Aula 00

CBM-AP (Soldado) Matemática

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

06 de Dezembro de 2022

Índice

AVISO IMPORTANTE!

Olá, Alunos (as)!

Passando para informá-los a respeito da **disposição das questões** dentro do nosso material didático. Informamos que a escolha das bancas, dentro dos nossos Livros Digitais, é feita de maneira estratégica e pedagógica pelos nossos professores a fim de proporcionar a melhor didática e o melhor direcionamento daquilo que mais se aproxima do formato de cobrança da banca do seu concurso.

Assim, o formato de questões divididas por tópico facilitará o seu processo de estudo, deixando mais alinhado às disposições constantes no edital.

No mais, continuaremos à disposição de todos no Fórum de dúvidas!

Atenciosamente,

Equipe Exatas

Estratégia Concursos

Apresentação do Curso

Olá, pessoal! Tudo bem?

É com grande satisfação que damos início ao nosso curso!

Os professores **Eduardo Mocellin, Francisco Rebouças** e **Vinicius Veleda** ficarão responsáveis pelo **Livro Digital**.

Antes de continuarmos, vamos apresentar os professores do material escrito:

Eduardo Mocellin: Fala, pessoal! Meu nome é Eduardo Mocellin, sou professor de Matemática e de Raciocínio Lógico do Estratégia Concursos e engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Sinto-me feliz em poder contribuir com a sua aprovação! Não deixe de me seguir no Instagram: **@edu.mocellin**

Francisco Rebouças: Fala, alunos! Aqui é o Francisco Rebouças, professor de Matemática do Estratégia Concursos. Sou Engenheiro Aeroespacial formado pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Saiba que será uma honra fazer parte da sua jornada rumo à aprovação e que estaremos sempre aqui para auxiliá-los com o que precisarem. Um grande abraço e nos vemos nas aulas!

Vinicius Veleda: Olá, caros alunos! Sou Auditor Fiscal do Estado do Rio Grande do Sul. Professor de Matemática e Matemática Financeira do Estratégia Concursos. Aprovado nos Concursos de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda dos Estados do Rio Grande do Sul (SEFAZ RS - 2019), Santa Catarina (SEFAZ SC - 2018) e Goiás (SEFAZ GO - 2018). Formado em Engenharia de Petróleo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com graduação sanduíche em Engenharia Geológica pela Universidade Politécnica de Madrid (UPM). Pela UFRJ, fui campeão sul americano do Petrobowl (Buenos Aires) e, posteriormente, Campeão Mundial (Dubai). Cursei meu ensino médio na Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx). Contem comigo nessa trajetória! **@viniciusveleda**

O material escrito em **PDF** está sendo construído para ser sua fonte **autossuficiente** de estudos. Isso significa que o livro digital será **completo** e **voltado para o seu edital**, justamente para que você não perca o seu precioso tempo "caçando por aí" o conteúdo que será cobrado na sua prova. Ademais, sempre que necessário, você poderá fazer perguntas sobre as aulas no **fórum de dúvidas**. **Bons estudos!**

TEORIA DOS CONJUNTOS

Introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição de Conjunto

Iniciaremos o nosso estudo da matemática pela **Teoria dos Conjuntos**. A escolha desse conteúdo é **cuidadosamente pensada** para que você possa formar **uma base sólida,** que lhe servirá de alicerce na construção de toda matemática necessária a sua prova.

A palavra "conjunto" significa exatamente o que você deve estar pensando: uma espécie de **grupo, lista** ou **uma coleção** de determinado objeto. Observe alguns exemplos de **como podemos representar** conjuntos na matemática:

- $A = \{a, b, c, d, e\}$
- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

O conjunto A é formado pelas **5 primeiras letras** no nosso alfabeto. O conjunto B é formado por **5 números pares**. O conjunto C é formado por **10 números ímpares**. Você pode estar se perguntando: *só podemos fazer conjuntos de números e letras?*

A resposta é não! Podemos criar conjuntos de basicamente qualquer coisa, desde um conjunto representando **os funcionários de determinada empresa** a **conjuntos formados por outros conjuntos!** Por exemplo, o conjunto E lista alguns professores de exatas do Estratégia Concursos.

- $\mathrm{E} = \{\mathrm{Francisco}, \mathrm{Eduardo}, \mathrm{Vinicius}, \mathrm{Luana}, \mathrm{Djefferson}\}$

Primeiramente, note que um conjunto muitas vezes aparecerá com seus elementos listados **dentro de um par de chaves**. Por isso, sempre que for escrever algum conjunto, não esqueça de colocar seus elementos aqui dentro: $\{\ \}$. É também usual as pessoas nomearem seus conjuntos com letras maiúsculas, mas **isso não é mandatório, nem necessário,** em algumas situações.

Relação de Pertinência

Quando um elemento faz parte de determinado conjunto, dizemos que **o elemento PERTENCE ao conjunto**. Essa relação de pertinência **entre um elemento e um conjunto** é representada pelo símbolo $\in$.

- $b \in A$: **Lemos**: b **pertence** a A;
- $4 \in B$: **Lemos**: 4 **pertence** a B;
- $15 \in C$: **Lemos**: 15 **pertence** a C.

Atente-se à simbologia! Podemos dizer que um elemento **não pertence** a um determinado conjunto. Para isso, utilizamos o símbolo "não pertence": $\notin$.

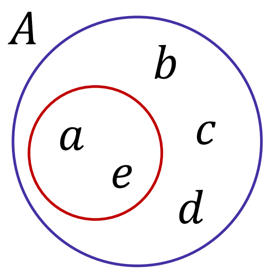
- $z \notin A$: z **não pertence** a A;
- $100 \notin B$: 100 **não pertence** a B;
- $\text{Beltrano} \notin E$: Beltrano **não pertence** a E.

Relação de Inclusão

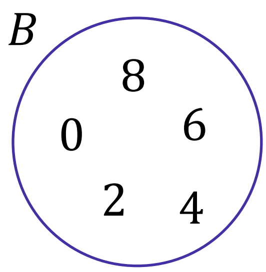
Existe mais um tipo de relação que devemos estudar: **a relação de inclusão**. Nesse tipo de relação, é estabelecido **um relacionamento entre dois conjuntos** e não mais entre um elemento e outro conjunto. Para isso, usamos uma simbologia específica que você deverá guardar: $\subset, \not\subset, \supset$ *e* $\not\supset$. Vamos ver com calma o que cada um deles diz! Considere: $\boldsymbol{A = \{a, b, c, d, e\}}$, $\boldsymbol{B = \{0, 2, 4, 6, 8\}}$ e $\boldsymbol{C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}}$.

- $\{a, e\} \subset A$: **Lemos**: $\{a, e\}$ **está contido** em A;
- $\{0, 2, 8\} \subset B$: **Lemos**: $\{0, 2, 8\}$ **está contido** em B;

Perceba que agora não estamos estabelecemos uma relação entre um elemento e um conjunto**. A relação de inclusão envolve 2 conjuntos!** Diante disso, podemos introduzir um novo termo: **o subconjunto**. O subconjunto nada mais é do que **parte de um conjunto maior**. Quando dizemos, por exemplo, que $\boldsymbol{\{a, e\}}$ **está contido em** $\boldsymbol{A}$, estamos dizendo, com outras palavras, que $\{a, e\}$ é um subconjunto de $\boldsymbol{A}$.



O diagrama acima ajuda a compreender a relação de inclusão. Observe que **o conjunto** $\boldsymbol{\{a, e\}}$ **está inteiramente contido em** $\boldsymbol{A}$. Nessas condições, dizemos que $\{a, e\}$ está contido em A ou ainda que $\{a, e\}$ é um subconjunto de A. Algumas vezes, você poderá ver **o termo "parte" sendo usado como sinônimo de subconjunto**. Agora, imagine a seguinte situação:



Nesse caso, temos que $\{a, e\} \not\subset B$: **Lemos**: $\{a, e\}$ não está contido em B ou $\{a, e\}$ não é um subconjunto de B. Vamos ver mais alguns exemplos de quando **um conjunto não está contido em outro**:

- $\{a, e, f\} \not\subset A$
- $\{1, 3, 5\} \not\subset B$
- $\{0, 1\} \not\subset C$
- $\{\text{Sicrano}, \text{Beltrano}\} \not\subset \text{E}$

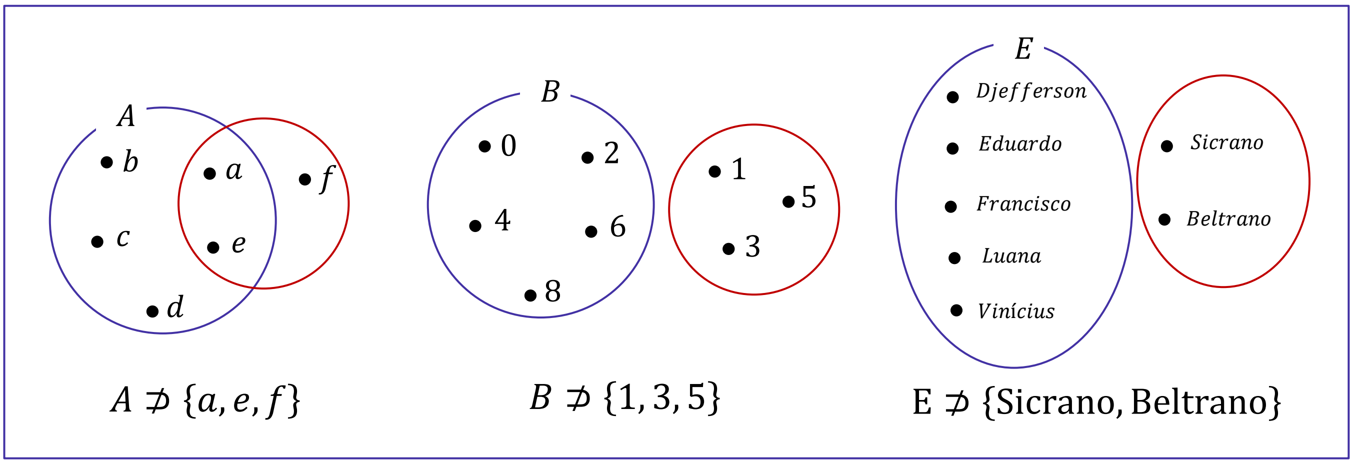
Perceba que **basta um elemento do conjunto não pertencer** ao conjunto maior que **não poderemos estabelecer uma relação de inclusão** entre os dois conjuntos e, portanto, dizemos que um não está contido no outro. Pessoal, **se $\{a, e\}$ está contido em A,** então também podemos dizer que **A contém $\{a, e\}$**. Quando queremos expressar essa ideia de que um conjunto maior contém determinado subconjunto, utilizamos o símbolo $\supset$.

- $A \supset \{a, e\}$: A **contém** $\{a, e\}$
- $B \supset \{0, 2, 8\}$: B **contém** $\{0, 2, 8\}$
- $C \supset \{1, 3, 5, 19\}$: C **contém** $\{1, 3, 5, 19\}$
- $\text{E} \supset \{\text{Francisco}, \text{Eduardo}\}$: E **contém** $\{\text{Francisco}, \text{Eduardo}\}$

Analogamente, podemos estender o raciocínio para quando queremos dizer que determinado conjunto **não contém outro**. Nessas situações, utilizamos $\not\supset$.

- $A \not\supset \{a, e, f\}$: A **não contém** $\{a, e, f\}$
- $C \not\supset \{0, 1\}$: C **não contém** $\{0, 1\}$
- $\text{E} \not\supset \{\text{Sicrano}, \text{Beltrano}\}$ -- E **não contém** $\{\text{Sicrano}, \text{Beltrano}\}$

ESQUEMATIZANDO



HORA DE PRATICAR!

(PREF. PIÊN/2023) Sejam A, B e C conjuntos dados por $A = \{-1,2,9,7,3\}$, $B = \{2,7\}$ e $C = \{-1,0\}$. Assinale a alternativa **CORRETA**.

A) $0 \in A$

B) $7 \subset A$

C) $B \subset A$

D) $C \subset A$

E) $-1 \notin A$

Comentários:

Vamos verificar se cada alternativa, de acordo com a definição dos conjuntos A, B e C.

A) $0 \in A$

Falsa, pois 0 **não** está no conjunto $A = \{-1,2,9,7,3\}$.

B) $7 \subset A$

Falsa, pois **7 não é um conjunto, mas um elemento**. Não podemos dizer que um elemento está contido em outro conjunto.

C) $B \subset A$

Verdadeira, pois todos os elementos de $B = \{2,7\}$ também estão no conjunto A.

D) $C \subset A$

Falsa, pois $C = \{-1,0\}$ tem um elemento, 0, que não está no conjunto A.

E) $-1 \notin A$

Falsa, pois -1 está no conjunto A.

Gabarito: LETRA C.

Igualdade entre Conjuntos

Pessoal, dois conjuntos são considerados iguais (ou idênticos) se eles possuem **exatamente os mesmos elementos!** Todo elemento que estiver em um deve necessariamente estar no outro. Por exemplo, considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 2, 1\}$. Nessa situação, podemos escrever que $A = B$.

Professor, mas a ordem está diferente!

Não importa! O importante é que todos elementos de A são os mesmos elementos de B.

HORA DE PRATICAR!

(MPE-GO/2022) Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{0, 8, 2\}$ e $\{x, y, 2\}$ são iguais, podemos afirmar que:

A) $x = 0$ e $y = 8$

B) $x + y = 8$

C) $x < y$

D) $x + 2y = 8$

Comentários:

Para que os dois conjuntos sejam iguais, **seus elementos devem ser iguais**. Note que o "2" já aparece nos dois conjuntos, então não vamos nos preocupar com ele.

$$\{0, 8, 2\} \qquad\qquad \{x, y, 2\}$$

Com isso, observe que **podemos ter duas situações**.

1ª situação) $x = 0$ e $y = 8$
2ª situação) $x = 8$ e $y = 0$

Sabendo disso, vamos analisar as alternativas.

A) $x = 0$ e $y = 8$
Errado. Essa é a nossa primeira situação, que não é necessariamente verdade. Também é uma possibilidade o caso em que $x = 8$ e $y = 0$.

B) $x + y = 8$
Correto. Esse é nosso gabarito, pessoal. Verifique que **independentemente da situação**, sempre vamos ter $x + y = 8$. Afinal, sempre um vai ser 0 (zero) e o outro será 8 (oito), de forma que a soma é sempre 8 (oito).

C) $x < y$
Errado. Essa afirmação é verdade apenas para a primeira situação. Como podemos ter o caso em que $x = 8$ e $y = 0$, tem-se também que x pode ser maior que y.

D) $x + 2y = 8$
Errado. Essa equação é válida apenas para a segunda situação. No caso em que $x = 0$ e $y = 8$, já é possível verificar que ela é inválida.

Gabarito: LETRA B.

Subconjuntos

Vamos aprofundar um pouco o nosso estudo sobre **os subconjuntos**. Para começar, tente dizer quais são os subconjuntos do conjunto $A = \{a, b\}$. *Pronto?* Observe como fica:

Conjunto	Subconjuntos
$A = \{a, b\}$	$\emptyset$
	$\{a\}$
	$\{b\}$
	$\{a, b\}$

A tabela acima lista todos os subconjuntos que podemos formar utilizando o conjunto A. Sabendo disso, podemos escrever as seguintes relações:

- $\emptyset \subset A$
- $\{a\} \subset A$
- $\{b\} \subset A$
- $\{a, b\} \subset A$

Devemos falar um pouco do **conjunto vazio e conjunto unitário**. O conjunto vazio, como o próprio nome sugere, **é um conjunto que não possui elementos**! É representado por meio do **símbolo** $\emptyset$ mas também pode aparecer como um simples par de chaves $\{\ \}$. Já **o conjunto unitário** é todo conjunto que **possui um único elemento**!

TOME NOTA!

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

Seja X um conjunto genérico, então:

$$\emptyset \subset X \qquad ou \qquad \{\ \} \subset X$$

Observe que $\{a, b\} \subset A$, indicando que **qualquer conjunto é também um subconjunto de si mesmo**! Seja $B = \{a, b, c\}$. Vamos listar os seus subconjuntos também?

Conjunto	Subconjuntos
$B = \{a, b, c\}$	$\emptyset$
	$\{a\}$
	$\{b\}$
	$\{c\}$
	$\{a, b\}$
	$\{a, c\}$
	$\{b, c\}$
	$\{a, b, c\}$

Quando um subconjunto de B é diferente do próprio B, chamamos ele de **subconjunto próprio de B**. Por exemplo, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ são subconjuntos próprios de B. Já o subconjunto $\{a, b, c\}$ é denominado **impróprio** pois é igual ao próprio B! Com os conjuntos listados na tabela acima são subconjuntos de B, então podemos escrever:

- $\emptyset \subset B$
- $\{a\} \subset B$
- $\{b\} \subset B$
- $\{c\} \subset B$
- $\{a, b\} \subset B$
- $\{a, c\} \subset B$
- $\{b, c\} \subset B$
- $\{a, b, c\} \subset$

Pessoal, observe que **os subconjuntos de um conjunto são apenas diferentes combinações de seus elementos**. Portanto, se você precisar listar os subconjuntos, siga os seguintes passos:

Passo 1: O primeiro conjunto que você deve anotar como subconjunto é o **conjunto vazio**.

Passo 2: Depois, transforme em subconjunto cada elemento, um por um.

Passo 3: Em seguida, escreva os subconjuntos formado por pares de elementos.

Passo 4: Acabando os pares, pegue os trios e assim sucessivamente.

Seguindo essa receita, vamos listar os subconjuntos de $C = \{1, 2, 3\}$?

Passo 1: Você não deve esquecer que **o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto**, portanto:

$$\emptyset$$

Passo 2: Transformando cada elemento em um subconjunto, **um por um**.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$$

Passo 3: Escrever os subconjuntos formado por **pares** de elementos.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}$$

Passo 4: Ir para os trios.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}, \{1, 2, 3\}$$

Como o conjunto C só possui 3 elementos, encerramos por aqui! Listamos todos os subconjuntos dele. Observe que quando tínhamos um conjunto com **2 elementos, obtivemos 4 subconjuntos**. Ao aumentar um elemento no conjunto, **passamos a ter 8 subconjuntos**. Será que é possível estabelecer uma fórmula para calcular **o número de subconjuntos baseado na quantidade de elementos de um conjunto**?

É possível sim e **a fórmula é bem simples**. Seja $n(A)$ **o número de elementos de um conjunto** A. Então, **o número de subconjuntos de A, n_{S_A}**, é dado por:

$$\boxed{n_{S_A} = 2^{n(A)}}$$

Por exemplo, vamos voltar no conjunto $C = \{1, 2, 3\}$. Como ele tem **três elementos**, para encontrar o número de subconjuntos de C, fazemos assim:

$$n_{S_C} = 2^{n(C)} \quad \rightarrow \quad n_{S_C} = 2^3 \quad \rightarrow \quad n_{S_C} = 8$$

Logo, C tem **oito subconjuntos**.

HORA DE PRATICAR!

(Pref. Tuparetema/2024) Julgue o item:

Um conjunto não pode ser um subconjunto de si mesmo.

Comentários:

Para julgar o item, precisamos saber o que é um subconjunto. Um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B **se todos os elementos de A também pertencem a B**. Por exemplo, $\{a, b\}$ é um subconjunto de $\{a, b, c\}$, mas $\{a, d\}$ não é um subconjunto de $\{a, b, c\}$. A relação de subconjunto é representada pelo símbolo $\subseteq$. Podemos escrever $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$, mas não podemos escrever $\{a, d\} \subseteq \{a, b, c\}$.

Uma propriedade importante da relação de subconjunto é que todo conjunto é um subconjunto de si mesmo. **Isso significa que qualquer conjunto A satisfaz $A \subseteq A$, pois todos os elementos de A pertencem a A.** Portanto, o item está errado. Um conjunto pode sim ser um subconjunto de si mesmo.

Gabarito: ERRADO.

Conjunto das Partes

Você sabia que **podemos juntar todos os subconjuntos de um conjunto para formar um novo conjunto**? Esse novo conjunto formado é denominado **conjunto das partes** e é representado pelo **símbolo** $\wp$. Por exemplo, os **conjuntos das partes** de $A = \{a, b\}$ e de $B = \{a, b, c\}$ são:

$$\wp(A) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\wp(B) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Observe que $\wp(A)$ e $\wp(B)$ são **conjuntos formados por outros conjuntos**! Note ainda que **a sua quantidade de elementos é exatamente a quantidade de subconjuntos** calculada pela fórmula $\boldsymbol{nS_A = 2^{n(A)}}$. Um outro ponto que chamamos atenção é que, no conjunto das partes, listamos **o conjunto vazio** $\{\ \}$ explicitamente com um dos seus elementos.

(CRQ 4/2023) Considerem-se A o conjunto dos meses do ano que começam com vogal, B o conjunto dos meses do ano que começam com consoante e C o conjunto dos meses do ano que começam com a letra J. Com base nessas informações, julgue o item.

O conjunto das partes de A tem 8 subconjuntos não vazios.

Comentários:
Vamos lá!

conjunto A é **formado pelos meses do ano que começam com vogal**, ou seja:

$$\text{A} = \{\text{abril, agosto, outubro}\}$$

O **conjunto das partes de A é o conjunto que contém todos os subconjuntos possíveis de A**, incluindo o subconjunto vazio e o próprio A. Para calcular o número de elementos do conjunto das partes de um conjunto finito, usa-se a fórmula $\boldsymbol{2^n}$**,** onde n é o número de elementos do conjunto original. No caso de A, $n = 3$, então o conjunto das partes de A tem $2^3 = $ **8 elementos**.

Porém, desses 8 elementos, um deles é o subconjunto vazio. Portanto, **o conjunto das partes de A tem 7 subconjuntos não vazios**, e não 8 como afirma o item.

Os subconjuntos não vazios de A são: {abril}, {agosto}, {outubro}, {abril, agosto}, {abril, outubro}, {agosto, outubro} e {abril, agosto, outubro}.

Gabarito: ERRADO.

INDO MAIS FUNDO!

