Correto! Vimos que, quando uma função é sobrejetora, **o contradomínio é igual a imagem**. Como o CD dessa função é o conjunto dos números reais, caso a função seja sobrejetora, a imagem dela será o conjunto dos números reais.

C) o domínio de f é o conjunto dos números reais somente se f é injetora.

Errado. O domínio de f é o conjunto dos números reais em qualquer hipótese, pois foi assim que a função foi definida.

D) f é bijetora, pois seu domínio é igual ao seu contradomínio, que é o conjunto dos números reais.

Errado. Veremos que uma função é bijetora quando ela é, ao mesmo tempo, sobrejetora e injetora. Com as informações que temos, não é possível afirmar que a função é injetora nem sobrejetora.

E) f admite uma função inversa f^{-1}, que faz com que $x = f^{-1}(y)$.

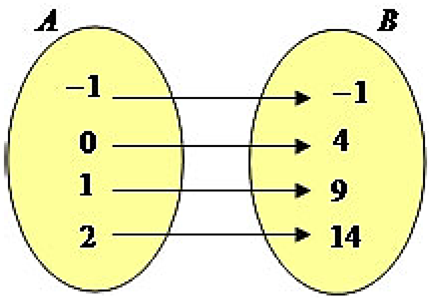
Errado. Veremos também que uma função admitirá inversa quando for bijetora. Como não podemos concluir que f é bijetora, também não podemos afirmar que f possui inversa.

Gabarito: LETRA B.

Função Bijetora

Uma função é dita bijetora quando é simultaneamente injetora e sobrejetora.

(PREF. SANT. DO ACARAÚ/2023) Observe o diagrama a seguir.



Esse diagrama se refere a qual tipo de função?
A) Função sobrejetora.
B) Função injetora.
C) Função bijetora.
D) Função inversa.
E) Função afim.

Comentários:
Vamos observar duas coisas:

1) **Todos os elementos de B recebem apenas uma flecha**. Logo, trata-se de uma **de função injetora**.
2) **Todos os elementos de B recebem flecha.** Com isso, podemos concluir que o **contradomínio é igual a imagem** e que se trata de **função sobrejetora**.

Ora, se uma função é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, então ela é bijetora.

Professor, temos três gabaritos! A letra A, B e C.

Pessoal, concordo que as alternativas não foram as melhores, já que a função também é injetora e sobrejetora. No entanto, **deveríamos marcar aquela mais completa**, no caso, a alternativa C.

Gabarito: LETRA C.

(SEDUC-MT/2017) Analise as quatro afirmações abaixo sobre funções matemáticas:

I. Uma função é injetora se cada elemento do domínio da função possui uma imagem diferente no contradomínio.
II. Uma função é sobrejetora se cada elemento do contradomínio for imagem de um elemento do domínio da função.
III. Uma função não pode ser injetora e sobrejetora simultaneamente.
IV. O contradomínio de uma função numérica sempre será um conjunto numérico maior que o domínio da mesma: por exemplo, se o domínio de uma função for os números naturais, o contradomínio será, no mínimo, o conjunto dos números inteiros.

Assinale a alternativa que indica quais destas afirmações estão corretas:
A) Apenas a afirmação I está correta
B) Apenas as afirmações I e II estão corretas
C) Apenas as afirmações I e III estão corretas
D) Apenas as afirmações II e IV estão corretas
E) Apenas as afirmações II e III estão corretas

Comentários:
Vamos analisar cada afirmação do enunciado.

I. Uma função é injetora se cada elemento do domínio da função possui uma imagem diferente no contradomínio.
CERTO. É isso mesmo, pessoal. Lembre-se que em uma função injetora não podemos ter dois elementos distintos do domínio apresentando a mesma imagem.

II. Uma função é sobrejetora se cada elemento do contradomínio for imagem de um elemento do domínio da função.
CERTO. Dessa forma, nós garantimos que o contradomínio coincide com o conjunto imagem e, nessas condições, a função é sobrejetora.

III. Uma função não pode ser injetora e sobrejetora simultaneamente.
ERRADO. Pode sim! Quando uma função é simultaneamente injetora e sobrejetora, nós a chamamos de função bijetora.