Observe o conjunto F exemplificado abaixo.

$$F = \{1, 2, 3, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{W\}\}$$

Assim como o conjunto das partes, **F é um conjunto que possui como elemento outros conjuntos**. Note que o conjunto $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ **é um elemento de F**. Nessas situações, e somente nelas, podemos escrever $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \in \boldsymbol{F}$. Galera, muita atenção aqui! **$\{a, b, c\}$ não é um subconjunto de F, é um elemento!** Perceba que ele está listado juntamente com os demais elementos!

- $1 \in F$
- $2 \in F$
- $3 \in F$
- $\{a, b, c\} \in F$
- $\{d, e, f\} \in F$
- $\{W\} \in F$

E nesses casos, *quando usaremos a relação de inclusão?* Veja alguns exemplos de subconjuntos de F:

- $\{1\} \subset F$
- $\{1, 2\} \subset F$
- $\{1, 2, 3\} \subset F$
- $\{\{a, b, c,\}\} \subset F$
- $\{\{W\}\} \subset F$
- $\{\{a, b, c,\}, \{d, e, f\}, \{W\}\} \subset F$

Observe que, para representar os subconjuntos que contém outros conjuntos, utilizamos, <u>sem problema algum</u>, dois pares de chaves. Tenha bastante cuidado em questões que tragam esse tipo de abordagem! Já vi muitas bancas se enrolarem ao cobrar questões com essa temática, pois desconhecem que conjuntos podem sim ser elementos de outros conjuntos e que podemos estabelecer uma relação de pertinência nessas situações.

HORA DE PRATICAR!

(FMS POMBOS/2023) Julgue o item:

Dado que X = {3, 5, 7, 9} e Y = {3, 5, {7, 9}}, podemos afirmar corretamente que esses conjuntos são iguais.

Comentários:

Para julgar o item, devemos lembrar a definição de conjunto e de igualdade entre conjuntos. Um conjunto é uma coleção de objetos distintos e não ordenados, chamados de elementos. **Dois conjuntos são iguais se e somente se têm os mesmos elementos**, independentemente da ordem ou da forma como são apresentados.

No caso dos conjuntos X = {3, 5, 7, 9} e Y = {3, 5, {7, 9}}, podemos observar que eles não são iguais, pois têm elementos diferentes. **O conjunto X tem quatro elementos: 3, 5, 7 e 9.** **O conjunto Y tem três elementos: 3, 5 e {7, 9}**. O elemento {7, 9} é um conjunto em si mesmo, formado por dois números. Portanto, ele é diferente do elemento 7 e do elemento 9, que são números simples.

Logo, **o item está errado**, pois afirma incorretamente que os conjuntos X e Y são iguais.

Gabarito: ERRADO.

(FMS POMBOS/2023) Julgue o item:

Ao empregar a linguagem de conjuntos e considerando o conjunto $X = \{x, \{y\}, z\}$, podemos afirmar corretamente que o conjunto $\{x, \{y\}\}$ pertence a X.

Comentários:

Na linguagem dos conjuntos, usamos os símbolos ∈ (pertence) e ∉ (não pertence) para indicar se um elemento faz ou não parte de um conjunto. Por exemplo, se A = {1, 2, 3}, então 1 ∈ A e 4 ∉ A. **Um conjunto também pode conter outros conjuntos como seus elementos**. Nesse caso, usamos as chaves {{ }} para diferenciar os conjuntos dos elementos. Por exemplo, se B = {a, {b, c}, d}, então a ∈ B, b ∉ B, {b, c} ∈ B e {a, d} ∉ B.

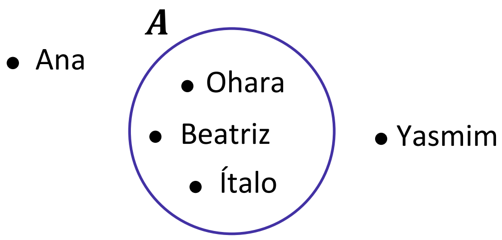
No item, temos **o conjunto $X = \{x, \{y\}, z\}$, que contém três elementos: x, {y} e z**. O elemento {y} é um conjunto que contém o elemento y. Portanto, podemos dizer que y ∈ {y} e {y} ∈ X. No entanto, **o conjunto {x, {y}} não é um elemento de X, mas sim um subconjunto de X**. Logo, o item está errado.

Gabarito: ERRADO.

Operações com Conjuntos

Representação por Diagramas

Você deve ter visto ao longo da aula que **apareceram alguns conjuntos na forma de diagramas**. Esse tipo de representação é extremamente útil na resolução de questões, pois **possibilita uma melhor compreensão do problema**. Por exemplo, seja $\boldsymbol{A}$ o conjunto de funcionários de uma determinada empresa.



Todos aqueles que estão dentro do conjunto $\boldsymbol{A}$ **representam funcionários da empresa**. **Quem está fora, não é funcionário da empresa**. Olhando simplesmente para o diagrama, podemos dizer que:

- $Ohara \in A$;
- $Beatriz \in A$;
- $Italo \in A$;
- $Yasmim \notin A$;
- $Ana \notin A$.

Esses diagramas são bastante conhecidos no meio matemático e possuem um nome especial: são os **Diagramas de Venn-Euler** ou, simplesmente, **Diagramas de Venn**. Esse tipo de representação é utilizado principalmente quando **precisamos representar vários conjuntos ao mesmo tempo**. Nos tópicos a seguir, usaremos bastante esses diagramas e você logo ficará habituado.

Existem diferentes maneiras de representarmos os conjuntos. A primeira dela é como estamos fazendo desde o começo da aula, como por exemplo, em $V = \{a, e, i, o, u\}$. Chamamos esse tipo de representação de "**representação por enumeração**".

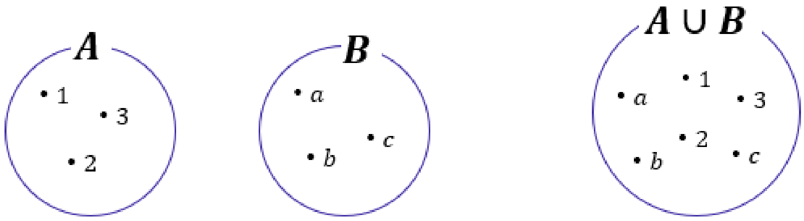
Ademais, temos a **representação por propriedade**. Para entender melhor, considere o mesmo conjunto V citado anteriormente. Ele também poderia ser escrito da seguinte forma: $\boldsymbol{V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}}$.

Na prática, podemos ler tal conjunto da seguinte forma: **V é o conjunto dos elementos de x, tal que x é vogal**. Lemos essa barrinha vertical como **"tal que"**. **Não esqueça!**

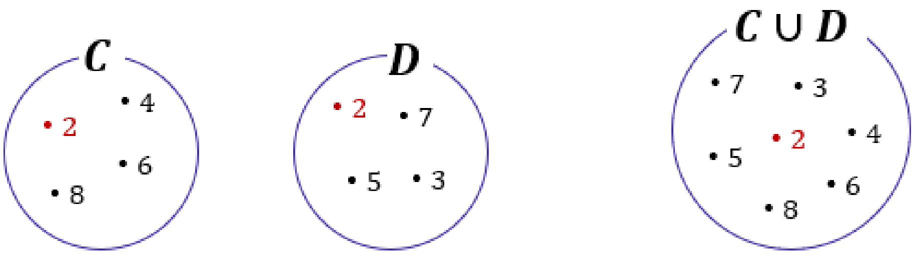
Por fim, temos a **representação por diagramas** que estudamos agora a pouco! Fechou?

União

Nessa parte da nossa aula, veremos que existem **várias operações** que os conjuntos podem se submeter. A mais conhecida talvez seja **a união (ou reunião) de conjuntos**. A união de conjuntos é representada pelo **símbolo** ∪ e, basicamente, **funde dois conjuntos em um só**.



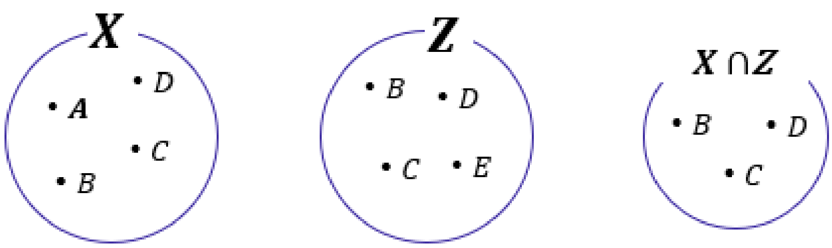
No diagrama acima, temos que $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Quando fazemos a união de A e B, criamos um conjunto que possui **todos os elementos dos dois conjuntos**, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$. Haverá casos em que os conjuntos possuirão um mesmo elemento e, quando for necessário fazer a união dos dois, **você não precisará escrever duas vezes o elemento repetido**. Observe um exemplo nos diagramas abaixo.



Note que **o 2 é um elemento comum aos dois conjuntos**: $C = \{2, 4, 8, 6\}$ e $D = \{2, 3, 5, 7\}$. Nessas situações, quando fazemos a união de conjuntos que possuem elementos em comum, **esse elemento não vai aparecer duas vezes no conjunto união**! Confira que $C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, **o 2 aparece apenas uma vez**.

Intersecção

A operação que seleciona **os elementos comuns entre dois ou mais conjuntos é denominada intersecção e é representada por** ∩. Por exemplo, nos diagramas acima o número 2 é o único elemento comum entre C e D. Logo, o conjunto intersecção será formado apenas pelo elemento 2: $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D} = \{\mathbf{2}\}$. Veja mais um exemplo abaixo.



Temos que $X = \{A, B, C, D\}$ e $Z = \{B, C, D, E\}$. São dois conjuntos distintos, mas que **possuem alguns elementos em comum**. Os elementos B, C e D aparecem nos 2 conjuntos e formam o conjunto intersecção: $\boldsymbol{X \cap Z = \{B, C, D\}}$. Vamos treinar um pouco esses conceitos?

HORA DE PRATICAR!

(IBGE/2023) Assinale a alternativa que identifica corretamente a intersecção entre esses três conjuntos A = {1, 2, 5, 6, 7}, B = {2, 3, 4, 5, 6, 7} e C = {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

A) {2, 3, 5}
B) {2, 5}
C) {6, 7}
D) {1, 2, 5}
E) {1, 2, 3, 4, 5}

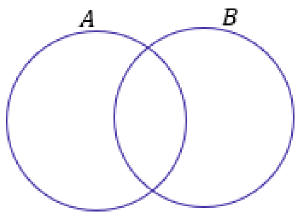
Comentários:

A intersecção entre três conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem aos três conjuntos ao mesmo tempo. Portanto, **para encontrar a intersecção entre A, B e C, basta identificar quais elementos estão presentes nos três conjuntos dados**.

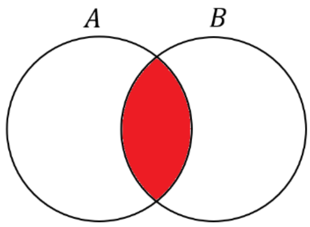
Assim, para encontrar a intersecção entre A, B e C, devemos verificar quais elementos satisfazem a condição de pertencer aos três conjuntos A, B e C. Dados os conjuntos A = {1, 2, 5, 6, 7}, B = {2, 3, 4, 5, 6, 7} e C = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, podemos ver que **os únicos elementos que cumprem essa condição são 2 e 5**. Portanto, a intersecção entre esses três conjuntos é o conjunto {2, 5}. Assim, a alternativa correta é a letra B.

Gabarito: LETRA B.

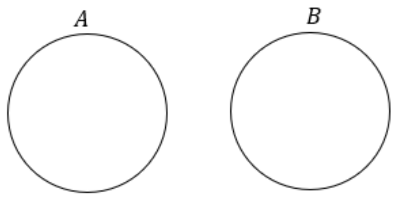
Quando dois conjuntos **possuem elementos em comum**, podemos representá-los assim:



Essa região comum representa exatamente a sua intersecção. Os elementos que estão na região em **vermelho** abaixo **pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B**.

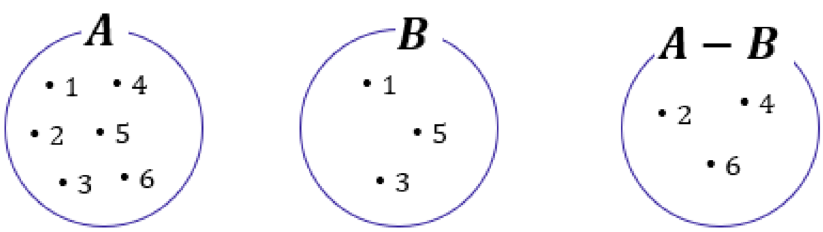


Caso os conjuntos não possuam elementos em comum, isto é, **não haja intersecção entre os dois**, nós vamos chamá-los de **disjuntos** e os representaremos utilizando círculos afastados um do outro.

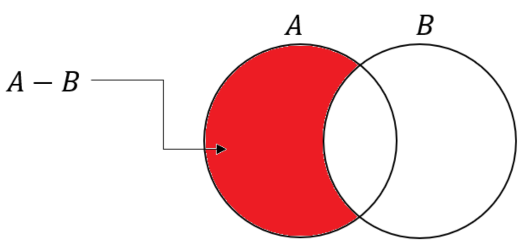


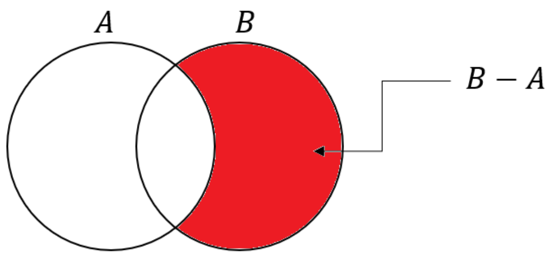
Diferença

Existe uma outra operação que é muito importante para a sua prova! Essa operação **é a diferença ou, como também é conhecida, a subtração de conjuntos**! O conjunto diferença é representado por $\boldsymbol{A - B}$ e é formado por **todos os elementos de A que não são elementos de B**! Por exemplo, considere os conjuntos:

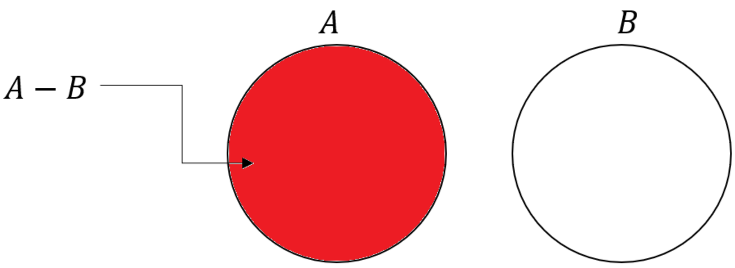


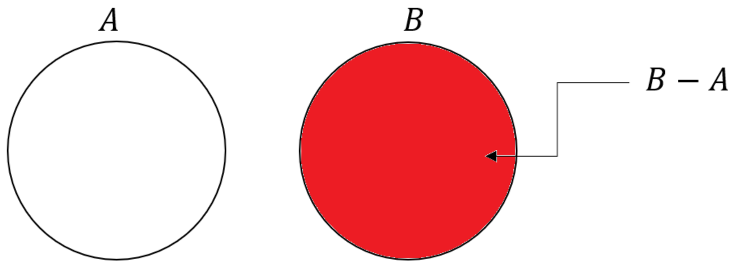
Observe que $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Para encontrar $A - B$, devemos selecionar **os elementos de $\boldsymbol{A}$ que não são elementos de $\boldsymbol{B}$**! Ou seja, **aqueles elementos que são apenas elementos de $\boldsymbol{A}$**! Observe que A e B possuem em comum os seguintes elementos: $A \cap B = \{1, 3, 5\}$. Logo, se $A = \{\mathbf{1}, 2, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6\}$, então o $A - B = \{2, 4, 6\}$. Em diagramas, também é possível representar o conjunto diferença.





Um detalhe importante é que se A e B são **conjuntos disjuntos**, então $\boldsymbol{A - B = A}$ **e** $\boldsymbol{B - A = B}$. Veja como essa informação pode ser representada:





Vamos fazer alguns **exemplos numéricos** para visualizar ainda melhor essa última situação.

Considere os conjuntos $A = \{10, 20, 30\}$ e $B = \{40, 50\}$. Primeiramente, note que os conjuntos são disjuntos. *Mas qual é o motivo mesmo para eles serem disjuntos, professor?*

A e B são disjuntos pois não possuem elementos em comum! Nenhum sequer!! São totalmente diferentes um outro. *Tudo bem?!* Agora, lembre-se que **$A - B$ é o conjunto de elementos formados por todos os elementos de A que não são elementos de B**.

Ora, nesse nosso exemplo, **<u>todos</u> os elementos de A não são elementos de B**!! Sendo assim, podemos escrever que:

$$A - B = \{10, 20, 30\} = A$$

(UFPB/2023) Sejam os conjuntos finitos A = {0,1,2,3,5,6} e B = {0,2,3,5,8}, então podemos dizer que:
A) A união entre os conjuntos A e B possui exatamente 8 elementos
B) A – B possui exatamente 2 elementos
C) B – A possui exatamente 2 elementos
D) A intersecção entre os conjuntos A e B possui exatamente 3 elementos
E) Os conjuntos A e B são disjuntos

Comentários:

Essa questão envolve várias operações e conceitos da Teoria dos Conjuntos! Vamos comentar cada uma das alternativas.

A) A união entre os conjuntos A e B possui exatamente 8 elementos

Incorreta! A união entre A e B é formada pelos elementos {0,1,2,3,5,6,8}, que **são 7 ao todo.**

B) A – B possui exatamente 2 elementos

Correta! A – B é formado pelos elementos que pertencem a A, mas não a B. Neste caso, temos que $A - B = \{1{,}6\}$, que **possui exatamente 2 elementos**.

C) B – A possui exatamente 2 elementos

Incorreta! $B - A$ é formado pelos elementos que pertencem a B, mas não a A. Neste caso, temos que $B - A = \{8\}$, que **possui apenas 1 elemento**.

D) A intersecção entre os conjuntos A e B possui exatamente 3 elementos

Incorreta! A intersecção entre A e B é formada pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos ao mesmo tempo. Neste caso, temos que $A \cap B = \{0{,}2{,}3{,}5\}$, que possui **4 elementos**.

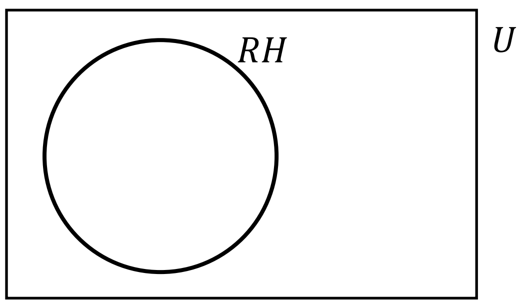
E) Os conjuntos A e B são disjuntos

Incorreta! Dois conjuntos são disjuntos **se não possuem nenhum elemento em comum**. Neste caso, podemos ver que A e B possuem vários elementos em comum, como 0, 2, 3 e 5.

Gabarito: LETRA B.

Complementar

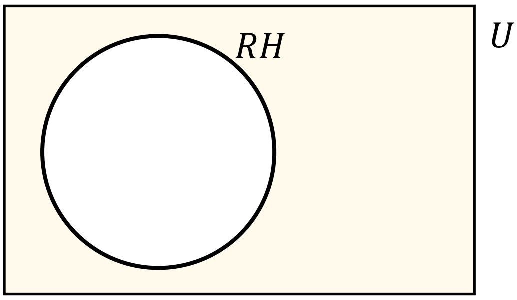
Quando falamos de um determinado conjunto, normalmente **estamos destacando determinado grupo dentro de um universo maior**. Por exemplo, podemos formar um conjunto dos funcionários especializados em RH de uma empresa. Esse grupo de funcionários foi retirado de um conjunto maior: **o conjunto formado por todos os funcionários da empresa**. Acompanhe o diagrama abaixo.



Observe que o conjunto formado por aqueles especializados em RH está contido dentro de um conjunto U. **Esse conjunto maior é frequentemente chamado de conjunto universo** e, nesse exemplo, poderia representar **o conjunto de todos os funcionários da empresa**.

Quer um outro exemplo? Imagine um conjunto formado por todas as vogais: $V = \{a, e, i, o, u\}$. Em um problema que estamos trabalhando com esse conjunto, qual seria o conjunto universo? O conjunto universo nessa situação seria o conjunto formado por todas as letras do alfabeto: $U = \{a, b, c, d, e, f, \dots, x, y, z\}$.

Quando estamos falando de conjunto universo, um novo conceito surge: **o conjunto complementar**. Lembre-se do conjunto que inventamos com os funcionários de uma empresa especializados em RH. *Qual o complementar desse conjunto?* Seria o conjunto formado por **todos os outros funcionários da empresa que não são especializados em RH!** Vamos mostrar no diagrama.



O complementar do conjunto RH é representado pela **parte pintada em amarelo**. *E no nosso exemplo das letras?* Qual o complementar do conjunto formado apenas pelas vogais? Ora, é **o conjunto formado por todas as outras letras que não são vogais, isto é, o conjunto das consoantes**! Para determinar o complementar de qualquer conjunto, **é de fundamental importância conseguir identificar qual é o conjunto universo**.

A notação utilizada para representar o complementar de um conjunto X é $\boldsymbol{X^C}$ **ou** $\boldsymbol{\overline{X}}$. Representamos o conjunto complementar com esse "expoente" C ou uma barra em cima. Ademais, podemos definir o conjunto complementar utilizando o que acabamos de ver **sobre conjunto diferença**.

TOME NOTA!

$$\boxed{\overline{X} = X^C = U - X}$$

Veja que utilizando a definição acima, temos que o conjunto complementar X^C é formado por **tudo que está no conjunto universo, mas não está em $\boldsymbol{X}$**. Vamos fazer algumas questões para aplicar o que acabamos de ver?

(CREFONO/2023) Os alienígenas estão estudando a população da Terra e, para isso, estão analisando alguns conjuntos de dados. Considere os conjuntos A, B e C, em que:

- A representa os seres humanos que já avistaram um OVNI;
- B representa os seres humanos que acreditam em vida extraterrestre; e
- C representa os seres humanos que afirmam ter sido abduzidos por alienígenas.

Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

O complemento de A representa os seres humanos que nunca avistaram um OVNI.

Comentários:

O complemento de um conjunto A é o conjunto formado por todos os elementos que não pertencem a A. Como A representa os seres humanos que já avistaram um OVNI, o complemento de A representa os seres humanos que **não avistaram um OVNI**. Portanto, o item está certo.

Gabarito: CERTO.

(CRAS/2023) Sendo $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 7, 10\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 5, 10, 11\}$, então o complementar de Y em X é:

A) $\{2, 3, 5, 10\}$.
B) Ø.
C) $\{-3, -2, -1\}$.
D) $\{11\}$.
E) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 7\}$.

Comentários:

O complementar de Y em X (C_X^Y) é o conjunto formado pelos **elementos que pertencem a X mas não pertencem a Y**. Para encontrar esse conjunto, temos que eliminar de X os elementos que são comuns a Y. Assim:

$$C_X^Y = X - Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, 7, \mathbf{10}\} - \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, \mathbf{10}, 11\}$$

Note que **os elementos comuns são {2,3,5,10}**. Logo, sobram os elementos {-3,-2,-1,0,1,7}, que formam o complementar de Y em X.

$$\boxed{\boldsymbol{X - Y \ = \ \{-3, -2, -1, 0, 1, 7\}}}$$

Gabarito: LETRA E.

Leis de De Morgan

Pessoal, as leis de De Morgan são dois teoremas que **relacionam as operações de união e intersecção de conjuntos com a complementação**. Elas foram formuladas pelo matemático britânico Augustus De Morgan no século 19 e podem ser enunciadas assim:

- O complemento da união de dois conjuntos é igual à intersecção dos complementos desses conjuntos.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

- O complemento da intersecção de dois conjuntos é igual à união dos complementos desses conjuntos.

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Essas leis nos permitem manipular expressões envolvendo conjuntos de maneiras diferentes e facilitam o entendimento de algumas propriedades dos conjuntos. Vamos ver alguns exemplos para ilustrar como elas funcionam.

Suponha que **A seja o conjunto dos números pares menores que 10** e que **B seja o conjunto dos números múltiplos de 3 menores que 10.** Temos que:

- $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $B = \{0, 3, 6, 9\}$
- $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Então, a união de A e B é o conjunto que contém todos os elementos de A ou de B, ou seja:

$$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

O complemento de AUB é o conjunto que contém todos os elementos de U que não estão em AUB, ou seja:

$$(A \cup B)^c = \{1, 5, 7\}$$

Por outro lado, **o complemento de A é o conjunto que contém todos os elementos que não estão em A**:

$$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

E **o complemento de B é o conjunto que contém todos os elementos que não estão em B**:

$$B^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

A **intersecção de A^c e B^c é o conjunto que contém todos os elementos que estão em A^c e em B^c**, ou seja:

$$A^c \cap B^c = \{1, 5, 7\}$$

Observe que **esse conjunto é exatamente o mesmo que o complemento de A ∪ B**. Isso mostra que a primeira lei de De Morgan é válida nesse caso. Podemos fazer um raciocínio análogo para mostrar a validade da segunda lei! Agora, vamos ver como o tema aparece em prova!

(PM-SP/2018) De acordo com as leis de De Morgan, o complementar da união é igual a intersecção dos complementares. Assim, dado um conjunto X, seja X^C o seu complementar em relação ao conjunto universo. Considerando $V = \{a, e, i, o, u\}$ o conjunto universo, sejam os subconjuntos $A = \{a, e\}$ e $B = \{o, u\}$. O conjunto $A^C \cap B^C$ é igual ao conjunto

A) $\{i\}$

B) $\{o\}$

C) $\{o, i\}$

D) $\{a, i\}$

Comentários:

O complementar de A é tudo que pertence ao universo de A, mas **não pertence a A**.

$$A^C = V - A$$

Como $V = \{a, e, i, o, u\}$ e $\boldsymbol{A = \{a, e\}}$, ficamos:

$$A^C = \{i, o, u\}$$

Por sua vez:

$$B^C = V - B$$

Como $V = \{a, e, i, o, u\}$ e $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{o}, \boldsymbol{u}\}$, ficamos:

$$B^C = \{a, e, i\}$$

Queremos a intersecção entre A^C e B^C:

$$\boxed{\boldsymbol{A^C \cap B^C = \{i\}}}$$

Gabarito: LETRA A.

Princípio da Inclusão-Exclusão

Pessoal, muitas vezes vamos precisar **determinar o número de elementos de um conjunto**. Essa tarefa de contar **pode ficar um pouco complicada quando temos elementos que pertencem a mais de um conjunto**, pois, nesses casos, **devemos eliminar as repetições** para não contar o mesmo elemento duas vezes.

Nesse sentido, surge o Princípio da Inclusão-Exclusão (PIE). Esse princípio possibilita uma contagem exata da quantidade de elementos **de um conjunto formado pela união de vários outros, mesmo que contenham intersecções**.

2 Conjuntos

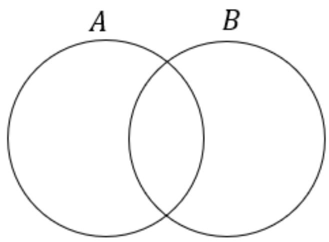
Imagine **dois conjuntos A e B com elementos em comum**. Se $n(A)$ é o número de elementos de A e $n(B)$ é o número de elementos de B, quanto vale $n(A \cup B)$?

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}}$$

Vamos tentar entender o caminho das pedras para chegar na relação acima. Considere os conjuntos:

- $A = \{1, 2, 3\} \quad \Rightarrow \quad n(A) = 3$
- $B = \{3, 4, 5\} \quad \Rightarrow \quad n(B) = 3$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \Rightarrow \quad n(A \cup B) = 5$
- $A \cap B = \{3\} \quad \Rightarrow \quad n(A \cap B) = 1$



Observe que **apesar da união entre A e B ser uma espécie de fusão entre os dois conjuntos**, o número de elementos na união, na maioria dos casos, **não é a soma direta do número de elementos de A com o número de elementos de B**.

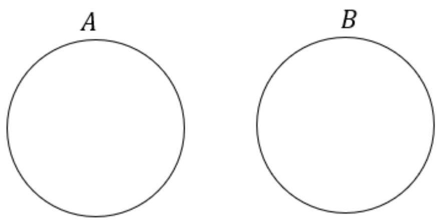
Perceba que **o elemento 3 aparece tanto em A como em B** e ao somar o número de elementos dos dois conjuntos **devemos considerar que estamos somando o mesmo elemento duas vezes!** É por isso esse motivo que devemos subtrair a quantidade de elementos que estão na intersecção. Já para **conjuntos disjuntos** temos que:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}}$$

pois:

$$\boldsymbol{n(A \cap B) = 0.}$$



HORA DE PRATICAR!

(PREF. CAMPOS DOS GOYTACAZES/2024) Certo congresso acadêmico organizado na universidade federal de determinado Estado contou com a participação de 160 pesquisadores e foi realizado em dois dias. O primeiro dia do congresso teve a participação de 120 pesquisadores e, no segundo, a participação foi de 100 pesquisadores. Considerando estas informações, quantos pesquisadores participaram dos dois dias do congresso?

A) 30.

B) 45.

C) 60.

D) 75.

Comentários:

Para resolver esta questão, podemos usar o **princípio da inclusão-exclusão**, que diz que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

No caso, o conjunto A é formado pelos pesquisadores que participaram do primeiro dia do congresso, e o conjunto B é formado pelos que participaram do segundo dia. **O número de elementos da união entre A e B é igual ao número total de pesquisadores, ou seja, 160**. Substituindo os dados na fórmula, temos:

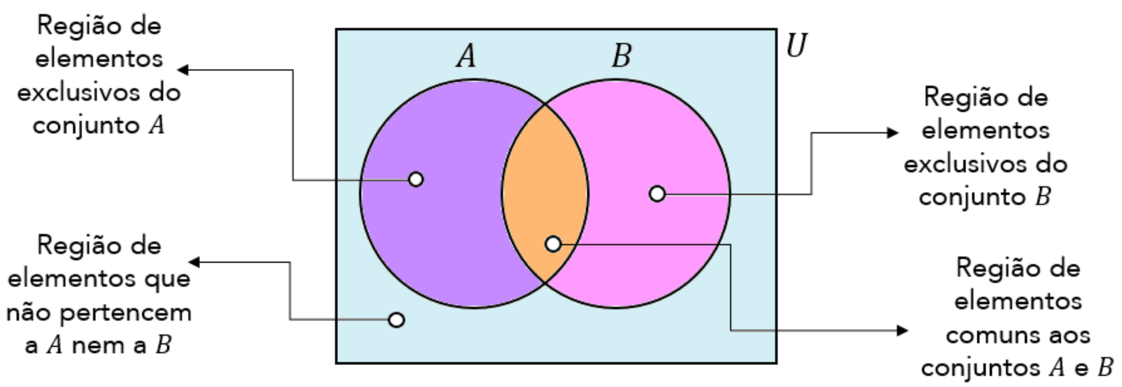
$$160 = 120 + 100 - n(A \cap B)$$

Simplificando, obtemos:

$$n(A \cap B) = 60$$

Gabarito: LETRA C.

A verdade é que **não precisamos decorar fórmulas** para responder questões que envolva esse princípio. Utilizando **um pouco de lógica e diagramas de Venn**, podemos encontrar a quantidade de elemento de cada conjunto envolvido em um problema típico de Princípio da Inclusão-Exclusão. Antes disso, quero deixar claro para vocês **o significado de cada uma das regiões** no seguinte diagrama:



HORA DE PRATICAR!

(PREF. AMERICANA/2023) Para uma vaga de emprego foram entrevistados 820 candidatos, dos quais 450 são carpinteiros, 250 são pedreiros, 320 não são carpinteiros nem pedreiros. Dos candidatos entrevistados, são carpinteiro e pedreiro, aproximadamente:

A) 13,05%.

B) 19,15%.

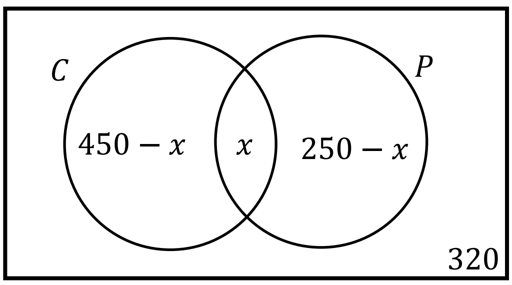
C) 24,39%.

D) 25,50%.

E) 32,95%.

Comentários:

Vamos organizar as informações do enunciado em um diagrama.



No diagrama desenhado, "C" representa o conjunto dos carpinteiros e "P", o dos pedreiros. Tem-se ainda:

- "x" é a quantidade de candidatos que **são carpinteiro e pedreiro**;
- "$450 - x$" é a quantidade de candidatos que são **apenas** carpinteiros;
- "$250 - x$" é a quantidade de candidatos que são **apenas** pedreiros;
- "320" é a quantidade de candidatos que **não são carpinteiros nem pedreiros**.

A soma dos valores dessas regiões **deve totalizar a quantidade de candidatos entrevistados**. Logo:

$$x + (450 - x) + (250 - x) + 320 = 820$$

$$1020 - x = 820$$

$$x = 200$$

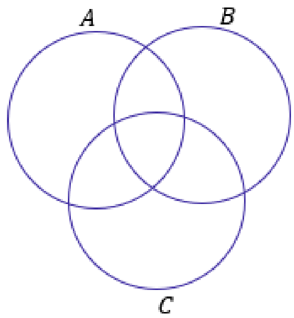
A questão quer esse resultado e**m porcentagem**. Logo:

$$x\% = \frac{200}{820} \cdot 100 \quad \rightarrow \quad \boxed{x\% = 24,39\%}$$

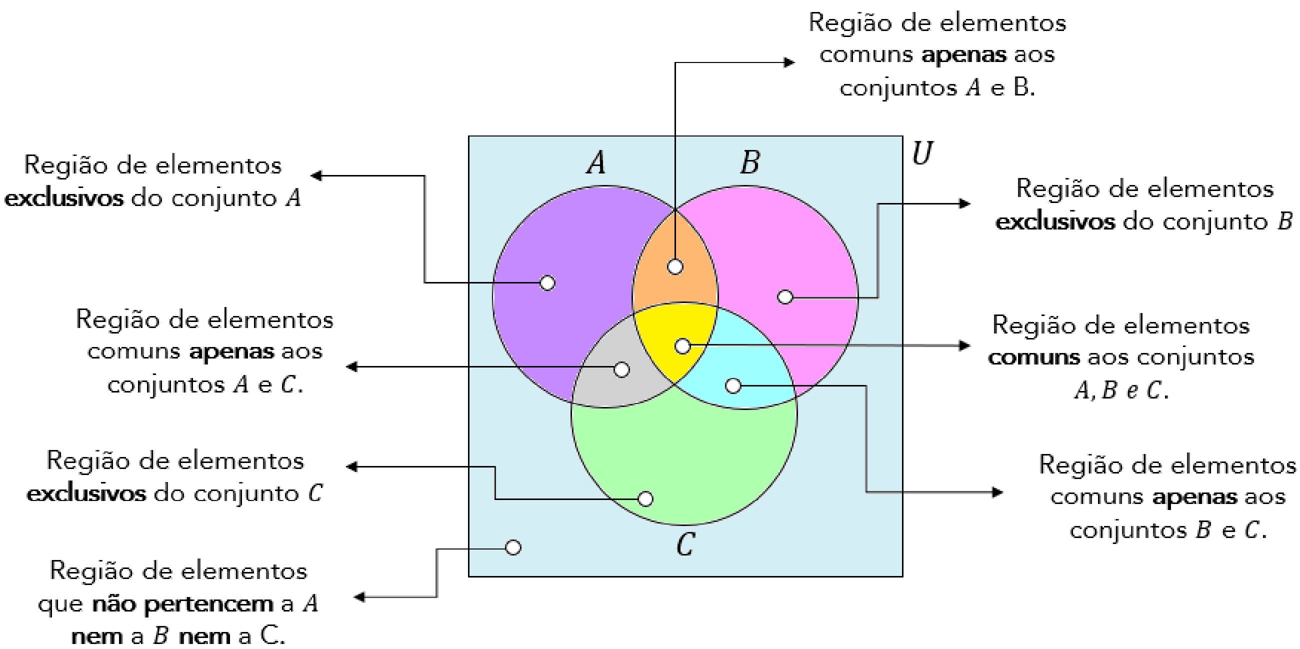
Gabarito: LETRA C.

3 Conjuntos

Imagine que você tem 3 conjuntos, **cada conjunto possui elementos em comum com os outros dois**. A situação **mais completa** que podemos imaginar está representada pelo diagrama abaixo.



Vamos fazer **uma leitura** de cada uma das regiões da figura acima?



Observe que **o número de regiões com três conjuntos aumenta bastante** em relação à análise anteriormente feita com dois. Agora, considere que **você conhece a quantidade** de elementos de cada um dos conjuntos cima, isto é, $\boldsymbol{n(A)}$, $\boldsymbol{n(B)}$ e $\boldsymbol{n(C)}$.

Como você faria para encontrar $\boldsymbol{n(A \cup B \cup C)}$? Será que é só somar as três quantidades? **A resposta para essa pergunta é não!** Precisamos ter atenção aos **elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**.

Segundo o Princípio da Inclusão- Exclusão, a fórmula geral que permite calcular a quantidade de elementos de um **conjunto formado pela união de outros três** é dada por:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Vamos tentar entender com ela surge? Note que para achar a quantidade de elementos do conjunto união, primeiro **somamos individualmente as quantidades de cada um dos conjuntos**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C)}$$

No entanto, nós vimos que, ao fazer isso, **não estamos considerando os elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**. Essa soma dará, certamente, uma quantidade de elementos maior do que a quantidade real. *Mas, então, o que fazer?* **É preciso subtrair as quantidades dos elementos que estão nas intersecções, evitando assim a dupla contagem**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)}$$

Perceba que a fórmula ainda não está completa. Imagine um elemento que é **comum a todos os 3 conjuntos**, isto é, pertence a $A \cap B \cap C$. Esse elemento pertence tanto a A, quanto a B e a C. Quando fizemos a soma $n(A) + n(B) + n(C)$, **contamos ele três vezes**!

Quando fizemos a subtração $-n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$ estamos **tirando ele três vezes**! **Resultado: não estamos contando os elementos de $\boldsymbol{A \cap B \cap C}$**. Por esse motivo, **adicionamos $\boldsymbol{n(A \cap B \cap C)}$.** Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Eu sei que a fórmula **pode parecer um pouco complicada**, mas garanto que com **um pouco de paciência e resolução de exercícios**, ela se tornará **mais amigável e bastante intuitiva**! Além disso, também ensinarei um jeito que vocês poderão utilizar **caso não lembrem da fórmula**. Algumas vezes, no entanto, **a questão pode exigir a aplicação direta dela**. Confira o exercício abaixo.

HORA DE PRATICAR!

(ITAIPU/2024) A divisão de saúde da usina de Itaipu entrevistou 79 servidores a respeito dos seus hábitos esportivos. Nessa pesquisa, verificou-se que:

- 35 jogam futebol;
- 35 praticam natação;
- 30 jogam tênis;
- 11 praticam futebol e natação;
- 8 praticam natação e tênis;
- 6 praticam tênis e futebol;
- todos os entrevistados praticam algum esporte.

Na situação apresentada, o número de entrevistados que praticam todos os esportes é igual a
A) 1.
B) 3.
C) 4.
D) 6.
E) 11.

Comentários:
Para resolver essa questão, podemos usar o princípio da inclusão-exclusão!

$$\boxed{\boldsymbol{n(F \cup N \cup T) = n(F) + n(N) + n(T) - n(F \cap N) - n(F \cap T) - n(N \cap T) + n(F \cap N \cap T)}}$$

- "F" representa o conjunto daqueles que jogam futebol;
- "N" representa o conjunto daqueles que praticam natação;
- "T" representa o conjunto daqueles que jogam tênis;

De acordo com o enunciado, podemos retirar as seguintes informações:

- 35 jogam **futebol:**

$$n(F) = 35$$

- 35 praticam **natação**:

$$n(N) = 35$$

- 30 jogam **tênis**:

$$n(T) = 30$$

- 11 praticam **futebol e natação**;

$$n(F \cap N) = 11$$

- 8 praticam **natação e tênis**;

$$n(N \cap T) = 8$$

- 6 praticam **tênis e futebol**:

$$n(F \cap T) = 6$$

- todos os entrevistados (79) praticam algum esporte.

$$\boldsymbol{n(F \cup N \cup T) = 79}$$

Pronto! Podemos substituir essas quantidades na fórmula:

$$79 = 35 + 35 + 30 - 11 - 6 - 8 + n(F \cap N \cap T)$$

Simplificando:

$$79 = 75 + n(F \cap N \cap T)$$

$$\boxed{\boldsymbol{n(F \cap N \cap T) = 4}}$$

Gabarito: LETRA C.

Em algumas questões **não precisaremos aplicar diretamente a fórmula acima**. Será necessário um trabalho mais braçal da nossa parte, para chegar à resposta. Muitas vezes a questão pede valores específicos que vão surgir de uma maneira mais fácil **se a gente for completando o diagrama de Venn** com as quantidades.

Por favor, **dê mais olhada naquele "mapa" que mostrei logo no início desse tópico**, destacando as regiões e o seu significado.

> Para contar elementos em um diagrama de Venn, o primeiro passo é sempre inserir a quantidade de elementos que possui a intersecção dos três conjuntos! Depois, partimos para as intersecções duplas e, por fim, analisamos a quantidade de elementos exclusivos de cada conjunto. Vamos ver na prática como fazemos isso?

HORA DE PRATICAR!

(UNICAMP/2024) Num congresso, o número de pessoas que falam inglês é o dobro do número de pessoas que falam espanhol e é o triplo do número de pessoas que falam alemão. Há 3 pessoas que falam inglês e espanhol, 4 pessoas que falam inglês e alemão e 6 pessoas que falam espanhol e alemão. Não há ninguém que fale as três línguas. Há 447 pessoas que falam apenas uma dessas três línguas. Nessas condições, o número de pessoas que falam apenas inglês é igual a:

A) 294

B) 280

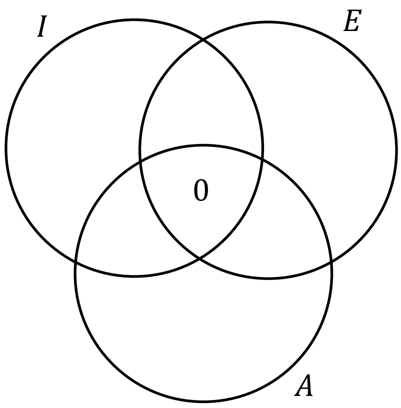
C) 273

D) 260

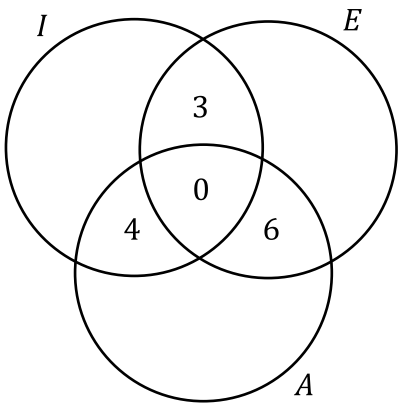
E) 251

Comentários:

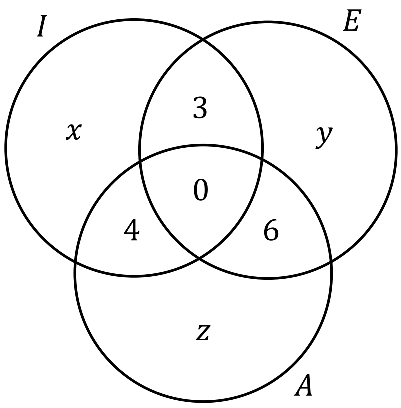
Vamos organizar as informações do enunciado em um diagrama. A primeira coisa que fazemos é colocar a **intersecção entre os três conjuntos**. Sendo assim, note que o enunciado diz que não há ninguém que fale as três línguas. Logo, essa intersecção é zero.