IV. O contradomínio de uma função numérica sempre será um conjunto numérico maior que o domínio da mesma: por exemplo, se o domínio de uma função for os números naturais, o contradomínio será, no mínimo, o conjunto dos números inteiros.
ERRADO. Em funções bijetoras, por exemplo, o contradomínio será um conjunto com a mesma quantidade de elementos do domínio. Não existe essa necessidade do contradomínio ser sempre maior que o domínio.

Gabarito: LETRA B.

Função Monotônica

Quanto estamos falando de funções crescente e decrescentes, estamos falando de funções monotônicas. É apenas um nome difícil para complicar a cabeça do aluno (rsrs). Aqui, vamos nos ater a explicar cada uma das funções monotônicas.

Funções Monotônicas	Função Estritamente Crescente
	Função Estritamente Decrescente
	Função Crescente (ou monotônica não decrescente)
	Função Decrescente (ou monotônica não crescente)

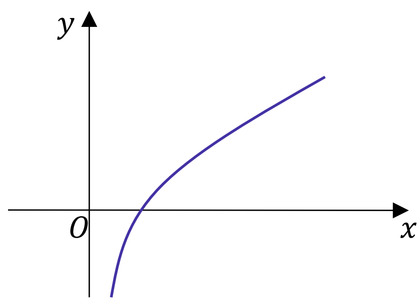
A **função estritamente crescente**, como o próprio nome sugere, é aquela função que só cresce! Você aumenta o valor de "x", com certeza aumentará o valor de "y".

Uma função $f: A \rightarrow B$ é dita estritamente crescente em seu domínio se $f(x)$ aumenta quando x aumenta. No entanto, em termos matemáticos, escrevemos que f é crescente quando:

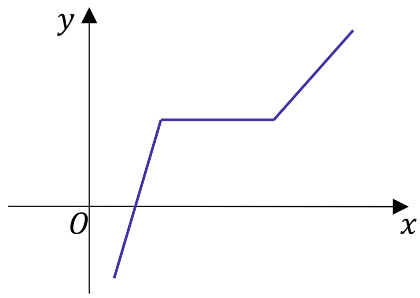
TOME NOTA!

$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{temos que } x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$$

Graficamente, um exemplo de **função <u>estritamente</u> crescente** está mostrado a seguir:



Agora, vejam o gráfico abaixo.

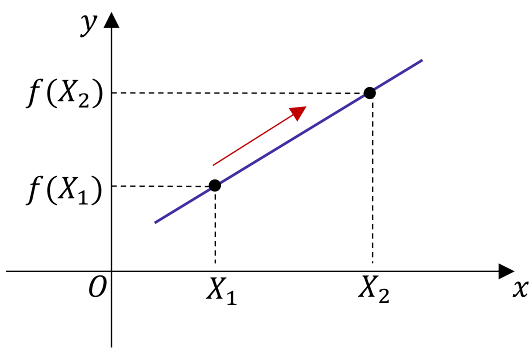


A função acima não é estritamente crescente. Em um intervalo do seu domínio, ela se mantém constante. Quando isso acontece, temos uma **função monotônica não-decrescente**. Algumas vezes podem vir tratadas apenas como "funções crescentes", retirando-se o "estritamente" do nome.

Às vezes, você encontrará o termo "função crescente" sendo usado sem muito rigor, **podendo indicar qualquer uma dos dois tipos que vimos acima**. Portanto, não precisa brigar com a banca caso ela não tenha sido tão rigorosa com a nomenclatura. Vou esclarecer esse ponto com um exemplo.

(ESA/2019) Se, para quaisquer valores X_1 e X_2 de um conjunto S (contido no domínio D), com $X_1 < X_2$, temos $f(X_1) < f(X_2)$, então podem os afirmar que a função f é:
A) inconstante.
B) decrescente.
C) crescente.
D) alternada.

Comentários:
Pessoal, vamos traduzir esse enunciado! Quando um número X_1 é menor que outro número X_2, temos que a imagem $f(X_1)$ é menor que $f(X_2)$. Graficamente, temos a seguinte possibilidade:



Quando x aumenta, temos que $f(x)$ também está aumentando. Nessas condições, sabemos que f é uma função estritamente crescente. Observe que a banca trouxe só "crescente", o que está correto também.
Gabarito: LETRA C.