O enunciado também diz as intersecções dois a dois: **Há 3 pessoas que falam inglês e espanhol, 4 pessoas que falam inglês e alemão e 6 pessoas que falam espanhol e alemão**. No diagrama, ficamos:



Sobre as quantidades de pessoas que falam apenas inglês, apenas espanhol ou apenas alemão, o enunciado não fala nada. Por esse motivo, **vamos chamar essas quantidades de "x", "y" e "z",** respectivamente.



Ora, o enunciado afirma **447 pessoas falam apenas uma dessas três línguas**. Logo:

$$x + y + z = 447 \qquad (1)$$

Por sua vez, temos que **o número de pessoas que falam inglês é o dobro do número de pessoas que falam espanhol**. Logo:

$$(x + 3 + 0 + 4) = 2 \cdot (3 + y + 0 + 6)$$

$$x + 7 = 2y + 18$$

$$x = 2y + 11 \qquad (2)$$

Por fim, sabemos também que **o número de pessoas que falam inglês é o triplo do número de pessoas que falam alemão**. Logo:

$$(x + 3 + 0 + 4) = 3 \cdot (z + 0 + 4 + 6)$$

$$x + 7 = 3z + 30$$

$$x = 3z + 23 \qquad (3)$$

Vamos isolar "y" em (2) e "z" em (3):

$$y = \frac{x - 11}{2} \qquad\qquad z = \frac{x - 23}{3}$$

Substituindo em (1):

$$x + \frac{(x - 11)}{2} + \frac{(x - 23)}{3} = 447$$

Multiplicando os dois membros da equação pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores, que é 6, obtemos:

$$6x + 3(x - 11) + 2(x - 23) = 2682$$

Simplificando e colocando em ordem, temos:

- $$11x - 79 = 2682$$

Isolando x, obtemos:

$$x = \frac{(2682 + 79)}{11}$$

$$x = \frac{2761}{11}$$

$$\boxed{x = 251}$$

"x" é exatamente o valor procurado pela questão, pois é a quantidade de pessoas que falam apenas inglês.

Gabarito: LETRA E.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Introdução

Chegou a hora de falarmos sobre conjuntos numéricos! Como o próprio nome sugere, são **grupos exclusivamente formados por números**! Compreender essa parte inicial da matemática é fundamental para que você possa **construir uma base sólida na matéria**. *Vamos nessa?!*

Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$. Basicamente, esse conjunto compreenderá aqueles números que **surgem "naturalmente" da necessidade de contar**. Observe.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

A primeira coisa que você deve notar é que no conjunto dos números naturais **não vamos ter os famosos "números quebrados",** tais como "1,5", "2,81", "101,12"... Também não teremos os números negativos, tais como o "-1", '-105", "-56,15"...

É o conjunto mais simples e **possui uma quantidade <u>infinita</u> de elementos**. Uma notação importante é **o asterisco sobrescrito** ao símbolo do conjunto. **Ele vai indicar que o 0 está sendo excluído da lista**. Essa notação pode ser usada para qualquer conjunto que veremos.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

No estudo dos números naturais, podemos introduzir dois novos conceitos: **o antecessor e o sucessor** de um número. O antecessor de um número natural nada mais é do que **o número que vem antes dele**. Por exemplo, o antecessor do 5 é o 4, o antecessor do 100 é o 99, o antecessor do 12341 é o 12340.

Note que **o número 0 é o único natural que não possui <u>antecessor natural</u>**, pois **-1 pertence ao conjunto dos números inteiros,** como veremos posteriormente.

O **sucessor de um número é o número que vem após ele**. Por exemplo, o sucessor do 5 é o 6 e o sucessor do 80 é o 81. Dessa vez, perceba que **todos os naturais possuem sucessores**.

HORA DE PRATICAR!

(CM ITAPISSUMA/2024) Considere o conjunto dos números naturais em que o 1 não é sucessor de nenhum outro. Nesse sentido, não podemos garantir que

A) O quociente entre números naturais resulte em um número natural

B) O sucessor de a é a + 1

C) Um número b é dito primo quando seus únicos divisores forem 1 e o próprio b

D) O sucessor de a mais o sucessor de b resulta no sucessor do sucessor de a + b

E) Um número natural N qualquer, exceto a unidade, tem como antecessor o número N-1.

Comentários:

Inicialmente, observe que o enunciado fala do conjunto dos números naturais em que **o 1 não é sucessor de nenhum outro**, ou seja, estamos falando de $\mathbb{N}^*$. Com isso em mente, vamos analisar as alternativas.

A) O quociente entre números naturais **pode** resultar em um número natural, mas **nem sempre isso acontece**. Por exemplo, **se dividirmos 5 por 2, obteremos 2,5, que não é um número natural**. A divisão entre números naturais só resulta em um número natural quando o divisor é um fator do dividendo, ou seja, quando a divisão é exata. Sendo assim, **essa é a alternativa procurada!**

B) O sucessor de a é o próximo número natural depois de a, e **podemos obtê-lo somando 1 a a.** Por exemplo, o sucessor de 3 é 4, que é igual a 3 + 1. Portanto, alternativa correta!

C) Um número b é dito primo quando ele tem apenas dois divisores naturais distintos: **1 e o próprio b**. Por exemplo, 2, 3, 5, 7, 11 são números primos, pois só podem ser divididos por 1 e por eles mesmos. Já 4, 6, 8, 9, 10 não são primos, pois **têm mais de dois divisores naturais.** Portanto, alternativa correta!

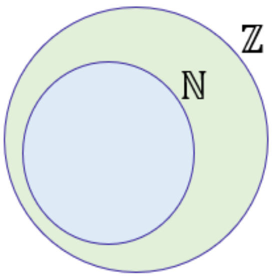
D) Verdadeira. O sucessor de a mais o sucessor de b é o mesmo que (a + 1) + (b + 1), que por sua vez é igual a (a + b) + 2. E **o sucessor do sucessor de a + b é o mesmo que (a + b) + 1 + 1**, que também é igual a (a + b) + 2. Portanto, **as duas expressões são equivalentes**. Portanto, alternativa correta!

E) Um número natural N qualquer, exceto a unidade, tem como antecessor o número natural que vem antes dele na sequência dos naturais, e **podemos obtê-lo subtraindo 1 de N**. Por exemplo, **o antecessor de 4 é 3, que é igual a 4 - 1**. Logo, alternativa correta!

Gabarito: LETRA A.

Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

Para obtermos o conjunto dos números inteiros, basta **pegar os naturais e adicionar os números negativos**!



$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

As primeiras informações que devemos ter em mente sobre o conjunto dos números inteiros é que ele **contém o conjunto dos números naturais**: $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$. Em outras palavras, **o conjunto dos números naturais é um subconjunto dos inteiros**.

Nesse contexto, note que **todos os números naturais são também números inteiros**. Portanto, é correto dizer que $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ **além de números naturais, são números inteiros**. Atenção ao fato de que, **os números negativos são números inteiros, mas não são números naturais**. Podemos utilizar o asterisco sobrescrito caso se queira tirar o 0 do conjunto.

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Nessa altura da aula, **é importante** definirmos duas classes especiais de números: **os números pares e os números ímpares**.

- **Número par**: todo número inteiro que pode ser escrito na forma $\boldsymbol{p = 2n}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- **Número ímpar**: todo número inteiro que pode ser escrito na forma $\boldsymbol{i = 2n + 1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

As definições acima podem parecer um pouco complicadas, normalmente, elas são utilizadas apenas para demonstrar propriedades desses números. Logo, podemos defini-los de uma maneira mais simplificada.

- **Número par:** todo número terminado em $0, 2, 4, 6$ e 8.
- **Número ímpar**: todo número terminado em $1, 3, 5, 7$ e 9.

A forma como conceituamos acima é **uma consequência da definição original**. É muito útil quando precisamos identificar se um número é par ou ímpar!

(AEB/2024) Julgue o item a seguir:

Números inteiros são um conjunto de números que incluem todos os números naturais (0, 1, 2, ...), partindo do zero, os quais são utilizados para contar, ordenar e realizar operações matemáticas básicas.

Comentários:

Pessoal, o item está errado porque **os números inteiros não partem do zero**, mas sim se estendem infinitamente tanto para os números positivos quanto para os negativos. **Os números inteiros incluem todos**

os números naturais (0, 1, 2, ...) e seus opostos negativos (-1, -2, -3, ...). O conjunto dos números inteiros pode ser escrito assim:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Gabarito: ERRADO.

(PREF. S. PARNAÍBA/2023) A soma de dois números inteiros consecutivos resulta em um número:
A) positivo.
B) primo.
C) múltiplo de três.
D) ímpar.

Comentários:
Vamos chamar os dois números inteiros consecutivos de x e x+1. A soma desses números é 2x + 1, que é uma expressão ímpar. Isso acontece porque 2x é um número par, já que é o dobro de um número inteiro, e 1 é um número ímpar.

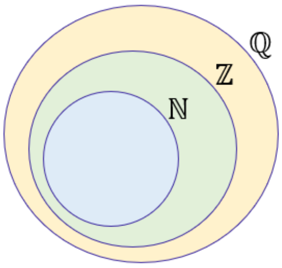
Quando somamos um número par com um número ímpar, o resultado é sempre ímpar. Isso significa que qualquer que seja o valor de x, a soma será ímpar. Por exemplo, se x = 0, a soma é 1; se x = 1, a soma é 3; se x = 2, a soma é 5, e assim por diante.

Logo, **a resposta correta é a letra D**, pois é a única que vale para todos os casos possíveis.

Gabarito: LETRA D.

Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

Chegamos aos conjuntos dos números racionais! **O $\mathbb{Q}$ será formado pelo conjunto dos números inteiros mais os "números quebrados"!** Basicamente, dizemos que um número é racional se ele pode ser representado na **forma de fração**! Perceba, portanto, que o conjunto dos inteiros é um subconjunto dos racionais! $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



Isso significa que números como $1, 2\ ou\ 3$ **além de serem naturais, são inteiros e também são racionais**. Mas vamos explicar melhor nossa definição de número racional, pois existe **mais uma condição que ele deve obedecer para ser considerado um número racional**. Logo, para um número ser racional precisamos que:

1. Ele possa ser representado em uma **forma fracionária de números inteiros**.

$$\frac{1}{1} = 1 \quad ; \quad \frac{3}{2} = 1{,}5 \quad ; \quad \frac{10}{2} = 5 \quad ; \quad \frac{1}{10} = 0{,}1 \quad ; \quad \frac{500}{3} = 166{,}66\ldots$$

Todos os números acima são exemplos de números racionais.

2. Se ele tiver **uma representação decimal infinita**, para ser um racional, **ela também deve periódica**.

$$0{,}333\ldots \quad ; \quad 1{,}67676767\ldots ; \quad 100{,}123123123123\ldots \quad ; \quad 1{,}000100010001\ldots$$

Números com o formato acima são exemplos de números racionais pois, **apesar de possuírem uma representação decimal infinita, ela é periódica**. Esses números são **as famosas dízimas periódicas**! Estudaremos ela **com mais detalhes em um próximo momento**, quando daremos um foco especial no estudo das frações.

De antemão, eu quero que você grave: **dízimas periódicas são números racionais**! Elas podem ser convertidas em frações! Não se preocupe em entender as dízimas periódicas agora. **Dedicaremos um tempo na próxima aula exclusivamente para elas**! Guarde apenas que **são números racionais** e que **podemos transformá-las em frações**!

ESCLARECENDO!

Quando falamos da **representação decimal finita** de um número, estamos nos referindo a um número que possui uma **quantidade finita de algarismos**. Por exemplo, $100{,}003$ é um número com representação decimal finita. Já **o número $1{,}333\ldots$ é um exemplo de número com representação decimal infinita**.

As reticências indicam que há muitos mais números a serem considerados. Nesse caso, esse número é formado por **infinitos "3" após a vírgula**. **Como o número 3 se repete**, dizemos ainda que possui uma representação decimal infinita **e periódica**!

O que acontece se um número possuir uma **representação decimal <u>infinita</u> mas que <u>não</u> é periódica**? Nesses casos, **não poderemos escrever esses números em uma forma fracionária** e eles serão chamados de **<u>números irracionais</u>**!

Aposto que você conhece alguns números irracionais: $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots, \sqrt{3} = 1{,}7320\ldots, \pi = 3{,}1415\ldots$. **<u>Não ache</u>** que todas as raízes são números irracionais. Veja, por exemplo, que $\sqrt{4} = 2$, mas **2 é um número natural**.

(AEB/2024) Julgue o item a seguir:

Os números racionais incluem inteiros (Z), decimais finitos (ex: 743,8432) e decimais infinitos periódicos (ex: 12,050505...), também chamados de dízimas periódicas.

Comentários:
Pessoal, item certo! É basicamente o que falamos acima!

Lembre-se que **os números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma de fração entre dois números inteiros, como a/b, onde a e b são inteiros e $b \neq 0$**.

Os decimais finitos também podem ser escritos como frações, bastando multiplicar o numerador e o denominador por uma potência de 10 adequada. Por exemplo, 0,75 = 75/100 = 3/4.

Os decimais infinitos periódicos são aqueles que **apresentam uma parte decimal que se repete indefinidamente**. Eles também podem ser expressos como frações, usando uma regra específica que será vista posteriormente. Por exemplo, 0,333... = 3/9 = 1/3.

Gabarito: CERTO.

Conjuntos dos Números Irracionais ($\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$)

Normalmente, **representamos o conjunto dos irracionais como $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou simplesmente $\mathbb{I}$**. Lembre-se da operação "Diferença" que já conhecemos! Sendo assim, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ significa **o conjunto formado pelos números reais que não são números racionais**! Mas o que seriam os números irracionais? Os números irracionais são todos os números que não podem ser representados pela fração de dois inteiros! Por exemplo, $\sqrt{2}$ e π são exemplos de números irracionais. Abaixo, vamos conhecer alguns números irracionais famosos!

- Pi (π)

$$\pi \approx 3{,}141592 \ldots$$

- Razão de Ouro (ou Proporção Áurea)

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618033 \ldots$$

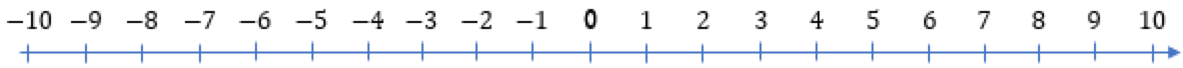
- Número de Euler (e)

$$e \approx 2{,}7182818 \ldots$$

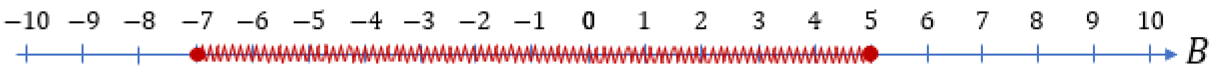
No momento, não vamos nos aprofundar muito em cada um dos números acima, teremos a oportunidade mais a frente! Para hoje, quero apenas que vocês **lembrem que tais números são irracionais**! Por fim, é importante saber que as raízes não exatas são também números irracionais. Por exemplo, temos $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$...

Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$)

Chegamos ao conjunto dos números reais! Esse conjunto **engloba tanto o conjunto dos números racionais quanto os números irracionais!** Um número real é o conjunto de **todos os números que lidamos no nosso dia a dia**... Não importa se ele tem uma representação decimal finita tal como os números $\mathbf{1,5}$ e $\mathbf{10,354}$ ou uma representação decimal infinita como $\mathbf{1,6666}$ ... e $\mathbf{3,1415}$ ... . Além de representar o conjunto dos números reais em um diagrama, também usamos uma reta! **É a chamada reta real**!



Esse tipo de representação vai ser usado principalmente **quando estivermos estudando inequações**! Lá, precisaremos definir um tipo de conjuntos que **chamaremos de intervalo**. Por exemplo, se quero representar um conjunto B formado por todos os números que estão entre -7 e 5, **com eles inclusos**, podemos fazer o seguinte esquema:



(PREF. CANTO DO BURITI/2023) O conjunto dos números reais pode ser dividido em dois grupos, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Em qual das alternativas abaixo encontramos um número irracional?

A) 0,6666...

B) π

C) 1,351351...

D) 13

E) 1,301313...

Comentários:

Um número irracional é um número real que não pode ser escrito como uma fração de dois números inteiros. Ou seja, **um número irracional não tem uma representação decimal exata ou periódica**, **mas sim infinita e não repetitiva**. Podemos analisar as alternativas da seguinte forma:

A) **0,6666... é um número racional**, pois pode ser escrito como uma fração de dois números inteiros: 0,6666... = 2/3.

B) **π é um número irracional**, pois não pode ser expresso como uma fração de dois números inteiros. Além disso, a sua representação decimal é **infinita e não periódica**: π = 3,1415926...

C) **1,351351... é um número racional!** Lembre-se que as dízimas periódicas são números racionais pois podem ser escritas como uma fração de dois números inteiros!

D) **13 é um número racional**, pois pode ser escrito como uma fração de dois números inteiros: 13 = 13/1.

E) 1,301313... assim como as alternativas A e C, temos aqui uma dízima periódicas! **Elas são números racionais!**

Portanto, a única alternativa que contém um número irracional é a letra B.

Gabarito: LETRA B.

Conjunto dos Números Complexos ($\mathbb{C}$)

Aqui já estamos indo um pouquinho além! Vou comentar apenas brevemente, pessoal! É só a título de conhecimento! Os números complexos são estudados em uma aula própria! No entanto, quero que você saiba que eles existem! Eles são números na forma:

$$z = a + bi$$

Em que "a" e "b" são números reais e "i" é a chamada unidade imaginária.

$$i = \sqrt{-1}$$

Calma! Veremos tudo isso com mais detalhes em uma aula específica do curso, caso seu edital tenha previsto. Nesse momento, quero que você guarde **que todo número real é também um número complexo**. Veja que quando "b" é igual a zero, temos:

$$z = a + 0 \cdot i \qquad \rightarrow \qquad z = a$$

Ressalta-se que o inverso não é verdadeiro, ou seja, não é verdade que todo complexo é um real! Por exemplo, $z = 2 + i$ é um número complexo, mas não é um real.

- Um número complexo é um número "z" que possui a forma:

$$z = a + bi \qquad a, b \in \mathbb{R} \;\; e \;\; i = \sqrt{-1}$$

- Todo número real é um número complexo, mas nem todo complexo é um número real.

- O conjunto dos reais está contido no conjunto dos complexos.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Operações envolvendo Conjuntos Numéricos

Nessa parte da aula, falaremos um pouco mais sobre **as operações** dentro dos conjuntos numéricos. O foco não será propriamente em como realizar essas operações, mas sim **em algumas propriedades que estão sempre aparecendo nas provas**.

Vamos responder os seguintes tipos de questionamentos: *a soma de números inteiros será sempre um número inteiro? E a multiplicação de números irracionais será sempre um número irracional? Fique atento e vamos nessa*!

Soma

Para a soma, devemos guardar as seguintes propriedades:

- A soma de números naturais é sempre um número natural;
- A soma de números inteiros é sempre um número inteiro;
- A soma de números racionais é sempre um número racional;
- A soma de números reais é sempre um número real.

Note que deixamos apenas um conjunto de números fora da nossa lista: **os irracionais**. Como já abordamos em uma questão feita no capítulo anterior, **a soma de números irracionais <u>nem sempre</u> será um número irracional**. Para mostrar isso, imagine o seguinte exemplo: considere os números irracionais $5+\sqrt{2}$ e $5-\sqrt{2}$. Vamos somá-los?

$$S = \left(5+\sqrt{2}\right) + \left(5-\sqrt{2}\right)$$

$$S = 5+\sqrt{2}+5-\sqrt{2}$$

$$S = 10$$

Perceba que a soma dos dois número irracionais que escolhemos **resultou em um número racional**. Logo, muito atenção com esse tipo de **generalização acerca dos números irracionais**! Além disso, podemos ainda comentar a soma de números pares e ímpares.

- $\text{PAR} \pm \text{PAR} = \text{PAR}$
- $\text{ÍMPAR} \pm \text{ÍMPAR} = \text{PAR}$
- $\text{ÍMPAR} \pm \text{PAR} = \text{ÍMPAR}$

(UFRGS/2023) Adicionando-se seis números naturais distintos e maiores do que 1, obtém-se a soma S. Sobre o valor de S, considere as afirmações abaixo.

I - Se forem adicionados três números ímpares e três números pares, então o valor de S é par.
II - Se forem adicionados três números ímpares e três números pares, então o valor de S é ímpar.
III - Se forem adicionados cinco números ímpares e um número par, então o valor de S é par.

Quais afirmações são verdadeiras?
A) Apenas I.
B) Apenas II.
C) Apenas III.
D) Apenas I e III.
E) Apenas II e III.

Comentários:
Vamos comentar cada uma das informações. Lembre-se:

$$PAR \pm PAR = PAR$$
$$ÍMPAR \pm ÍMPAR = PAR$$
$$ÍMPAR \pm PAR = ÍMPAR$$

I - Se forem adicionados três números ímpares e três números pares, então o valor de S é par.
A afirmação é falsa. Podemos demonstrar isso usando uma propriedade de que a soma de um número par e um número ímpar é um número ímpar. Por exemplo:

2 + 3 = 5 (par + ímpar = ímpar)
4 + 5 = 9 (par + ímpar = ímpar)

Assim, se somarmos três números ímpares e três números pares, podemos **agrupar os números em três pares de um ímpar e um par**. Cada soma parcial será um número ímpar. Depois, basta somar esses três números ímpares para obter um resultado ímpar. Por exemplo:

$$3 + 5 + 7 + 2 + 4 + 6 =$$
$$(3 + 2) + (5 + 4) + (7 + 6) =$$
$$5 + 9 + 13 =$$
$$27 \text{ (ímpar)}$$

II - Se forem adicionados três números ímpares e três números pares, então o valor de S é ímpar.
Esta afirmação é verdadeira. Como vimos na afirmação anterior, a soma de três números ímpares e três números pares é sempre um número ímpar.

III - Se forem adicionados cinco números ímpares e um número par, então o valor de S é par.
Esta afirmação é falsa. Podemos demonstrar isso usando a propriedade a soma de dois números pares é um número par, e a soma de dois números ímpares também é um número par. Por exemplo:

2 + 4 = 6 (par + par = par)
3 + 5 = 8 (ímpar + ímpar = par)

Assim, se somarmos cinco números ímpares e um número par, podemos agrupar os números em **dois pares de dois ímpares**, e **um par de um ímpar e um par**. Observe que teremos duas somas parciais pares e uma ímpar. Logo, **o resultado será ímpar**. Por exemplo:

$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 2 =$

$(3 + 5) + (7 + 9) + (11 + 2) =$

$8 + 16 + 13 =$

37 (ímpar)

Portanto, das afirmações dadas, **apenas a II é verdadeira**. Logo, a alternativa correta é a letra B.

Gabarito: LETRA B.

Subtração

- A subtração de números inteiros é um outro número inteiro.
- A subtração de números racionais é um outro número racional.
- A subtração de números reais é um outro número real.

Dessa vez, deixamos dois conjuntos de fora: **o conjunto de números naturais e dos irracionais**. Observe que 10 e 100 são dois números naturais, vamos subtraí-los?

$$D = 10 - 100 \quad \rightarrow \quad D = -90$$

A subtração do 10 por 100 resulta em -90. Logo, tivemos **dois números naturais que subtraídos forneceram um número inteiro**. Isso sempre acontecerá quando subtraímos um número maior de um menor. É por esse motivo que **não podemos dizer que a subtração de dois números naturais é um outro número natural**.

Analogamente, para os números irracionais, vamos **escolher dois números para mostrar que essa propriedade não vale para eles**. Por exemplo, considere os seguintes números irracionais: π e $\pi + 2$. Vamos subtraí-los? Note que **o resultado será um número racional.**

$$D = (\pi + 2) - \pi \qquad \rightarrow \qquad D = 2$$

(PREF. ARARANGUÁ/2016) Assinale a alternativa INCORRETA:

A) A diferença entre dois números naturais pode não ser um número natural.

B) O produto entre dois números racionais é sempre um número racional.

C) A soma entre dois números irracionais é sempre um número irracional.

D) $0{,}845$ e $1{,}7454545\ldots$ são números racionais.

E) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ e π são números irracionais.

Comentários:

A) A diferença entre dois números naturais pode não ser um número natural.

Correto. Acabamos de ver na teoria que, em algumas situações, **a subtração de dois números naturais poderá dar um número negativo** (que é um número inteiro).

B) O produto entre dois números racionais é sempre um número racional.

Correto. Se temos dois números racionais, então eles podem ser escritos na forma de uma fração de números inteiros. O **produto dessas frações será uma outra fração** também de números inteiros e, portanto, um número racional.

C) A soma entre dois números irracionais é sempre um número irracional.

Errado. É a alternativa procurada. Vimos também na teoria que a soma entre dois números irracionais nem sempre dará um outro número irracional. **Algumas vezes, poderemos obter um número racional**.

D) $0{,}845$ e $1{,}7454545\ldots$ são números racionais.

Correto. Observe que o número **$0{,}845$ possui uma representação decimal finita**, sendo assim, é facilmente convertido em uma fração de números inteiros, veja:

$$0{,}845 = \frac{845}{1000}$$

Além disso, $1{,}7454545\ldots$ é uma dízima periódica e vimos que **toda dízima periódica é um número racional**.

E) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ e π são números irracionais.

Correto. São exemplos clássicos de números irracionais. Observe eles expandidos:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379\ldots$$

$$\sqrt[3]{4} = 1{,}587401051968199474751705639272308260391493327899853009808285761 8 \ldots$$

$$\pi = 3{,}141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592 3 \ldots$$

Gabarito: Letra C

Multiplicação

- A multiplicação de dois números naturais é sempre um número natural.
- A multiplicação de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
- A multiplicação de dois números racionais é sempre um número racional.
- A multiplicação de dois números reais é sempre um número real.

Mais uma vez, **os números irracionais ficaram de fora** da nossa lista. Para provar porque estão de fora, vamos considerar dois números irracionais:

$$\sqrt{5} = 2.2360679774997896964091736687312 \ldots$$

$$\sqrt{20} = 4.4721359549995793928183473374 6 \ldots$$

Quando multiplicamos os dois: $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$. Note que, **nesse exemplo**, o produto de dois números irracionais **resultou em um número racional**.

(PREF. CAMAÇARI/2024) Acerca das operações entre números irracionais, julgue os itens a seguir, considerando que a e b sejam números irracionais ($\mathbb{I}$) distintos.

I. Se $c = a + b$, então, para todo $a\ e\ b\ \in \mathbb{I}$, c é irracional.
II. Se $c = a \times b$, então, para todo $a\ e\ b \in \mathbb{I}$, c é irracional.
III. Se $c = a^n$, sendo n um número natural ($\mathbb{N}$), então, para todo $a \in \mathbb{I}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, c é irracional.

Assinale a opção correta.
A) Apenas o item I está certo.
B) Apenas o item II está certo.
C) Apenas o item III está certo.
D) Apenas os itens I e II estão certos.

E) Nenhum item está certo.

Comentários:
Pessoal, a melhor maneira de resolver esse tipo de questão é procurar contraexemplos. Vamos lá!

I. Se $c = a + b$, então, para todo a e b $\in \mathbb{I}$, c é irracional.

Errado, pessoal. Considere que $a = \sqrt{2}$ e $b = -\sqrt{2}$. A soma dos dois fica:

$$c = \sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{c = 0}$$

Observe que **somamos dois números irracionais e o resultado foi um número racional**, ao contrário do que afirma o item.

II. Se $c = a \times b$, então, para todo a e $b \in \mathbb{I}$, c é irracional.
Errado também. Podemos usar os mesmos valores para a e b que usamos anteriormente.

$$c = \sqrt{2} \cdot \left(-\sqrt{2}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{c = -2}$$

Observe que **multiplicamos dois números irracionais distintos e o resultado foi um número racional**. Logo, o item erra a afirmar que c seria necessariamente irracional.

III. Se $c = a^n$, sendo n um número natural ($\mathbb{N}$), então, para todo $a \in \mathbb{I}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, c é irracional.
Errado também! Considere $a = \sqrt{2}$ e $n = 2$.

$$c = \left(\sqrt{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{c = 2}$$

Ora, fizemos a potenciação indicada no item e o resultado nos forneceu um **c racional**.
Sendo assim, nenhuma dos itens estão corretos, podemos marcar a alternativa E.

Gabarito: LETRA E.

Divisão

- A divisão de dois números racionais será sempre um racional.
- A divisão de dois números reais será sempre um número real.

Observe que é a nossa menor lista até agora. **Divisão de números naturais não necessariamente fornecerá um outro número natural**, isso vale igualmente **para os números inteiros e irracionais**. Observe.

- Considere **os números naturais $\mathbf{1}$ e $\mathbf{2}$**. Vamos dividi-los?

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ora, **$\mathbf{0,5}$ não é um número natural**, é um número racional.

- Considere **os números inteiros $\mathbf{-5}$ e $\mathbf{2}$**. Vamos dividi-los?

$$-\frac{5}{2} = -2{,}5$$

$\mathbf{-2,5}$ não é um número inteiro, é um número racional.

- Considere **os números irracionais $\mathbf{\sqrt{1000}}$ e $\mathbf{\sqrt{10}}$**. Vamos dividi-los?

$$\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{10}} = \sqrt{100} = 10$$

$\mathbf{10}$ não é um irracional, é um número racional.

Muito cuidado com **as generalizações envolvendo divisões (quocientes).** Esse cuidado maior deve-se ao fato de que **os conjuntos de números naturais e inteiros <u>não abrigam</u> os famosos "números quebrados"** e, quando dividimos um número pelo outro, é muito fácil obter esse tipo número.

(PREF. SANTO ANDRÉ/2023) Sobre o resultado da divisão de dois números irracionais é correto afirmar que é, necessariamente, um número
A) natural.
B) inteiro não natural.
C) racional não inteiro.
D) irracional.
E) real.

Comentários:

Nessa questão, precisamos lembrar que os números irracionais são aqueles que não podem ser escritos na forma de fração, ou seja, têm uma parte decimal infinita e não periódica. Exemplos de números irracionais são $\sqrt{2}$, π e e.

A divisão de dois números irracionais **pode resultar em um número <u>racional</u> ou <u>irracional</u>**, dependendo dos valores envolvidos. Por exemplo, se dividirmos $\sqrt{2}$ por $\sqrt{2}$, obtemos 1, que é um número racional e inteiro. Mas se dividirmos $\sqrt{2}$ por $\sqrt{3}$, obtemos 0,8164965809..., que é um número irracional.

Portanto, a única alternativa que abrange todos os possíveis resultados da divisão de dois números irracionais é a letra E, que afirma que o resultado é, **<u>necessariamente</u>**, um **número real**. Os números reais englobam todos os números racionais e irracionais.

Gabarito: LETRA E.

Questões Comentadas - FGV

Introdução à Teoria dos Conjuntos

1. (FGV/TCE-SP/2023) Considere o conjunto A = {2, 3, 4, 6, 7, 8}. O número de subconjuntos de A com 3 elementos, sendo pelo menos um elemento ímpar, é:

A) 16
B) 15
C) 14
D) 12
E) 8

Comentários:

Podemos resolver mais rapidamente esse exercício por meio de **análise combinatória**. No entanto, vamos por outro caminho para treinarmos o que vimos na teoria. Nesse caminho, vamos escrever os subconjuntos de A que possuem três elementos.

$$\{2,3,4\} \quad \{2,3,6\} \quad \{2,3,7\} \quad \{2,3,8\} \quad \{2\ 4,6\}$$

$$\{2,4,7\} \quad \{2,4,8\} \quad \{2,6,7\} \quad \{2,6,8\} \quad \{2,7,8\}$$

$$\{3,4,6\} \quad \{3,4,7\} \quad \{3,4,8\} \quad \{3,6,7\} \quad \{3,6,8\}$$

$$\{3,7,8\} \quad \{4,6,7\} \quad \{4,6,8\} \quad \{4,7,8\} \quad \{6,7,8\}$$

Observe que temos **20 subconjuntos de A com três elementos**. Agora, vamos marcar aqueles que têm pelo menos um elemento ímpar.

$$\{2,3,4\} \quad \{2,3,6\} \quad \{2,3,7\} \quad \{2,3,8\} \quad \{2\ 4,6\}$$

$$\{2,4,7\} \quad \{2,4,8\} \quad \{2,6,7\} \quad \{2,6,8\} \quad \{2,7,8\}$$

$$\{3,4,6\} \quad \{3,4,7\} \quad \{3,4,8\} \quad \{3,6,7\} \quad \{3,6,8\}$$

$$\{3,7,8\} \quad \{4,6,7\} \quad \{4,6,8\} \quad \{4,7,8\} \quad \{6,7,8\}$$

Pronto! São **16 subconjuntos** com pelo menos 1 elemento ímpar! Podemos marcar a alternativa A.

Gabarito: LETRA A.

2. (FGV/PREF. SALVADOR/2019) Em uma classe de 20 estudantes, 12 são meninas. Além disso, dos 20 estudantes, 15 gostam de Matemática. É correto concluir que

a) nenhuma menina gosta de Matemática.
b) todas as meninas gostam de Matemática.
c) no máximo 7 meninas gostam de Matemática.
d) no mínimo 7 meninas gostam de Matemática.
e) exatamente 7 meninas gostam de Matemática.

Comentários:

Temos 20 estudantes e 12 são meninas. **Consequentemente, 8 serão meninos**. Depois, o enunciado afirma que 15 estudantes gostam de matemática. Vamos fazer uma análise item a item.

a) nenhuma menina gosta de Matemática.
ERRADO. Galera, temos 15 estudantes que gostam de matemática e apenas 8 meninos. Com isso, certamente há meninas que gostam de matemática.

b) todas as meninas gostam de Matemática.
ERRADO. Não conseguimos concluir isso com as informações do enunciado. Veja que temos 15 estudantes de que gostam de matemática e 12 meninas. Logo, poderíamos ter as 12 meninas gostando de matemática mais 3 meninos. Acontece que, **isso não é necessariamente verdade**. Note que não há problema algum serem também 10 meninas e 5 meninos, por exemplo.

c) no máximo 7 meninas gostam de Matemática.
ERRADO. Podemos inclusive ter as 12 meninas gostando de matemática. **Não há essa restrição superior**.

d) no mínimo 7 meninas gostam de Matemática.
CERTO. Imagine que apenas 6 meninas gostem de matemática. Com isso, **precisaríamos de 9 meninos (para fechar os 15 que gostam).** Sabemos, no entanto, que **só temos 8 meninos**. Logo, a quantidade mínima de meninas que gostam de matemática **deve ser 7**. Assim, ficamos na condição limite em que todos os meninos gostam de matemática. Tudo certo?!

e) exatamente 7 meninas gostam de Matemática.
ERRADO. Há um limite mínimo de meninas, mas **não temos informação suficiente** para falar exatamente quantas meninas gostam de matemática.

Gabarito: LETRA D.

3. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Na matemática, as coleções são chamadas de conjuntos. Se uma coleção tem apenas um elemento, ela é dita um conjunto unitário. Um exemplo de conjunto unitário é a coleção formada pelos números que são:

a) ao mesmo tempo, divisores de 4 e 9;
b) divisores de 4;
c) divisores de 9;
d) maiores que 4 e menores que 9;
e) formados pelos algarismos 4 e 9.

Comentários:
Queremos um conjunto que possua apenas um elemento. Vamos analisar cada uma das alternativas.

a) ao mesmo tempo, divisores de 4 e 9;
CERTO. O único número que é divisor, ao mesmo tempo de 4 e 9, **é o número 1**. Portanto, esse conjunto tem apenas um elemento e é considerado unitário.

b) divisores de 4;
ERRADO. São divisores de 4: $D(4) = \{1, 2, 4\}$. Note que **temos 3 elementos**, portanto, não é o conjunto unitário que estamos procurando.

c) divisores de 9;
ERRADO. São divisores de 9: $D(9) = \{1, 3, 9\}$. Note que **temos 3 elementos**, portanto, não é o conjunto unitário que estamos procurando.

d) maiores que 4 e menores que 9;
ERRADO. Se considerarmos apenas **os números inteiros entre 4 e 9**, vamos ter: $\{5, 6, 7, 8\}$. Portanto, está longe de ser o conjunto unitário que estamos procurando.

e) formados pelos algarismos 4 e 9.
ERRADO. Pessoal, **podemos formar infinitos números com os algarismos 4 e 9**. Entre eles, posso citar 49, 94, 449, 494, etc.

Gabarito: LETRA A.

4. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Conjunto é o nome dado, na Matemática, a qualquer coleção. Entretanto, uma coleção pode não ter elementos. Nesse caso, diz-se que esse é um conjunto vazio. Um exemplo de conjunto vazio é a coleção:
a) de meses do ano que começam pela letra J;
b) de dias da semana que começam pela letra T;
c) dos números que são, ao mesmo tempo, pares e ímpares;
d) dos números menores que 10 e maiores que 6;
e) das pessoas brasileiras que são casadas.

Comentários:

Vamos procurar uma coleção que não possua elementos. Devemos analisar alternativa por alternativa.

a) de meses do ano que começam pela letra J;
ERRADO. Temos vários meses que começam pela letra J: **Janeiro, Junho e Julho**.

b) de dias da semana que começam pela letra T;
ERRADO. Terça-feira é um dia da semana que começa pela letra T. Portanto, uma coleção formada por esses dias **não é vazia**.

c) dos números que são, ao mesmo tempo, pares e ímpares;
CERTO. Não existe nenhum número que seja ao mesmo tempo par ou ímpar. **Ou é ímpar, ou é par**. Portanto, um conjunto formado por esses números seria vazio.

d) dos números menores que 10 e maiores que 6;
ERRADO. Considerando apenas o conjunto dos inteiros, os números que são menores que 10 e maiores que 6 são: **7, 8 e 9**. Portanto, **não é um conjunto vazio**.

e) das pessoas brasileiras que são casadas.
ERRADO. Muitos brasileiros são casados. Portanto, **não seria um conjunto vazio**.

Gabarito: LETRA C.

5. (FGV/CODEBA/2010) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 2, 4\}$ dois conjuntos. Com relação aos conjuntos A e B, analise as afirmativas a seguir:

I. $B \subset A$
II. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
III. $A \cap B = \{0, 2\}$

Está(ão) correta(s) somente
a) I.
b) II.
c) III.
d) I e II.
e) II e III.

Comentários:
Devemos analisar cada afirmativa.

I. $B \subset A$

ERRADO. Para que B estivesse contido em A, **todos os seus elementos também devem ser elementos de A**. Note que **B possui o elemento 4, enquanto A não possui**. Logo, B **não** pode estar contido em A.

II. $A \cup B \ = \ \{0,1,2,3,4\}$
CERTO. A união dos dois conjuntos é a **reunião de seus elementos**. Assim, quando juntamos "todo mundo", realmente ficamos com $A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$.

III. $A \ \cap \ B \ = \ \{0,2\}$
CERTO. A intersecção é formada pelos **elementos em comum dos dois conjuntos**. Perceba que o 0 e o 2 são os elementos que estão nos dois conjuntos, ao mesmo tempo. Portanto, é correto dizer que $A \cap B = \ \{0,2\}$.

Gabarito: LETRA E.

6. (FGV/BADESC/2010) Dado um conjunto A, chamamos subconjunto próprio não vazio de A a qualquer conjunto que pode ser formado com parte dos elementos do conjunto A, desde que:

- algum elemento de A seja escolhido;
- não sejam escolhidos todos os elementos de A.

Sabemos que a quantidade de subconjuntos próprios não vazios de A é 14. A quantidade de elementos de A é igual a:
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

Comentários:
Estudamos que o número de subconjuntos é dado por uma relação bem conhecida:

$$Número\ de\ Subconjuntos\ de\ B = 2^n$$

Aqui, n representa a quantidade de elementos de A. Por exemplo! Considere que $\boldsymbol{B = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$**.** Nessa situação, **o conjunto A tem 5 elementos**, portanto, o número de subconjuntos seria:

$$Número\ de\ Subconjuntos\ de\ B = 2^n$$
$$Número\ de\ Subconjuntos\ de\ B = 2^5$$
$$Número\ de\ Subconjuntos\ de\ B = 32$$

Logo, A tem 32 subconjuntos. Agora, vamos entender a questão em si. O enunciado fala de subconjunto próprio. Esse subconjunto obedece duas propriedades.

- algum elemento de A seja escolhido;
Em outras palavras, o enunciado está dizendo que para ser um subconjunto próprio, o subconjunto não pode estar vazio, é preciso ter pelo menos um elemento.

- não sejam escolhidos todos os elementos de A.
Em outras palavras, o enunciado está dizendo que para ser um subconjunto próprio, o subconjunto não pode coincidir com o A.

Logo, se temos 14 subconjuntos próprios **devemos somar mais 2 subconjuntos, para obter a quantidade total, calculada pela fórmula**. Se A tem 14 subconjuntos próprios, então ele tem $14 + 2 =$ **16 subconjuntos ao total**. Assim,

$$Número\ de\ Subconjuntos\ de\ A = 2^n$$
$$16 = 2^n$$
$$n = 4.$$

Assim, A tem 4 elementos.

Gabarito: LETRA A.

7. (FGV/ALESP/2002) São dados os conjuntos: D = divisores de 24 (divisores positivos), M = múltiplos de 3 (múltiplos positivos), S = D ∩ M e n = números de subconjuntos de S. Portanto, n é igual a:
a) 64
b) 16
c) 32
d) 8

Comentários:
Vamos listar os divisores de 24:

$$D(24) = \{1, 2, \mathbf{3}, 4, \mathbf{6}, 8, \mathbf{12}, \mathbf{24}\}$$

Agora, vamos começar a listar os múltiplos positivos de 3.

$$M(3) = \{\mathbf{3}, \mathbf{6}, 9, \mathbf{12}, 15, 18, 21, \mathbf{24}, 27, 30, \dots\}$$

Note que já deixei marcado os **elementos em comum aos dois conjuntos**. Assim,

$$S = D \cap M = \{3, 6, 12, 24\}$$

Portanto, S tem 4 elementos. Na teoria, vimos que **o número de subconjuntos** de um conjunto é dado por:

$$\textit{Número de subconjuntos de } S = 2^{n(S)}$$
$$\textit{Número de subconjuntos de } S = 2^{4}$$
$$\textit{Número de subconjuntos de } S = 16$$

Gabarito: LETRA B.

QUESTÕES COMENTADAS - FGV

Operações com Conjuntos

1. (FGV/CM-SP/2024) Sabe-se que os conjuntos $A = \{1, 3, 5, x, 8\}$ e $B = \{2, 3, y, 7, 8\}$ têm, cada um, 5 elementos. Sabe-se, também, que a interseção de A e B tem 4 elementos. A soma dos elementos da união de A e B é

A) 26.

B) 27.

C) 28.

D) 29.

E) 30.

Comentários:

O enunciado informa que **a intersecção entre A e B tem 4 elementos**.

$$A = \{1, 3, 5, x, 8\}$$

$$B = \{2, 3, y, 7, 8\}$$

Perceba que, de imediato, conseguimos identificar **dois elementos em comum**.

O que podemos concluir?

x só pode ser 2 ou 7.

y só pode ser 1 ou 5.

Apenas dessa forma teremos os **4 elementos da intersecção**, concordam?
O enunciado pede a soma dos elementos da união entre A e B.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, x, y\}$$

Agora vem o "pulo do gato"!

"x" e "y" fazem parte da intersecção. **Não precisamos repetir esses valores no conjunto união**! Sendo assim:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$$

A soma dos elementos fica:

$$1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 8 = 26$$

Gabarito: LETRA A.

2. (FGV/BANESTES/2023) Sejam A e B dois conjuntos finitos tais que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $\{1, 2, 5\}$ é o conjunto de elementos que estão em A e não estão em B. O conjunto dos elementos que não estão em A ou estão em B é

A) {3, 4}.

B) {3, 6}.

C) {3, 4, 6}.

D) {4, 6, 7}.