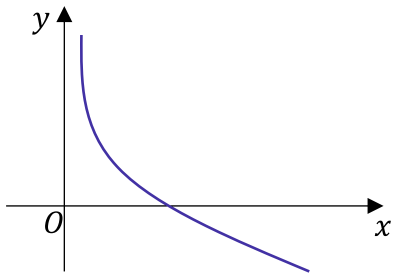
Analogamente, vamos definir uma **função estritamente decrescente**.

Também de uma maneira mais simples, podemos dizer que uma função $f: A \rightarrow B$ é dita estritamente decrescente em seu domínio, se $f(x)$ diminui quando x aumenta. Já em termos matemáticos, escrevemos que f é decrescente quando:

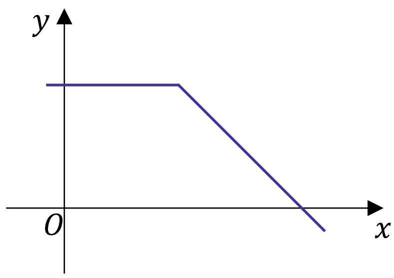
$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{temos que } x_1 < x_2 \iff f(x_1) > f(x_2)$$

TOME NOTA!

Graficamente, temos o seguinte exemplo de **função estritamente decrescente**:



Aqui, vamos ter um caso similar ao anterior. Algumas vezes, as funções podem dar uma "descansada" no meio do domínio e permanecer constante (rsrs). Assim, ela não só diminui estritamente.



A função acima **não é** estritamente decrescente. Podemos chamá-la de **função monotônica não-crescente.** Algumas vezes são tratadas apenas como "função decrescente", sem o "estritamente".

(PREF. GARANHUNS/2024) Julgue o item subsequente.

Uma função decrescente é aquela em que, à medida que os valores do domínio aumentam, os valores correspondentes do contradomínio diminuem. Em outras palavras, o gráfico de uma função decrescente apresenta uma inclinação negativa ao longo de seu intervalo.

Comentários:

É isso mesmo, pessoal! Se ao aumentar os valores de "x" (domínio) temos que os respectivos valores de "f(x)" (contradomínio - imagem) diminuem, então podemos concluir que **f é uma função decrescente**. Graficamente, f possuirá uma **inclinação negativa**. **Gabarito:** CERTO.

Função Par

Considere uma função $f: A \to B$. Essa função será par se, para qualquer elemento x do domínio, temos:

$$f(x) = f(-x)$$

O exemplo clássico de função par é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2$.

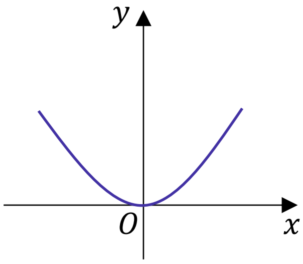
Observe que:

$$f(2) = f(-2) = 4$$

$$f(3) = f(-3) = 9$$

$$f(4) = f(-4) = 16$$

Ou seja, em uma função par, tanto o elemento "x" quanto o "-x" vão possuir a mesma imagem. Isso faz com que os gráficos dessa função sejam simétricos em relação ao eixo Oy.



RESUMINDO

$f: A \to B$ é uma função **par** se, para todo elemento do domínio,

$$f(x) = f(-x)$$

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo Oy.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. SM JETIBÁ/2023) Sabendo-se que uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par, pode-se concluir necessariamente que esta função:

A) é injetora.

B) é sobrejetora.
C) não é injetora.
D) não é sobrejetora.

Comentários:
Se uma função é par, podemos concluir que temos elementos do domínio que possuem uma mesma imagem, "x" e "$-x$". Em outras palavras, **chegam "duas setas" em um elemento do contradomínio**. Quando isso acontece, sabemos que a função não poderá ser injetora, uma vez que, nesse tipo de função, **cada elemento da imagem recebe apenas uma única flecha**.

Logo, podemos afirmar que **se uma função é par, então ela não será injetora**.

Gabarito: LETRA C.