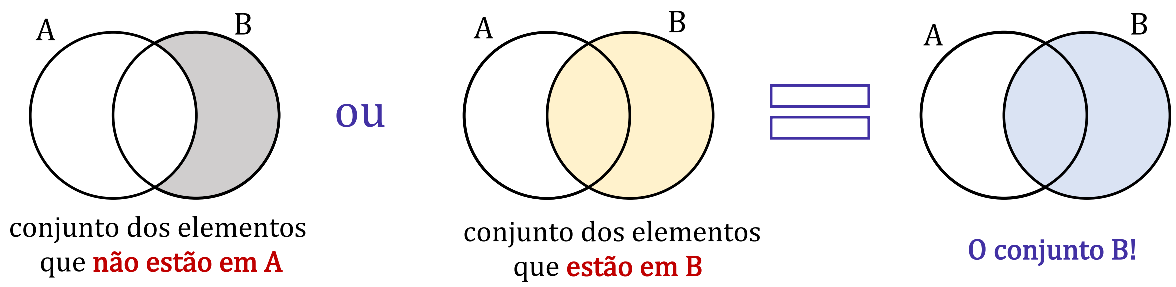
E) {3, 4, 6, 7}.

Comentários:

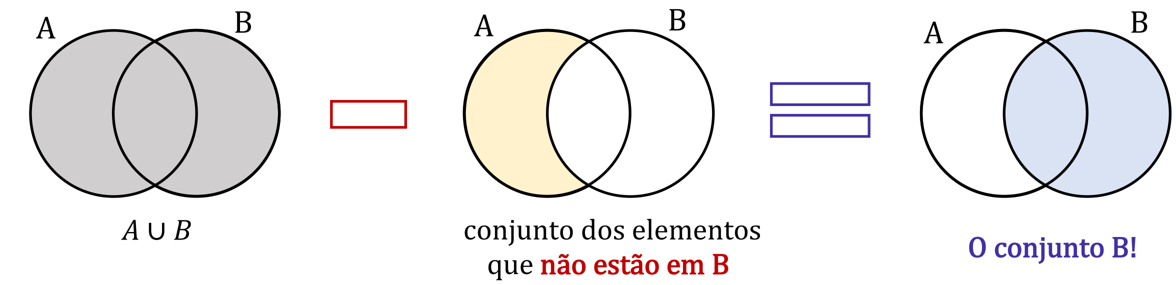
De acordo com o enunciado, temos que:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad A - B = \{1, 2, 5\}$$

A questão pede **o conjunto dos elementos que não estão em A** <u>ou</u> **estão em B**. Como estamos falando da união de um **subconjunto de B** com **o próprio B**, **o conjunto pedido é o próprio B**. Vamos esquematizar.



Observe que para encontrar o B, podemos fazer:



Sendo assim, para encontrar B, basta retirarmos da união aqueles elementos que estão apenas em A!

$$A \cup B = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3, 4, \mathbf{5}, 6, 7\}$$

$$A - B = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{5}\}$$

Isso resulta em:

$$\boxed{\boldsymbol{B = \{3, 4, 6, 7\}}}$$

Gabarito: LETRA E.

3. (FGV/SSP-AM/2022) Sobre dois conjuntos A e B sabe-se que:

- A união de A e B tem 130 elementos.
- A diferença B – A tem 50 elementos.
- A diferença A – B tem 60 elementos.

Sendo x o número de elementos de A e y o número de elementos de B, o valor de x + y é igual a

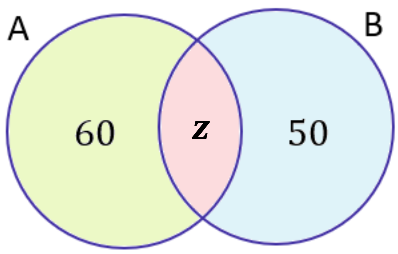
A) 110.
B) 120.
C) 130.
D) 140.
E) 150.

Comentários:

Primeiramente, vamos relembrar o que significa os conjuntos diferenças apontados no enunciado.

1) $B - A$ é o conjunto formado por **todos os elementos de B que não são elementos de A**.
2) Analogamente, $A - B$ é o conjunto formado por **todos os elementos de A que não são elementos de B**.

Agora, visualize esses conjuntos para melhor compreensão.



O conjunto $A - B$ está representado pela região verde. Note que é **tudo de $\boldsymbol{A}$ menos a parte vermelha**. Essa parte vermelha **representa os elementos de A que também são elementos de $\boldsymbol{B}$**, ou seja, a intersecção dos dois conjuntos. Por sua vez, a região azul representa o conjunto $B - A$.

Observe que já colocamos as quantidades de cada desses conjuntos. Como não sabemos quantos elementos pertencem a A e a B **simultaneamente**, então vamos chamar essa quantidade de "z". O enunciado nos diz que a união desses dois conjuntos possui **130 elementos**. Na prática, isso significa que se **somamos todas as regiões** destacadas no diagrama de Venn acima, então **devemos** obter esses 130 elementos.

$$60 + z + 50 = 130 \quad \rightarrow \quad z = 130 - 110 \quad \rightarrow \quad \boxed{z = 20}$$

Pronto, temos "z". Com ele, podemos determinar quantos elementos possui cada um dos conjuntos.

$$n(A) = 60 + z \quad \rightarrow \quad n(A) = 60 + 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{n(A) = 80}$$

$$n(B) = 50 + z \quad \rightarrow \quad n(B) = 50 + 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{n(B) = 70}$$

Gabarito: LETRA E.

4. (FGV/SEFAZ-MS/2006) Os conjuntos A, B e C satisfazem $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$:

a) nunca.

b) se e somente se A = B = C.

c) se e somente se B = C.

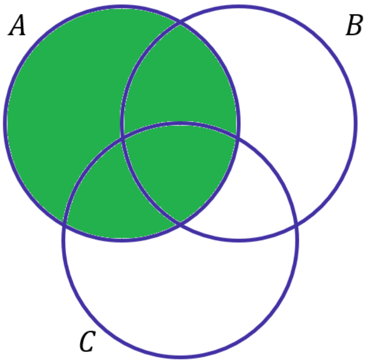
d) se e somente se B ∩ C = ∅.

e) sempre.

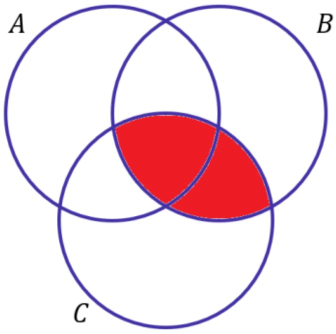
Comentários:

Na minha opinião, o melhor jeito de resolver essas questões é desenhando o diagrama. Vamos primeiros identificar o que significa cada lado da equação:

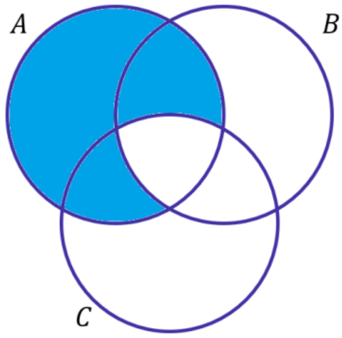
- $A - (B \cap C)$: Elementos de A que não são elementos da intersecção de B com C.



Conjunto A

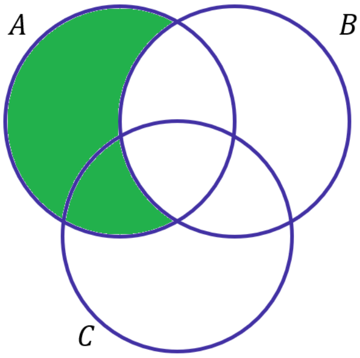


Conjunto $B \cap C$

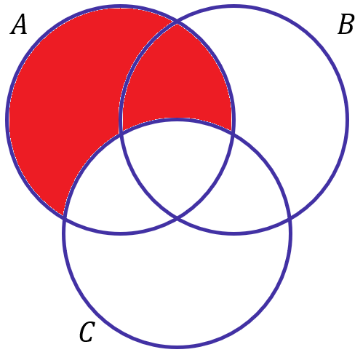


Conjunto $A - (B \cap C)$

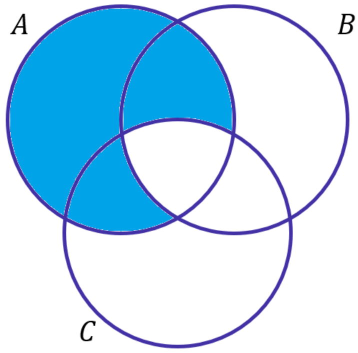
- $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})$: Elementos de A que não são elementos de B ou Elementos de A que não elementos de C.



Conjunto $A-B$



Conjunto $A-C$



Conjunto $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})$

Quando desenhamos as duas regiões, percebemos que elas são iguais. Logo, a igualdade é sempre verdade.

Gabarito: LETRA E.

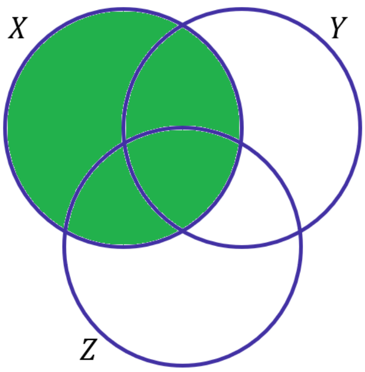
5. (FGV/SEFAZ-MS/2006) Se X, Y e Z são conjuntos, $\boldsymbol{X} \cap (\boldsymbol{Y} \cup \boldsymbol{Z}) = (\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y}) \cup \boldsymbol{Z}$:

a) nunca.
b) se e somente se X = Y = Z.
c) se e somente se $Z \subset X$
d) se e somente se $Z \subset Y$
e) sempre.

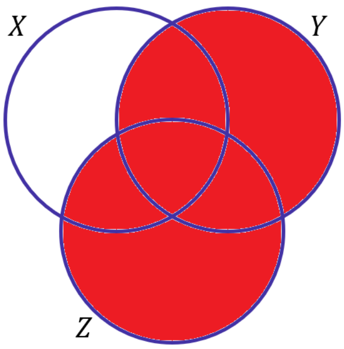
Comentários:

Novamente, vamos recorrer aos diagramas. No entanto, primeiro devemos entender o que cada uma das regiões expressa.

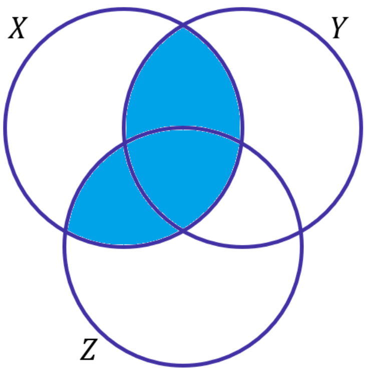
- $\boldsymbol{X} \cap (\boldsymbol{Y} \cup \boldsymbol{Z})$: Elementos que X tem em comum com a união de Y e Z.



Conjunto X

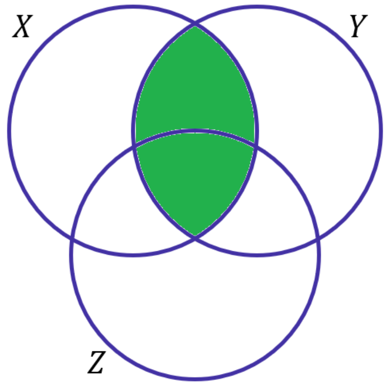


Conjunto $Y \cup Z$

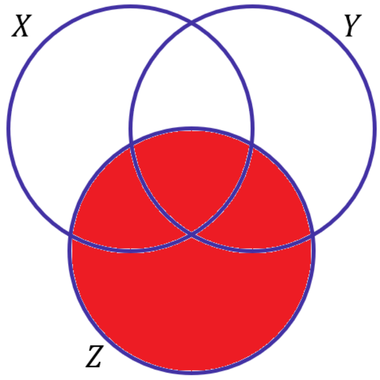


Conjunto $\boldsymbol{X} \cap (\boldsymbol{Y} \cup \boldsymbol{Z})$

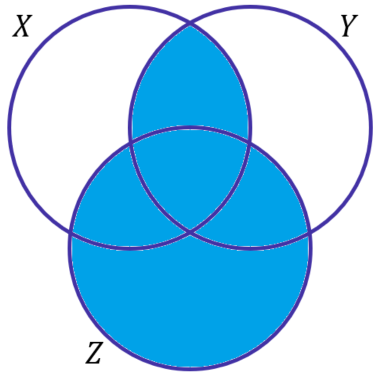
- $(\boldsymbol{X \cap Y}) \cup \boldsymbol{Z}$**:** Elementos de $X \cap Y$ reunidos com os elementos de Z.



Conjunto $X \cap Y$

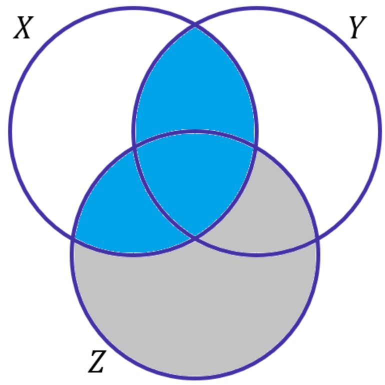


Conjunto Z



Conjunto $(\boldsymbol{X \cap Y}) \cup \boldsymbol{Z}$

Dessa vez, as regiões que desenhamos não ficaram iguais. Mas, o que devemos fazer para que elas fiquem? Ora devemos retirar toda a região diferente:



Nessa situação, percebemos que **não pode haver elementos de Z que não sejam elementos de X**. O que implica que Z deve ser um subconjunto de X.

Gabarito: LETRA C.

QUESTÕES COMENTADAS - FGV

Princípio da Inclusão-Exclusão

1. (FGV/GCM-SJC/2024) Em um grupo de 50 guardas, 35 estão de bermuda e 27 estão de boné. Sabe-se também que, nesse grupo, todos estão usando bermuda ou boné. O número de guardas, nesse grupo, que estão usando bermuda e boné é

A) 35.
B) 27.
C) 23.
D) 15.
E) 12.

Comentários:

Para responder essa questão, precisamos usar o **Princípio da Inclusão-Exclusão**.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Seja "A" o conjunto de guardas que estão de bermuda e "B" o conjunto de guardas que estão de boné.

De acordo com o enunciado, podemos tirar que:

$$n(A \cup B) = 50 \qquad n(A) = 35 \qquad n(B) = 27$$

Usando essas informações, temos:

$$50 = 35 + 27 - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = 62 - 50$$

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cap B) = 12}}$$

Gabarito: LETRA E.

2. (FGV/ALESC/2024) Em uma prateleira há 15 latas iguais e vazias. Em algumas delas são colocadas bolinhas pretas e bolinhas brancas. Sabe-se que 7 latas contêm bolinhas pretas, 5 latas contêm bolinhas brancas e 3 latas contém bolinhas pretas e bolinhas brancas. O número de latas que ficaram vazias é igual a

A) 3.

B) 4.
C) 5.
D) 6.
E) 7.

Comentários:
Para resolver a questão, podemos usar o princípio da inclusão-exclusão, que afirma que, se temos dois conjuntos A e B, então:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Onde $n(A)$ representa o número de elementos de A.

Neste caso, podemos considerar os conjuntos P (**latas com bolinhas pretas**) e B (**latas com bolinhas brancas**).

De acordo com o enunciado, tem-se que:

$$n(P) = 7 \qquad n(B) = 5 \qquad n(P \cap B) = 3$$

Então, podemos aplicar o **princípio da inclusão-exclusão**:

$$n(P \cup B) = n(P) + n(B) - n(P \cap B)$$

$$n(P \cup B) = 7 + 5 - 3$$

$$n(P \cup B) = 9$$

Pronto! Isso significa que temos um total de **9 latas com bolinhas**, sejam elas pretas ou brancas.

Como na **prateleira temos 15 latas**, o total de latas vazias é:

$$V = 15 - 9 \quad \rightarrow \quad \boxed{V = 6}$$

Portanto, o número de latas que ficaram vazias é igual a 6.

Gabarito: LETRA D

3. (FGV/CM-FORTALEZA/2024) Uma turma é composta por 40 alunos, dos quais:

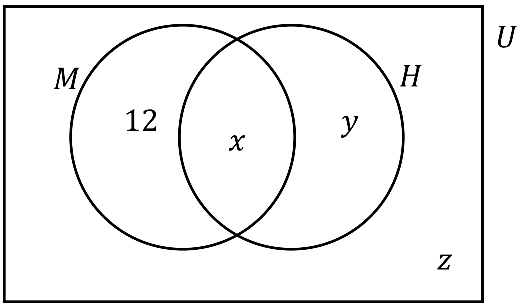
- 12 gostam de Matemática, mas não de História;
- 19 não gostam de Matemática.

A quantidade de alunos dessa turma que gostam, simultaneamente, de Matemática e de História é

A) 6.
B) 7.
C) 8.
D) 9.
E) 10.

Comentários:

Para resolver esta questão, podemos usar o **diagrama de Venn** para representar os conjuntos de alunos que gostam de Matemática e História. Observe a figura abaixo:



No diagrama, M é o conjunto dos alunos que gostam de Matemática, H é o conjunto dos alunos que gostam de História e U é o conjunto universo, que corresponde à turma inteira. Podemos obter as seguintes informações a partir do enunciado:

- Como **o total de alunos é 40**, podemos escrever:

$$12 + x + y + z = 40 \qquad (1)$$

- Como **19 não gostam de matemática**:

$$y + z = 19 \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$12 + x + 19 = 40$$

$$x + 31 = 40$$

$$\boxed{x = 9}$$

Ora, "x" é exatamente a quantidade de alunos que gostam, **simultaneamente**, das duas matérias.

Gabarito: LETRA D.

4. (FGV/ALEP-PR/2024) Uma escola de ensino médio oferece a seus estudantes cursos extras de francês, italiano e alemão. Os estudantes podem frequentar um ou mais desses cursos. Uma turma dessa escola tem 50 alunos no total. Todos os estudantes dessa turma frequentam pelo menos um dos três cursos extras de idiomas oferecidos pela escola, sendo que 30 frequentam o curso de francês, 20 frequentam italiano e 10 frequentam alemão. Sabe-se ainda que 10 frequentam simultaneamente francês e italiano, 8 frequentam simultaneamente francês e alemão e 6 frequentam simultaneamente italiano e alemão. Assinale a opção que indica o número de alunos da turma frequentam simultaneamente os três cursos de idiomas oferecidos pela escola.

A) 6

B) 10

C) 14

D) 34

E) 86

Comentários:

Para resolver esse problema, podemos usar o **princípio de inclusão e exclusão**, que diz que:

$$n(F \cup I \cup A) = n(F) + n(I) + n(A) - n(F \cap I) - n(F \cap A) - n(I \cap A) + n(F \cap I \cap A)$$

Nesse caso, F, I e A são os conjuntos dos alunos que frequentam **francês, italiano e alemão**, respectivamente.

De acordo com as informações do enunciado, temos:

- Uma turma dessa escola tem 50 alunos no total:

$$n(F \cup I \cup A) = 50$$

- 30 frequentam o curso de francês, 20 frequentam italiano e 10 frequentam alemão.

$$n(F) = 30$$

$$n(I) = 20$$

$$n(A) = 10$$

- 10 frequentam simultaneamente francês e italiano, 8 frequentam simultaneamente francês e alemão e 6 frequentam simultaneamente italiano e alemão.

$$n(F \cap I) = 10$$
$$n(F \cap A) = 8$$
$$n(I \cap A) = 6$$

Substituindo os valores dados, temos:

$$50 = 30 + 20 + 10 - 10 - 8 - 6 + n(F \cap I \cap A)$$

Simplificando, obtemos:

$$\boxed{\boldsymbol{n(F \cap I \cap A) \ = \ 14}}$$

Portanto, existem **14 alunos** que frequentam simultaneamente os três cursos de idiomas.

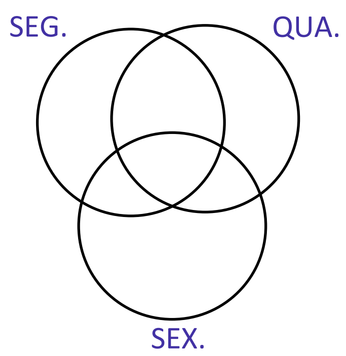
Gabarito: LETRA C.

5. (FGV/CÂMARA DOS DEPUTADOS/2023) Dra. Míriam é a responsável pelo atendimento psicológico de 97 estudantes de uma escola, às segundas, quartas e sextas. Há 21 estudantes que só procuram a Dra. Míriam na segunda-feira, 20 que só comparecem às quartas e 17 que só vão às sextas. Dra. Míriam atende 48 estudantes às segundas, 53 às quartas e 43 às sextas. O número de estudantes que são atendidos três vezes por semana é igual a

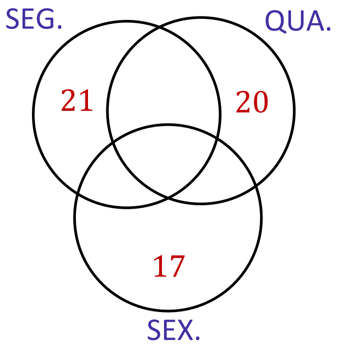
A) 7.
B) 8.
C) 9.
D) 10.
E) 11.

Comentários:

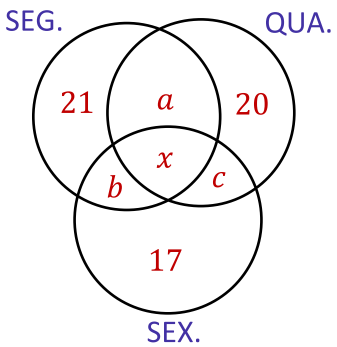
Organizaremos as informações da questão em um diagrama de Venn.



Como há **21 estudantes** que só procuram a Dra. Míriam na **segunda-feira**, **20** que só comparecem às **quartas** e **17** que só vão às **sextas**, podemos escrever:



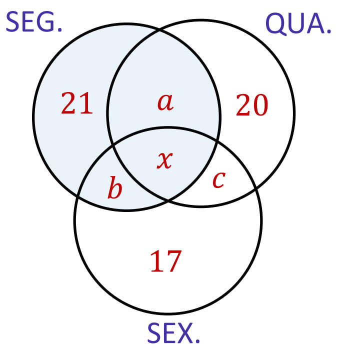
Como nenhuma informação foi dada sobre as intersecções, vamos colocar incógnitas.