Função Ímpar

Uma função será ímpar se, para qualquer elemento do seu domínio, tivermos:

$$f(x) = -f(-x)$$

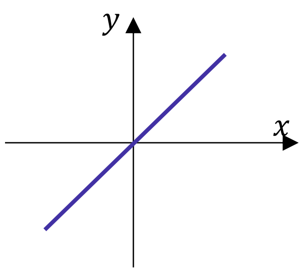
Enquanto que nas funções pares tínhamos uma igualdade entre as imagens de "x" e "$-x$". Aqui, nas funções ímpares, **as imagens desses elementos possuirão sinal trocado**. Como exemplo, considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x$. Observe que,

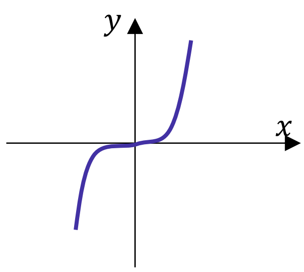
$$f(1) = 1 \qquad \text{e} \qquad f(-1) = -1$$

$$f(2) = 2 \qquad \text{e} \qquad f(-2) = -2$$

$$f(10) = 10 \qquad \text{e} \qquad f(-10) = -10$$

Qualquer elemento do domínio que aplicarmos uma função, teremos $\boldsymbol{f(x) = -f(-x)}$. É isso que vai caracterizar uma função ímpar. Como consequência, o gráfico também possuirá uma característica. Ele será **simétrico em relação à origem $(0, 0)$**.





RESUMINDO

$f: A \to B$ é uma função **ímpar** se, para todo elemento do domínio, temos

$$f(x) = -f(-x)$$

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

HORA DE PRATICAR!

(SEDU-ES/2010) Considerando os polinômios $p(x) = 5x^3 + 3x^5$ e $q(x) = 4x^2 + 2x^4$, em que x é um número real, julgue os itens que se seguem.

A função p é ímpar e a função q é par.

Comentários:

Primeiramente, vamos lembrar quando uma função é ímpar ou par.

- Função Ímpar: $f(-x) = -f(x)$
- Função Par: $f(x) = f(-x)$

Para avaliar a paridade das duas funções polinomiais do enunciado, vamos substituir x por $-x$ e observar o resultado.

$$p(-x) = 5(-x)^3 + 3(-x)^5$$
$$p(-x) = -5x^3 - 3x^5$$
$$p(-x) = -(5x^3 + 3x^5)$$
$$p(-x) = -p(x)$$

Quando trabalhamos um pouco com a álgebra, conseguimos escrever que $p(-x) = -p(x)$, indicando que p é uma função ímpar. Analogamente, repetindo o processo para $q(x)$, ficamos com:

$$q(-x) = 4(-x)^2 + 2(-x)^4$$

$$q(-x) = 4x^2 + 2x^4$$

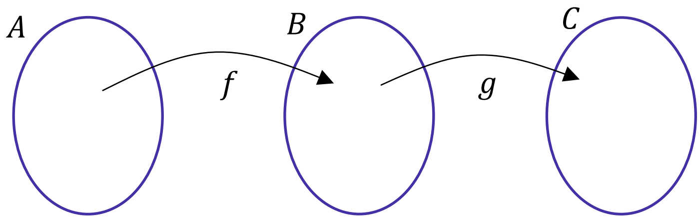
$$q(-x) = q(x)$$

Dessa vez, chegamos à conclusão que $q(-x) = q(x)$, indicando que q é uma função par. Assim, o item encontra-se correto.

Gabarito: CERTO.

Função Composta

Uma função composta é uma função que vamos obter a partir de duas outras funções. Considere o diagrama:



Temos uma função f que leva elementos de A à B e uma função g que leva elemento de B à C. Existe uma função, que chamamos de função composta, que **leva elementos de A direto para C**. Definimos ela assim:

$$h: A \to C, h(x) = g\big(f(x)\big)$$

Uma outra notação que usamos é $\boldsymbol{h(x) = gof(x)}$. Lemos "$g$ composta com f". Não vou encher a paciência de vocês com detalhes técnicos. Basicamente, precisamos saber calcular uma função composta.

Exemplo 1:

- $g(x) = x^2$
- $f(x) = 3x$

Calcule a função composta $h(x) = g\big(f(x)\big)$.

Pessoal, para isso, precisamos apenas **substituir o "x" da função $g(x)$ por toda $f(x)$.**

$$g(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad g\big(f(x)\big) = \big(f(x)\big)^2 \quad \rightarrow \quad g\big(f(x)\big) = (3x)^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{g\big(f(x)\big) = 9x^2}$$

Pronto, encontramos a função composta.

$$h(x) = 9x^2$$

Exemplo 2:

- $f(x) = \frac{x+1}{x}$

Calcule a função composta $h(x) = f\big(f(x)\big)$

Basta substituir o "x" em $f(x)$, pela própria lei de correspondência de $f(x)$.

$$f(x) = \frac{(x+1)}{x} \quad \rightarrow \quad f\big(f(x)\big) = \frac{f(x)+1}{f(x)} \quad \rightarrow \quad f\big(f(x)\big) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)+1}{\left(\frac{x+1}{x}\right)} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f\big(f(x)\big) = \frac{2x+1}{x+1}}$$

Assim, a função composta procurada é:

$$h(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

Exemplo 3:

- $g(x) = x^2$
- $f(x) = x + 1$

Calcule a função composta $h(x) = f\big(g(x)\big)$.

Como queremos $f\big(g(x)\big)$, vamos **substituir o "x" do $\boldsymbol{f(x)}$ pela função $\boldsymbol{g(x)}$.**

$$f(x) = x + 1 \quad \rightarrow \quad f\big(g(x)\big) = g(x) + 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{f\big(g(x)\big) = x^2 + 1}$$

Assim, a função composta procurada é:

$$h(x) = x^2 + 1$$

Um detalhe que você deve ficar esperto é que, na maioria das vezes, $\boldsymbol{f\big(g(x)\big) \neq g\big(f(x)\big)}$. Para confirmar isso, pegue o exemplo 1 ou o exemplo 3 acima e verifique! Cuidado com questões que tentem generalizar e dizer que a igualdade sempre acontece. Isso é falso! **Na maioria dos casos, teremos que a composição de funções não será comutativa**!

Para calcular a função composta $h(x) = f\big(g(x)\big)$, basta substituir o valor do "x" na lei de correspondência de f pela expressão do $g(x)$. Além disso, guarde que, a composição de funções **não é comutativa**.

$$fog(x) \neq gof(x)$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. JARI/2024) Considere uma função real f definida por $f(x) = 1 + 3x$. Nessas condições, qual é o resultado da soma $f(2) + f(f(1))$?

A) 13.

B) 16.

C) 19.

D) 20.

E) 22.

Comentários:

Inicialmente, já podemos calcular $f(2)$. Para isso, basta substituirmos $x = 2$:

$$f(2) = 1 + 3 \cdot 2$$

$$f(2) = 1 + 6$$

$$\boldsymbol{f(2) = 7}$$

Agora, vamos calcular $f\big(f(x)\big)$:

$$f\big(f(x)\big) = 1 + 3f(x)$$

$$f\big(f(x)\big) = 1 + 3(1 + 3x)$$

$$f\big(f(x)\big) = 1 + 3 + 9x$$

$$f\big(f(x)\big) = 4 + 9x$$

Pronto! Agora, vamos substituir $x = 1$ para obtermos $f\big(f(1)\big)$:

$$f\big(f(1)\big) = 4 + 9 \cdot 1$$

$$f\big(f(1)\big) = 4 + 9$$

$$\boldsymbol{f\big(f(1)\big) = 13}$$

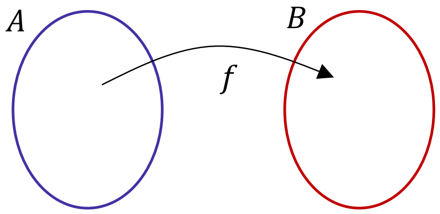
Pronto! Somando os resultados:

$$f(2) + f\big(f(1)\big) = 7 + 13 = 20$$

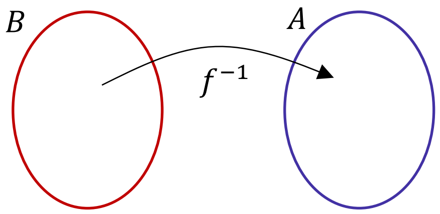
Gabarito: LETRA D.

Função Inversa

A função inversa possui um nome bem sugestivo. Começaremos nosso estudo por meio dos diagramas.