Queremos determinar o "x", pois ele retrata justamente a quantidade de estudantes que são atendidos três vezes na semana. Agora, com o diagrama pré-esquematizado, vamos para as próximas informações dadas pelo enunciado:

- Dra. Míriam atende 48 estudantes às segundas.

Nesse caso, somamos todas as quantidades dentro de "SEG" e igualamos a 48.



$$21 + a + b + x = 48 \qquad \rightarrow \qquad a + b + x = 27 \qquad (1)$$

Vamos repetir esse raciocínio sabendo que a Dra. Mirian atende **53 às quartas e 43 às sextas:**

$$20 + a + c + x = 53 \qquad \rightarrow \qquad a + c + x = 33 \qquad (2)$$

$$17 + b + c + x = 43 \qquad \rightarrow \qquad b + c + x = 26 \qquad (3)$$

Por fim, o enunciado ainda fala que **a quantidade de alunos atendidos é 97**. Dessa forma, a soma de todas as quantidades no diagrama deve resultar nesse número.

$$21 + a + b + x + 21 + c + 17 = 97 \qquad \rightarrow \qquad x + (a + b + c) = 39 \qquad (4)$$

Observe que temos **4 equações e 4 incógnitas**.

Para resolver esse sistema, vamos somar as equações (1), (2) e (3).

$$(a + b + x) + (a + c + x) + (b + c + x) = 27 + 33 + 26$$

$$2(a + b + c) + 3x = 86 \qquad (5)$$

Da equação (4), podemos tirar que:

$$(a + b + c) = 39 - x$$

Vamos substituir esse resultado em (5):

$$2(39 - x) + 3x = 86$$

$$78 - 2x + 3x = 86$$

$$x = 86 - 78$$

$$\boxed{x = 8}$$

Logo, temos **oito estudantes que são atendidos 3 vezes na semana**.

Gabarito: LETRA B.

6. (FGV/PM-SP/2023) Em um conjunto de 20 objetos, 12 têm a característica A e 9 têm a característica B. Apenas 3 dos objetos não possuem nem a característica A, nem a característica B. Assim, a quantidade de objetos desse conjunto que possuem simultaneamente as características A e B é igual a

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

Comentários:

Se **12 objetos têm a característica A**, podemos escrever:

$$n(A) = 12$$

Se **9 objetos têm a característica B**, então:

$$n(B) = 9$$

Nesse conjunto de 20 objetos, **3 não possuem nenhuma dessas duas características**. Sendo assim:

$$n(A \cup B) = 20 - 3 \qquad \rightarrow \qquad n(A \cup B) = 17$$

Pronto. Agora, para determinar quantos objetos **possuem as duas características simultaneamente**, vamos usar o **princípio da inclusão-exclusão**:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Substituindo o que temos:

$$17 = 12 + 9 - n(A \cap B)$$

$$\boxed{n(A \cap B) = 4}$$

Gabarito: LETRA D.

7. (FGV/MPE-SP/2023) Em um grupo de 55 pessoas, 32 jogam pôquer, 36 jogam truco, 34 jogam buraco, 18 jogam pôquer e truco, 21 jogam truco e buraco e 20 jogam buraco e pôquer. Se há, no grupo, uma única pessoa que não joga quaisquer desses três jogos de cartas, então a quantidade de pessoas que jogam esses três jogos é

A) 12.

B) 11.

C) 9.
D) 7.
E) 6.

Comentários:
Mais uma questão para usarmos o Princípio da Inclusão-Exclusão! Dessa vez, usaremos três conjuntos. Antes de qualquer coisa, vamos **organizar as informações** do enunciado.

32 pessoas jogam pôquer: $n(P) = 32$

36 pessoas jogam truco: $n(T) = 36$

34 pessoas jogam buraco: $n(B) = 34$

18 pessoas jogam pôquer e truco: $n(P \cap T) = 18$

21 pessoas jogam truco e buraco: $n(T \cap B) = 21$

20 pessoas jogam buraco e pôquer: $n(B \cap P) = 20$

Como do grupo de 55 pessoas **apenas uma não joga nenhum dos jogos**, podemos escrever:

$$n(P \cup T \cup B) = 55 - 1 \qquad \rightarrow \qquad n(P \cup T \cup B) = 54$$

Agora, podemos **usar o PIE** para determinar quantos jogam os três jogos.

$$n(P \cup T \cup B) = n(P) + n(T) + n(B) - n(P \cap T) - n(T \cap B) - n(B \cap P) + n(P \cap T \cap B)$$

Substituindo o que temos:

$$54 = 32 + 36 + 34 - 18 - 21 - 20 + n(P \cap T \cap B)$$

$$54 = 43 + n(P \cap T \cap B)$$

$$\boxed{n(P \cap T \cap B) = 11}$$

Gabarito: LETRA B.

8. (FGV/SEFAZ-MG/2023) Sobre 3 conjuntos A, B e C, sabe-se que:

A tem 16 elementos;
B tem 24 elementos;
C tem 18 elementos;

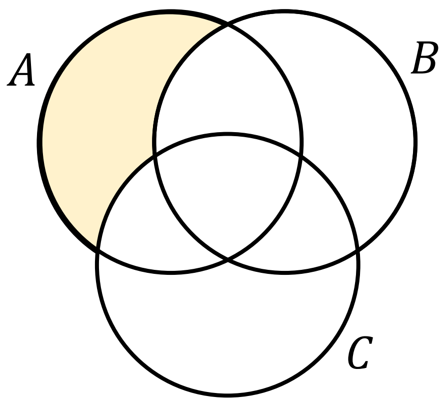
$A \cap B$ tem 5 elementos;
$B \cap C$ tem 7 elementos;
$A \cap B \cap C$ tem 3 elementos;
$A - (B \cup C)$ tem 8 elementos.

O número de elementos do conjunto $A \cup B \cup C$ é igual a
a) 35.
b) 43.
c) 47.
d) 48.
e) 58.

Comentários:
Questão bem legal sobre conjuntos que nos remete ao **Princípio da Inclusão-Exclusão**.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Perceba que **a única informação que não temos é $n(A \cap C)$**. Todas as outras informações o enunciado deu! Ademais, o enunciado nos forneceu $n\big(A - (B \cup C)\big)$. Certamente será com esse valor que encontraremos o que nos falta. Para entender como isso vai nos ajudar, vamos desenhar o conjunto $A - (B \cup C)$.



Note que o conjunto $A - (B \cup C)$ é formado por **todos os elementos de A que não são elementos da união de B com C**. É exatamente a região destacada **em amarelo** na figura acima. Logo, perceba que:

$$n\big(A - (B \cup C)\big) = n(A) - n(A \cap C) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C)$$

Muito cuidado na hora de escrever a expressão acima. Muitos alunos podem achar que:

$$n\big(A - (B \cup C)\big) = n(A) - n(B \cup C)$$

Mas está errado! A expressão correta é:

$$\boxed{n\big(A-(B\cup C)\big)=n(A)-n(A\cap C)-n(A\cap B)+n(A\cap B\cap C)}$$

Nós devemos retirar de A apenas o que ele tem em comum com B e C.

Professor, qual motivo de somar o $n(A\cap B\cap C)$?

Pessoal, devemos somar o $n(A\cap B\cap C)$ pois caso exista um elemento que seja comum aos três conjuntos, quando fazemos "$-n(A\cap C)-n(A\cap B)$" **retiramos ele duas vezes**! Sendo assim, devemos "devolver" esses elementos retirados mais de uma vez. Fazemos isso somando o $n(A\cap B\cap C)$. Esclarecido esses pontos, observe que a expressão contém exatamente o que estamos procurando.

$$n\big(A-(B\cup C)\big)=n(A)-\boldsymbol{n(A\cap C)}-n(A\cap B)+n(A\cap B\cap C)$$

Ademais, temos todos os outros valores. Vamos substituí-los na expressão.

$$8=16-n(A\cap C)-5+3$$

$$n(A\cap C)=14-8$$

$$n(A\cap C)=6$$

Pronto! Agora sim temos tudo que precisamos para usar o **Princípio da Inclusão-Exclusão**.

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$
$$n(A\cup B\cup C)=16+24+18-5-7-6+3$$
$$n(A\cup B\cup C)=61-18$$
$$\boxed{\boldsymbol{n(A\cup B\cup C)=43}}$$

Gabarito: Letra B

9. (FGV/SENADO FEDERAL/2022) Um clube tem 180 associados que participam de suas duas atividades sociais. Há 130 frequentadores da cinemateca, enquanto 92 sócios participam das aulas de dança de salão. Sendo assim, é correto afirmar que

a) mais de 40 sócios participam das duas atividades.
b) menos de 30 sócios participam das duas atividades.
c) mais de 55 sócios só vão às aulas de dança.
d) menos de 80 sócios só vão à cinemateca.
e) menos de 45 sócios só vão às aulas de dança.

Comentários:

Para responder essa questão, vamos usar o Princípio da Inclusão-Exclusão. Seja "C" o conjunto formado por aqueles que frequentam a cinemateca e "D" o conjunto formado por aqueles que participam da dança de salão. Como **180 associados participam de alguma dessas duas atividades**, podemos escrever:

$$n(C \cup D) = 180$$

Por sua vez, como **130 frequentam a cinemateca**:

$$n(C) = 130$$

Sabemos ainda que **92 frequentam a dança de salão**:

$$n(D) = 92$$

Do **Princípio da Inclusão-Exclusão**, podemos escrever que:

$$n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$$

Substituindo o que temos:

$$180 = 130 + 92 - n(C \cap D)$$
$$n(C \cap D) = 222 - 180$$
$$n(C \cap D) = 42$$

Logo, podemos concluir que **42 sócios participam das duas atividades**. A alternativa que está de acordo com o nosso resultado é a A.

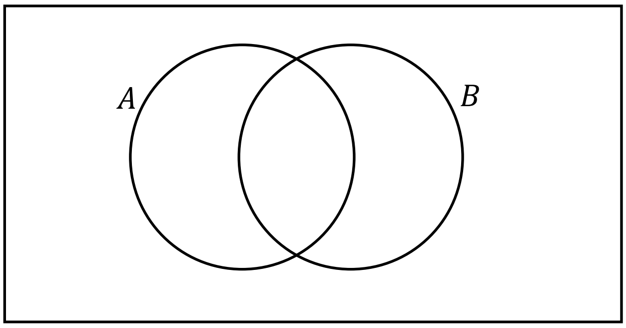
Gabarito: LETRA A.

10. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Em uma assembleia com 172 votantes, duas propostas independentes, A e B, foram colocadas em votação. Cada votante votou a favor ou contra cada uma das duas propostas. Sabe-se que 138 votaram a favor da proposta A, 74 votaram a favor da proposta B e 32 votaram contra as duas propostas. O número de votantes que votaram a favor da proposta A e contra a proposta B é

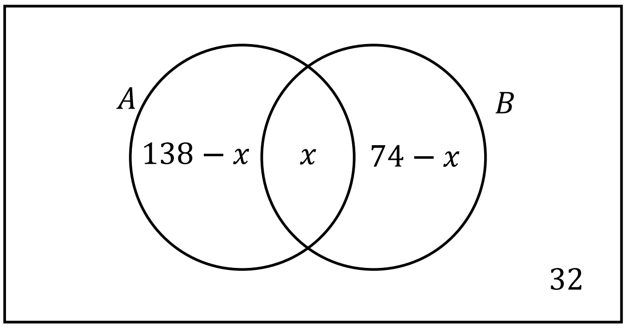
a) 66.
b) 69.
c) 72.
d) 74.
e) 140.

Comentários:

Vamos resolver essa questão usando **Diagramas de Venn**. Como temos duas propostas:



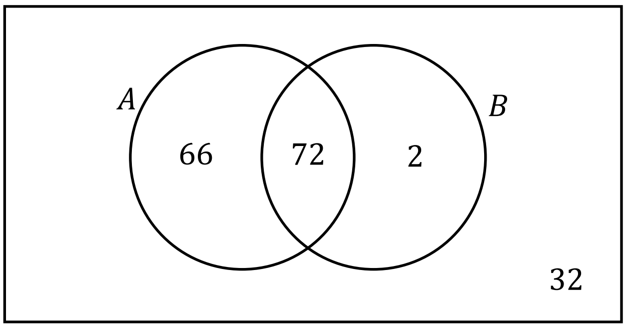
Com o **diagrama pré-esquematizado**, vamos inserir as informações do enunciado.



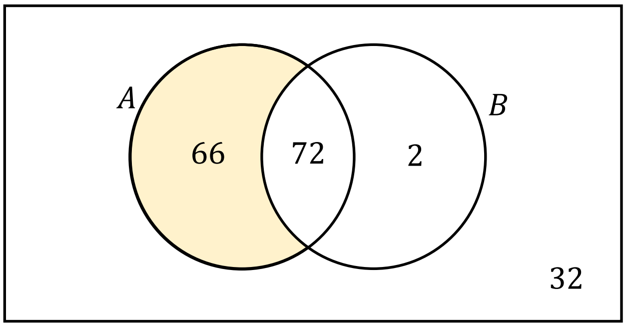
Vou explicar melhor o diagrama acima! Observe que o enunciado não falou quantos votaram a favor das duas propostas. Sendo assim, coloquei **o "x" na intersecção dos conjuntos**. Ademais, como sabemos que 32 votou contra as duas propostas, deixei essa quantidade fora de A e B, mas ainda dentro do universo dos votantes. Por fim, devemos saber que, após organizar essas regiões, a soma de todas as quantidades deve **resultar nos <u>172 votantes</u>** da assembleia.

$$(138-x)+x+(74-x)+32=172 \quad \rightarrow \quad 244-x=172 \quad \rightarrow \quad \boxed{x=72}$$

Pronto, com o valor de "x", vamos complementar o diagrama.



Como o enunciado quer **o número de votantes a favor de A e contra B**, então queremos a seguinte região:



Gabarito: LETRA A.

11. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) A prefeitura de certo município formou com seus funcionários 3 comissões para examinar assuntos diferentes. Sabe-se que:

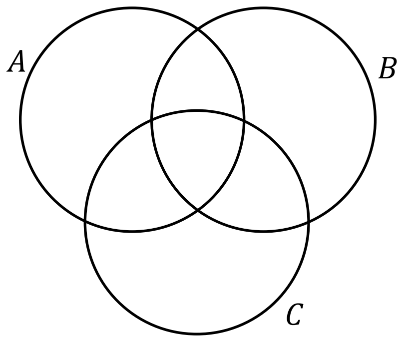
- há funcionários que participam de mais de uma comissão.
- cada comissão é formada por 15 funcionários.
- em cada comissão há 5 funcionários que não participam de mais nenhuma outra comissão.
- há 2 funcionários que participam das três comissões.

O número de funcionários que participam de, pelo menos, uma comissão é igual a

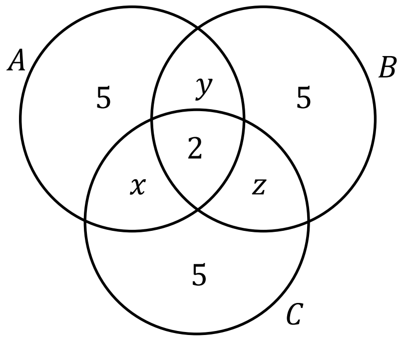
a) 29.
b) 31.
c) 36.
d) 39.
e) 43.

Comentários:

Como são três comissões, vamos chamá-las de "A", "B" e "C".



Agora, vamos inserir no diagrama algumas informações que a questão passou.



As informações que usamos foram: (i) **em cada comissão há 5 funcionários que não participam de mais nenhuma outra comissão;** e (ii) **há 2 funcionários que participam das três comissões.**

Nas intersecções duplas, colocamos as incógnitas "x", "y" e "z" pois nada conseguimos afirmar no momento sobre elas. Agora, vamos usar a seguinte informação: **cada comissão é composta por 15 funcionários**. Com isso, podemos equacionar:

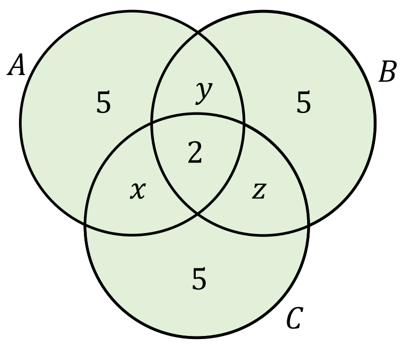
$$5 + x + y + 2 = 15 \quad \rightarrow \quad x + y = 8$$
$$5 + x + z + 2 = 15 \quad \rightarrow \quad x + z = 8$$
$$5 + z + y + 2 = 15 \quad \rightarrow \quad z + y = 8$$

Agora, vamos somar as três equações acima, membro a membro.

$$(x + y) + (x + z) + (z + y) = 24$$
$$2 \cdot (x + y + z) = 24$$
$$x + y + z = 12$$

Professor, o que vamos fazer com essa soma?

Galera, vamos lá! Observe que o enunciado pede o número de funcionários **que participam de <u>pelo menos uma</u> comissão**. Isso compreende tudo que está dentro dos diagramas.



Sendo assim, o que estamos procurando é:

$$T = 5 + 5 + 5 + 2 + x + y + z \qquad \rightarrow \qquad T = 17 + x + y + z$$

Podemos usar a soma "$x + y + z$" que determinamos anteriormente.

$$T = 17 + 12 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{T = 29}}$$

Gabarito: LETRA A.

12. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Uma empresa disponibilizou 3 cursos de aperfeiçoamento para seus funcionários: o Curso A, o Curso B e o Curso C. Como o horário permitia, cada funcionário poderia se matricular em mais de um curso. Terminado o prazo de matrículas, verificou-se que 8 funcionários se matricularam no curso A, 10 no curso B e 12 no curso C. Havia 4 funcionários matriculados nos cursos A e B, 4 funcionários nos cursos B e C e, também, 4 nos cursos A e C. Sabe-se ainda que há 1 único funcionário matriculado apenas no curso A. O número de funcionários que estão matriculados em ao menos 1 curso é

a) 19.

b) 21.

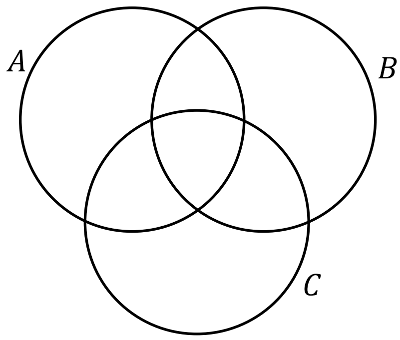
c) 23.

d) 27.

e) 30.

Comentários:

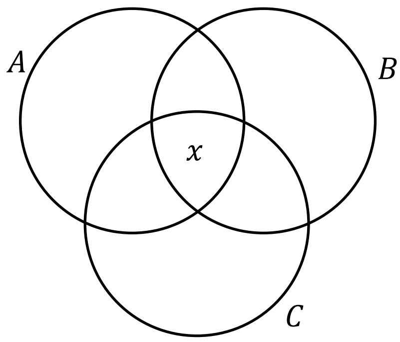
Vamos resolver esse exercício usando apenas **os Diagramas de Venn**! O primeiro passo é desenhá-los.



Nesse momento, devemos inserir as informações que possuímos. Ressalto que **essas informações <u>não</u> podem ser colocadas de qualquer forma no diagrama**. Existe uma ordem que deve ser observada! Começamos inserindo a quantidade referente à intersecção tripla, depois colocamos aquelas referentes às intersecções duplas e, por fim, aquelas referentes aos conjuntos isoladamente.

Professor, o enunciado não falou quantos alunos se matricularam nos três cursos!

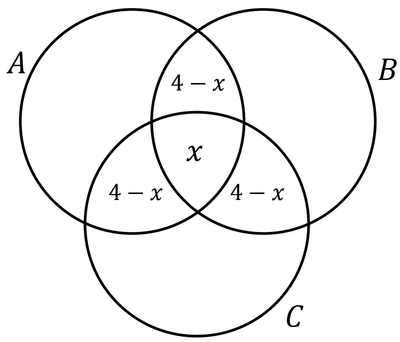
Então vamos chamar essa quantidade de "x".



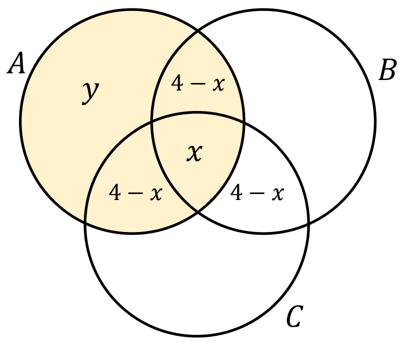
Agora, vamos para as **intersecções duplas**. O enunciado nos disse que:

- 4 funcionários matriculados nos cursos A e B;
- 4 funcionários nos cursos B e C;
- 4 funcionários nos cursos A e C.

No diagrama, ficamos:



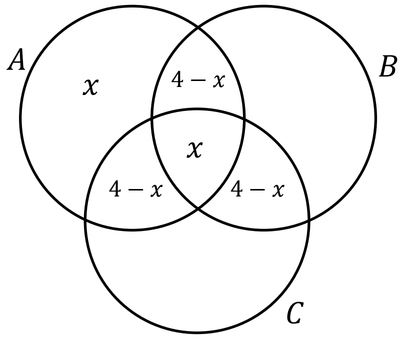
Por fim, vamos analisar as informações sobre cada conjunto. Esse momento é mais delicado! Note que devemos ter 8 funcionários em A. No nosso desenho até agora, temos:



Queremos determinar o "y" para preencher o diagrama. Devemos somar tudo dentro de A e igualar a 8, pois **A deve ter 8 funcionários matriculados** (conforme informado na questão).