A inversa da função f acima é tal que:



Observe que enquanto a função f leva elementos de A para B, **a função inversa f^{-1} leva elementos de B para A**. Faz o serviço inverso!! (rsrs) Atenção especial para a notação que usamos para função inversa: $\boldsymbol{f^{-1}}$.

Professor, qualquer função possui uma inversa?

A resposta é não! Para ter uma inversa, a função precisa ser bijetora!

TOME NOTA! **Para uma função ser invertível, ela deve ser bijetora.**

HORA DE PRATICAR!

(EEAR/2012) Para que uma função seja invertível, é necessário que ela seja
A) sobrejetora e positiva.
B) bijetora e positiva.
C) apenas bijetora.
D) apenas injetora.

Comentários:

Questão para treinarmos o que acabamos de ver. **Para uma função ser invertível, é necessário que ela seja bijetora!** Apenas isso! Não há necessidade da função ser positiva.

Gabarito: LETRA C.

- Obtendo a Função Inversa

Agora que estamos criando uma noção intuitiva do que é uma função inversa, devemos saber como encontrá-la. Precisaremos bastante disso em provas! Vamos desenvolver uma metodologia bem prática.

Exemplo 1: Inverter a função $f(x) = x + 1$.

Passo 1: Chame o "x" de $f^{-1}(x)$ e o "$f(x)$" de "x".

$$x = f^{-1}(x) + 1$$

Passo 2: Isole $f^{-1}(x)$.

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

Pronto. **Essa é a função inversa**. Bem rápido, né?

Perceba que para obter a inversa, nós realmente invertemos as variáveis. O que era "$f(x)$" virou apenas "x". Analogamente, o que era "x" virou o "$f^{-1}(x)$"

Exemplo 2: Inverter a função $f(x) = \frac{1+x}{x}$

Passo 1: Chame o "x" de $f^{-1}(x)$ e o "$f(x)$" de "x".

$$x = \frac{1 + f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)}$$

Passo 2: Isole o $f^{-1}(x)$.

$$1 + f^{-1}(x) = x \cdot f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x) \cdot (x - 1) = 1$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x - 1}$$

HORA DE
PRATICAR!

(PREF. GUAIÚBA/2023) Qual é o valor de $f^{-1}(-3)$, dada a lei de formação da função que é $y = 3x - 5$?

A) 2/3

B) 3/2

C) −2/3

D) −3/2

E) 3

Comentários:

Vamos lá! Aplicando os passos:

Passo 1: Chame o "x" de $f^{-1}(x)$ e o "$f(x)$" de "x".

$$x = 3f^{-1}(x) - 5$$

Passo 2: Isole o $f^{-1}(x)$.

$$3f^{-1}(x) = x + 5$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$$

Pronto! Agora vamos usar $x = -3$.

$$f^{-1}(-3) = \frac{-3+5}{3}$$

$$\boxed{f^{-1}(-3) = \frac{2}{3}}$$

Gabarito: LETRA A.

QUESTÕES COMENTADAS - CESGRANRIO

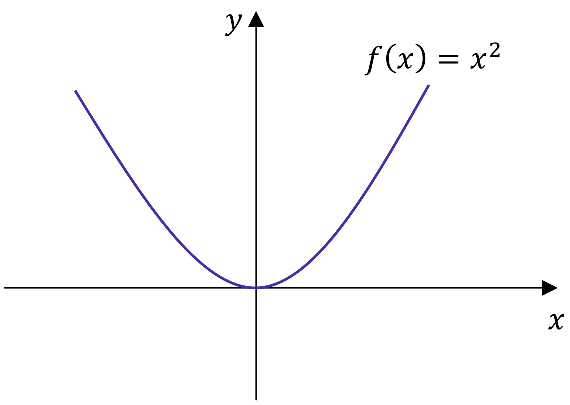
Introdução às Funções

1. (CESGRANRIO/PETROBRRÁS/2012) Sejam $f: R \to R, g: R_+ \to R$ e $h: R \to R_+$ as funções definidas por $f(x) = g(x) = h(x) = x^2$. Quais, dentre as funções apresentadas, são injetoras?

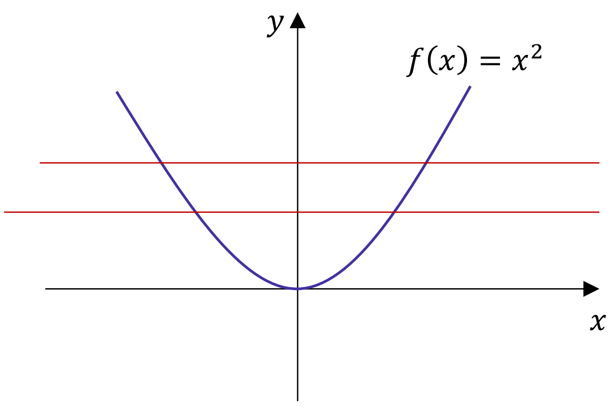
A) f, g e h
B) g e h, apenas.
C) g, apenas.
D) h, apenas.
E) nenhuma das três funções.

Comentários:

Apesar de ainda não termos estudado com profundidade, comentei com vocês que o gráfico de uma função de segundo grau é uma parábola. Assim, uma função $f: R \to R$ tal que $f(x) = x^2$ possui o seguinte gráfico:

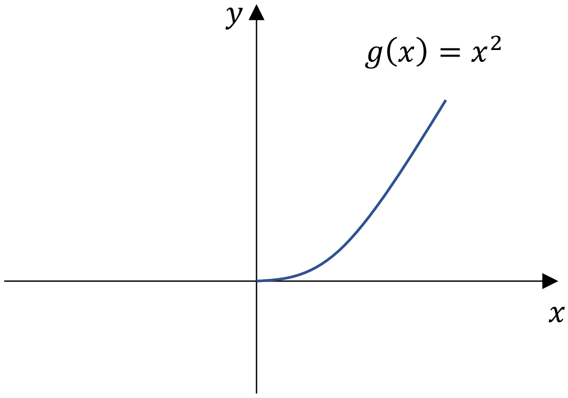


Comentei com vocês que quando uma função é injetora, ao traçarmos retas horizontas, ela deve tocar o gráfico da função em apenas um ponto.



Nessa situação, **cada reta horizontal toca o gráfico em dois pontos**, indicando que a função f não é injetora. Por sua vez, a função g, apesar de possui a mesma expressão ($g(x) = x^2$) está definida de forma diferente:

$g: R_+ \rightarrow R$. Note que **o domínio da função mudou**. Não é todo o conjunto dos reais, mas apenas os reais positivos. Com isso, nossc



Quando traçamos as retas horizontas, podemos ver que cada uma delas cruza o gráfico de g em apenas um ponto, indicando que a mesma é uma função injetora. Por fim, observe que **o domínio de h é o mesmo de f**. Dessa forma, o gráfico de h será idêntico ao de f, não sendo, portanto, uma função injetora. A mudança que ocorreu em h foi no contradomínio.

A função $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}_+$ tem como contradomínio o conjunto dos **reais positivos**, o que não gera consequências para a injetividade da função (apenas para a sobrejetividade).

Gabarito: LETRA C.

2. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2012) Toma-se um conjunto P com 2 elementos e um conjunto Q com 3 elementos. Quantas são as possíveis relações não vazias de P em Q?

A) 6
B) 8
C) 16
D) 48
E) 63

Comentários:

Questão para aplicarmos a fórmula que vimos na teoria. Lembre-se que o número de relação não vazias, entre dois conjuntos P e Q, é dado por:

$$relações\ não\ vazias = 2^{n(P)\cdot n(Q)} - 1$$

$n(P)$ representa o número de elementos de P e $n(Q)$ é o número de elementos de Q.

O enunciado falou que $n(P) = 2$ e $n(Q) = 3$, devemos fazer a substituição.

$$\begin{aligned} relações\ não\ vazias &= 2^{2\cdot 3} - 1 \\ &= 2^6 - 1 \\ &= 64 - 1 \\ &= 63 \end{aligned}$$

Assim, o número de relações não vazias de P em Q é 63.
Gabarito: LETRA E.

3. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2011) A função $f: R - \{-1\} \to R$ é dada por $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. Se $f(f(p)) = \frac{2}{3}$, então p é igual a
A) -1
B) -0,5
C) 0,5
D) 1,25
E) 3

Comentários:
O primeiro passo é encontrar a função composta $f(f(x))$. Para isso, basta substituirmos o x da função pelo próprio $f(x)$.

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad \to \quad f(f(x)) = \frac{2f(x)-1}{f(x)+1}$$

Assim,

$$f(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) - 1}{\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 1} \quad \to \quad f(f(x)) = \frac{\frac{2(2x-1)-(x+1)}{x+1}}{\frac{2x-1+(x+1)}{x+1}}$$

$$f(f(x)) = \frac{\frac{4x-2-x-1}{\cancel{x+1}}}{\frac{2x-1+x+1}{\cancel{x+1}}} \quad \to \quad f(f(x)) = \frac{3x-3}{3x} \quad \to \quad f(f(x)) = \frac{x-1}{x}$$

O enunciado disse que $f(f(p)) = \frac{2}{3}$. Assim,

$$f(f(p)) = \frac{p-1}{p} \quad \to \quad \frac{p-1}{p} = \frac{2}{3} \quad \to \quad 3p - 3 = 2p \quad \to \quad p = 3$$

Gabarito: LETRA E.

4. (CESGRANRIO/IBGE/2006) Para cada pessoa x, sejam f(x) o pai de x e g(x) a mãe de x. A esse respeito, assinale a afirmativa FALSA.
A) f[f(x)] = avô paterno de x
B) g[g(x)] = avó materna de x
C) f[g(x)] = avô materno de x
D) g[f(x)] = avó paterna de x
E) f[g(x)] = g[f(x)]

Comentários:
Vamos analisar cada uma das alternativas.

A) $f[f(x)]$ $=$ avô paterno de x
CERTO. Se $f(x)$ é o pai de x, então $f(f(x))$ é o pai do pai de x. Quem é o pai do pai de x? É o avô paterno de x!
B) $g[g(x)]$ $=$ avó materna de x
CERTO. Se $g(x)$ é a mãe de x, então $g(g(x))$ é a mãe da mãe de x. Note que mãe da mãe de x é a avó materna de x, conforme a alternativa.

C) $f[g(x)]$ $=$ avô materno de x
CERTO. Se $f(x)$ representa o pai de x e $g(x)$ representa a mãe de x, então $f(g(x))$ é o pai da mãe de x. O pai da mãe de x só pode ser o avô materno de x.

D) $g[f(x)]$ $=$ avó paterna de x
CERTO. Se $f(x)$ representa o pai de x e $g(x)$ representa a mãe de x, então $g(f(x))$ é a mãe do pai de x. Oras, a mãe do pai de x é avó paterna de x.

E) $f[g(x)] = g[f(x)]$
FALSO. Vimos que $f[g(x)]$ = avô materno de x e $g[f(x)]$ = avó paterna de x, assim $f[g(x)] \neq g[f(x)]$.

Gabarito: LETRA E.

LISTA DE QUESTÕES - CESGRANRIO

Introdução às Funções

1. (CESGRANRIO/PETROBRRÁS/2012) Sejam $f: R \to R, g: R_+ \to R$ e $h: R \to R_+$ as funções definidas por $f(x) = g(x) = h(x) = x^2$. Quais, dentre as funções apresentadas, são injetoras?

A) f, g e h

B) g e h, apenas.

C) g, apenas.

D) h, apenas.

E) nenhuma das três funções.

2. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2012) Toma-se um conjunto P com 2 elementos e um conjunto Q com 3 elementos. Quantas são as possíveis relações não vazias de P em Q?

A) 6

B) 8

C) 16

D) 48

E) 63

3. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/2011) A função $f: R - \{-1\} \to R$ é dada por $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. Se $f(f(p)) = 23$, então p é igual a

A) -1

B) -0,5

C) 0,5

D) 1,25

E) 3

4. (CESGRANRIO/IBGE/2006) Para cada pessoa x, sejam f(x) o pai de x e g(x) a mãe de x. A esse respeito, assinale a afirmativa FALSA.

A) f[f(x)] = avô paterno de x

B) g[g(x)] = avó materna de x

C) f[g(x)] = avô materno de x

D) g[f(x)] = avó paterna de x

E) f[g(x)] = g[f(x)]

GABARITO

1. LETRA C
2. LETRA E
3. LETRA E
4. LETRA E

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:

PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.