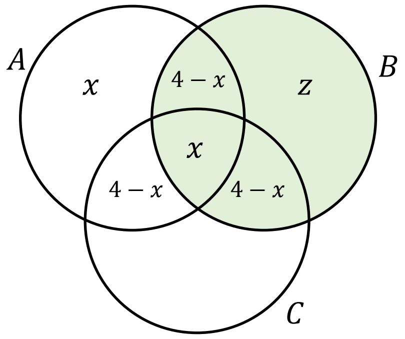
$$(4-x)+x+(4-x)+y=8 \quad \rightarrow \quad y=x$$

Com isso:



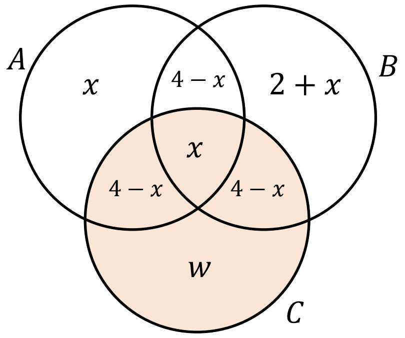
Vamos seguir esse mesmo raciocínio para as demais regiões que ainda faltam.

- 10 funcionários no curso B:



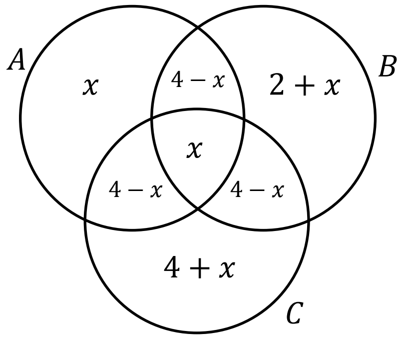
$$(4-x)+x+(4-x)+z=10 \quad \rightarrow \quad z=2+x$$

- 12 funcionários no curso C:



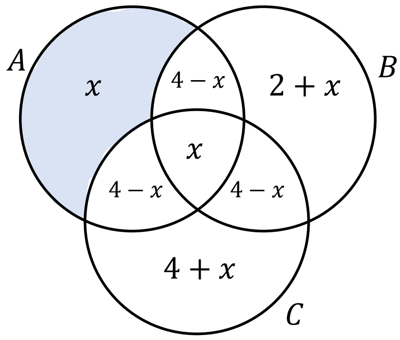
$$(4-x)+x+(4-x)+w=12 \quad \rightarrow \quad w=4+x$$

Pronto! Temos nosso diagrama esquematizado e preenchido!



Agora vem uma informação superimportante: **há 1 único funcionário matriculado apenas no curso A.**

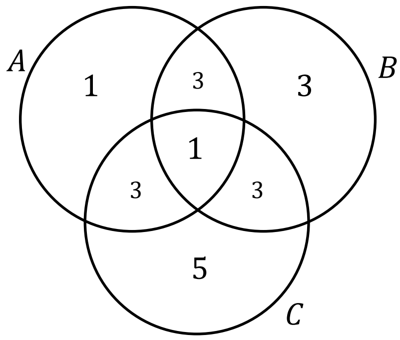
Qual região do diagrama representa exatamente esse grupo?



Logo,

$$x=1$$

Com o valor de “x”, podemos usá-lo em todo diagrama.



Como a questão pede o número de funcionários matriculados **em pelo menos um curso**, basicamente queremos a soma dos valores em todas as regiões.

$$T = 1 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3 + 5 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{T = 19}}$$

Gabarito: LETRA A.

13. (FGV/SEJUSP-MG/2022) Um grupo de 60 estudantes que se formaram juntos no Ensino Médio resolveu formar 2 grupos no WhatsApp: GP1 e GP2. Sabe-se que dos 60 estudantes, 7 resolveram não participar do GP1 nem do GP2 e que os números de participantes do GP1 e do GP2 são, respetivamente, 41 e 32. O número de estudantes que participam simultaneamente dos dois grupos é

a) 7.
b) 13.
c) 20.
d) 23.
e) 32.

Comentários:

Vamos aproveitar essa questão para treinar um pouco a fórmula do Princípio da Inclusão-Exclusão. Inicialmente, note que temos 60 estudantes, mas **7 deles não participaram de qualquer dos grupos**. Com isso, podemos escrever que:

$$n(GP1 \cup GP2) = 60 - 7 \qquad \rightarrow \qquad n(GP1 \cup GP2) = 53$$

Além disso, como o número de participantes dos grupos GP1 e GP2 são, respectivamente, **41 e 32**, então:

$$n(GP1) = 41 \qquad e \qquad n(GP2) = 32$$

Pronto! Agora, vamos escrever a fórmula.

$$n(GP1 \cup GP2) = n(GP1) + n(GP2) - n(GP1 \cap GP2)$$

A questão pede o número de estudantes que participam simultaneamente dos dois grupos. Logo, queremos determinar $n(GP1 \cap GP2)$. Para isso, vamos **substituir** as informações que temos na fórmula acima.

$$53 = 41 + 32 - n(GP1 \cap GP2)$$

$$n(GP1 \cap GP2) = 73 - 53$$

$$\boxed{\boldsymbol{n(GP1 \cap GP2) = 20}}$$

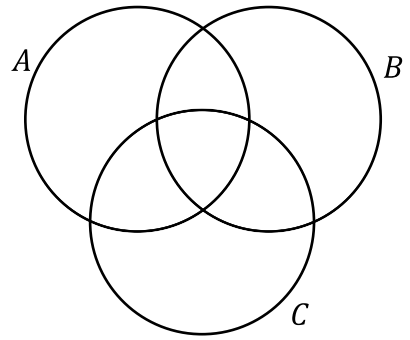
Gabarito: LETRA C.

14. (FGV/SEJUSP-MG/2022) Os conjuntos A, B e C possuem, cada um, 10 elementos e são tais que: A e B possuem elementos em comum, B e C possuem elementos em comum, mas A e C não possuem elementos comuns. Entre os elementos da união dos três conjuntos sabe-se que 8 elementos pertencem apenas ao conjunto A e 5 elementos pertencem apenas ao conjunto C. O número de elementos que pertencem apenas ao conjunto B é

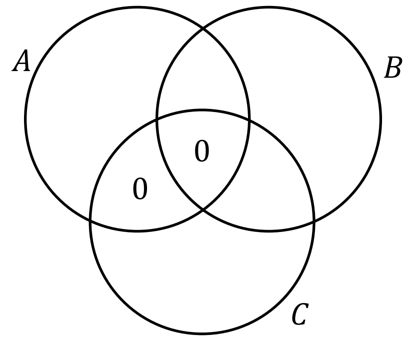
a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Comentários:

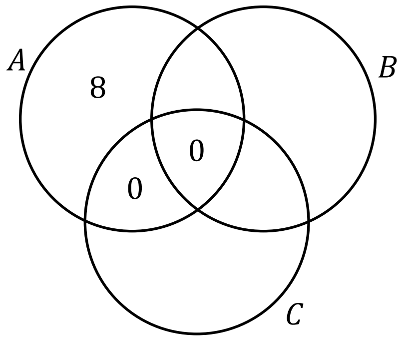
Questão boa, vamos resolvê-la utilizando diagramas. Para começar, temos:



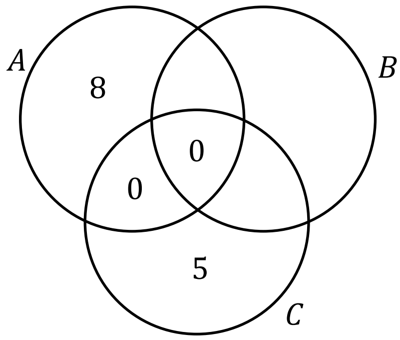
Ora, **se A e C <u>não</u> possuem elementos <u>em comum</u>**, já podemos escrever:



Como **8 elementos pertencem <u>apenas</u> ao conjunto A**:

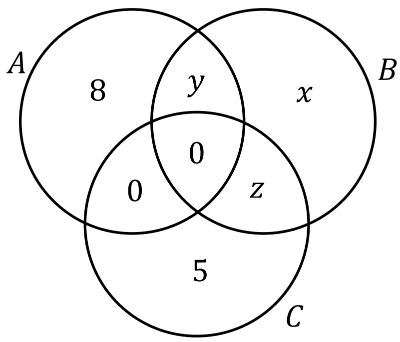


Ainda, sabemos que **5 elementos pertencem apenas ao conjunto C**:



Pronto, esse é o diagrama inicial que conseguimos desenhar com as informações que o enunciado passou.

Agora, nas regiões que não temos informações, vamos colocar algumas **incógnitas**.



Observe que a questão pede o número de elementos que pertencem **apenas ao conjunto B**. No nosso diagrama, esse número corresponde a "x". Para encontrá-lo, vamos usar a informação que **cada conjunto possui 10 elementos**. Sendo assim, podemos escrever que:

$$8 + y + 0 + 0 = 10 \quad \rightarrow \quad 8 + y = 10 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

$$5 + z + 0 + 0 = 10 \quad \rightarrow \quad 5 + z = 10 \quad \rightarrow \quad z = 5$$

$$x + y + z + 0 = 10 \quad \rightarrow \quad x + 2 + 5 = 10 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 3}$$

Gabarito: LETRA C.

15. (FGV/SEFAZ-ES/2022) Em um grupo de 70 pessoas, há 50 capixabas e 40 torcedores do Vasco. Em relação a esse grupo de pessoas, é correto concluir que

A) no máximo 20 são capixabas torcedores do Vasco.

B) no mínimo 20 não são nem capixabas nem torcedores do Vasco.

C) exatamente 30 são capixabas não torcedores do Vasco.

D) no máximo 40 são capixabas torcedores do Vasco.

E) é possível que nenhuma delas seja capixaba torcedor do Vasco.

Comentários:

Galera, esse tipo de questão está **muito comum** nas provas da FGV. Logo, preste bem atenção no que desenvolveremos aqui! Vou resolver de duas formas com vocês, ok? Uma forma mais **qualitativa** e outra forma usando **diagramas**. Inicialmente, vamos perceber o seguinte:

1) São 70 pessoas. 50 são capixabas. Logo, teremos **20 pessoas que não são capixabas**.

2) São 70 pessoas. 40 torcedores do Vasco. Logo, teremos **30 pessoas que não são torcedoras do Vasco**.

Beleza até aqui, pessoal?!

Agora, imagine que você queira saber a quantidade máxima de pessoas **não são capixabas e não são torcedoras do Vasco**.

Essa situação extrema aconteceria se todas as 20 pessoas que não são capixabas também não torcessem para o Vasco. Logo, nosso "máximo" procurado é 20 pessoas. Guarde essa conclusão**: no máximo, podemos ter 20 pessoas que não são capixabas nem torcedores do Vasco**.

Da mesma forma, imagine que você queira saber o oposto do que vimos acima. No caso, seria a quantidade máxima de pessoas que **são capixabas e torcem para o Vasco**.

Essa outra situação extrema aconteceria se todos os 40 torcedores do Vasco também fossem capixabas. É importante perceber que o **"40" é o número limitante aqui**. Note que não poderíamos ter que todos os 50 capixabas fossem torcedores do Vasco, pois o enunciado é claro ao informar que são apenas 40 torcedores do Vasco.

Com essas duas observações, vamos comentar as alternativas.

A) no máximo 20 são capixabas torcedores do Vasco.
Errado. Podemos ter até 40 capixabas torcedores do Vasco.

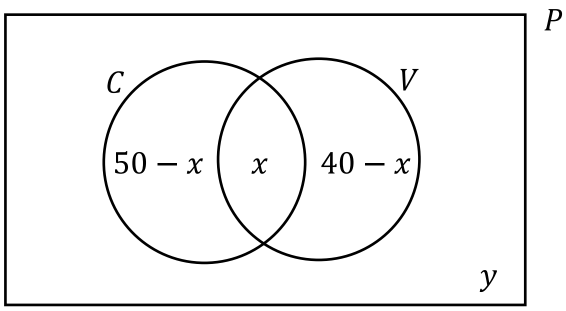
B) no mínimo 20 não são nem capixabas nem torcedores do Vasco.
Errado. O correto seria "no máximo" ao invés de "no mínimo".

C) exatamente 30 são capixabas não torcedores do Vasco.
Errado. O enunciado não fornece informações suficientes para concluirmos "exatamente". Com o que foi passado, podemos apenas fazer considerações sobre quantidades máximas e/ou mínimas.

D) no máximo 40 são capixabas torcedores do Vasco.
Correto, foi uma das conclusões que chegamos com a resolução do exercício.

E) é possível que nenhuma delas seja capixaba torcedor do Vasco.
Errado. Isso seria verdade se a soma das duas quantidades fosse inferior a 70.

Feita essa primeira resolução, vamos desenhar uns diagramas para entender o problema sobre um outro ângulo!



"C" é o conjunto dos capixabas, "V" é o conjunto dos torcedores do Vasco, "P" é o conjunto formado por todas as 70 pessoas (é **o conjunto universo**). Além disso, temos que "x" denota todas as pessoas que são capixabas e torcem para o Vasco. Por sua vez, "y" é exatamente o contrário, ele denota a quantidade de pessoas que não são capixabas e não são torcedores do Vasco.

Como o enunciado falou que **o total de pessoas é 70**, quando somamos todas essas quantidades destacadas nos diagramas, devemos ter exatamente essas 70 pessoas.

$$(50 - x) + x + (40 - x) + y = 70 \qquad \rightarrow \qquad y - x = 20 \qquad \rightarrow \qquad x = 20 + y$$

Note que "x" é tanto maior quanto for "y". Assim, quando "y" for máximo "x" também será.

No começo da solução vimos que **a quantidade máxima de pessoas que não podem ser capixabas nem torcerem para o Vasco é 20**. Sendo assim, o valor máximo para "x", que é a quantidade de pessoas que são capixabas e torcedoras do Vasco é de:

$$x_{max} = 20 + y_{max} \quad \rightarrow \quad x_{max} = 20 + 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_{max} = 40}$$

Logo, no máximo, **podemos ter 40 pessoas que são capixabas e torcedoras do Vasco**.

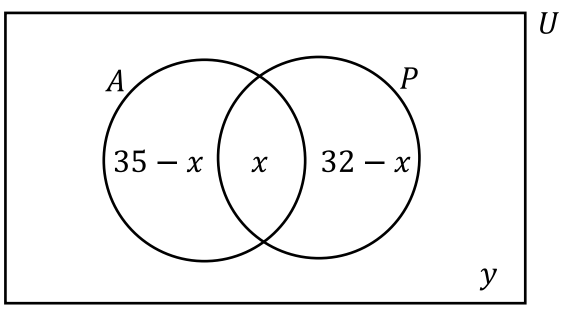
Gabarito: LETRA D.

16. (FGV/MPE-GO/2022) Em um grupo de 48 pessoas, há 35 advogados e 32 policiais. Nesse grupo, o número mínimo de pessoas que são ao mesmo tempo advogados e policiais é

A) 13.
B) 16.
C) 19.
D) 32.
E) 35.

Comentários:

Essa questão parece com a anterior, não é verdade? Vamos resolvê-la usando diagramas.



Nessa questão, "A" representa o conjunto dos advogados, "P" o conjunto dos policiais e "U" é o nosso conjunto universo (*compreende todas as 48 pessoas*). Ademais, **"x" representa a quantidade de advogados que também são policiais** e **"y" é a quantidade de pessoas que não são advogados nem policiais**. Quando somamos todas as quantidades destacadas no nosso diagrama, devemos obter as 48 pessoas.

$$(35 - x) + x + (32 - x) + y = 48 \quad \rightarrow \quad y - x = -19 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = y + 19}$$

Observe que encontramos uma relação entre "x" e "y".

A questão pede o valor mínimo de pessoas que são ao mesmo tempo advogadas e policiais, ou seja, o valor mínimo de "x". **Para que "x" seja mínimo, devemos ter que "y" também seja mínimo**. Note que quanto menor "y", menor também será "x".

A pergunta que vem agora é: *qual é o menor valor possível para "y"?*

A situação que minimiza "y" seria aquela em não existiria ninguém (entre essas 48 pessoas) que não fosse advogado ou policial, ou seja, $y_{min} = 0$. Com isso:

$$x_{min} = y_{min} + 19 \quad \rightarrow \quad x_{min} = 0 + 19 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_{min} = 19}$$

Gabarito: LETRA C.

17. (FGV/SEMSA-MANAUS/2022) Em um grupo de 50 pessoas, 27 gostam de filmes de suspense e 32 gostam de filmes de terror. Com relação a essas 50 pessoas, é correto concluir que

A) no máximo 18 delas não gostam de filmes de suspense nem de filmes de terror.

B) exatamente 9 delas gostam tanto de filmes de suspense como de filmes de terror.

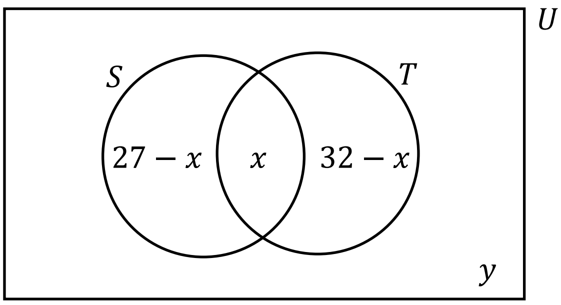
C) exatamente 18 delas só gostam de filmes de suspense.

D) exatamente 23 delas só gostam de filmes de terror.

E) no mínimo 18 delas gostam tanto de filmes de suspense como de filmes de terror.

Comentários:

Mais uma nesse estilo! Todas de 2022! Vamos usar os diagramas de novo!



- "S" denota o conjunto formado por aqueles que gostam de filmes de suspense;
- "T" denota o conjunto formado por aqueles que gostam de filmes de terror;
- "U" denota o conjunto universo, **formado por todas as 50 pessoas** mencionadas na questão;
- "x" é a quantidade de pessoas que gostam tanto de filmes de suspense quanto de terror;
- "y" é a quantidade de pessoas que não gostam de filmes de suspense nem de terror.

Quando fazemos o diagrama da forma acima, **a soma** das quantidades destacadas deve totalizar o número de pessoas envolvidas, ou seja:

$$(27 - x) + x + (32 - x) + y = 50 \quad \rightarrow \quad 59 - x + y = 50 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = x - 9}$$

Encontramos uma relação entre "x" e "y". Note que **quanto maior "x", maior será "y"**.

Sendo assim, para maximizarmos "y", devemos determinar o valor máximo de "x".

Para isso, note que temos 27 pessoas que gostam de filme de suspense e 32 pessoas que gostam de terror.

Observe que, em uma situação extrema, as 27 pessoas que gostam de suspense podem também gostar de terror. **Essa seria a situação que "x" assumiria seu máximo valor.** **Não** poderíamos ter, por exemplo, 28 pessoas gostando de suspense e terror, já que sabemos que **apenas 27 gostam de suspense**. Tudo bem? **Esse é o "batente" para o "x"**. Descoberto isso, podemos usar na expressão que determinamos anteriormente.

$$y_{max} = x_{max} - 9 \quad \rightarrow \quad y_{max} = 27 - 9 \quad \rightarrow \quad \boxed{y_{max} = 18}$$

Gabarito: LETRA A.

18. (FGV/MPE-GO/2022) Uma empresa possui 32 funcionários que trabalham nos setores A, B e C. Sabe-se que 20 funcionários trabalham no setor A, 14 funcionários trabalham no setor B e 9 funcionários trabalham no setor C. Há funcionários que trabalham simultaneamente nos setores A e B, há funcionários que trabalham simultaneamente nos setores A e C, mas nenhum funcionário trabalha simultaneamente nos setores B e C. O número de funcionários que trabalha apenas no setor A é igual a

A) 4
B) 5
C) 6
D) 8
E) 9

Comentários:

Questão para usarmos o **Princípio da Inclusão-Exclusão**. Vamos anotar os dados que a questão passa:

- 32 funcionários trabalham nos setores A, B e C.

$$n(A \cup B \cup C) = 32$$

- 20 funcionários trabalham no setor A.

$$n(A) = 20$$

- 14 funcionários trabalham no setor B.

$$n(B) = 14$$

- 9 funcionários trabalham no setor C.

$$n(C) = 9$$

- Nenhum funcionário trabalha simultaneamente nos setores B e C.

$$n(B \cap C) = 0$$

Observe que como não existe funcionário que trabalhe simultaneamente em B e C, consequentemente **não podemos ter funcionário que trabalhe simultaneamente nos três setores:** A, B e C.

$$n(A \cap B \cap C) = 0$$

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$32 = 20 + 14 + 9 - n(A \cap B) - n(A \cap C) - 0 + 0$$

$$n(A \cap B) + n(A \cap C) = 11$$

O enunciado pede o número de funcionários que trabalham **apenas** no setor A. Para encontrar seu valor, devemos subtrair de $n(A)$ o número de elementos das intersecções de A com os outros conjuntos. Afinal, queremos a quantidade de elementos que estejam **apenas em A.**

$$Apenas\ no\ Setor\ A = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$Apenas\ no\ Setor\ A = 20 - 11 - 0$$

$$\boxed{Apenas\ no\ Setor\ A = \mathbf{9}}$$

Gabarito: LETRA E.

19. (FGV/SEMSA-MANAUS/2022) Uma pesquisa foi feita com 40 funcionários de uma empresa e entre as perguntas havia as que estão abaixo:

- Você tem filhos?
- Você tem animal de estimação?

20 pessoas responderam SIM para a primeira pergunta.
15 pessoas responderam SIM para a segunda pergunta.
11 pessoas deixaram as duas perguntas em branco.

As instruções da pesquisa estabeleciam que deixar em branco significaria dizer NÃO. Sendo assim, o número de pessoas que possuem filhos e animais de estimação é igual a
A) 2.
B) 3.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

Comentários:
Nós vamos resolver essa questão por meio do Princípio da Inclusão-Exclusão. Inicialmente, considere que "**F**" denota o conjunto formado por aqueles que tem **filhos**. Por sua vez, "**A**" denota o conjunto formado por aqueles que tem **animal de estimação**. Dos 40 funcionários que responderam as perguntas, **11 deixaram as duas perguntas em branco** (na prática, a pesquisa considerou que essas **11 pessoas não possuem filhos nem animal de estimação**). Com isso, podemos escrever:

$$n(A \cup F) = 40 - 11 \qquad \rightarrow \qquad n(A \cup F) = 29$$

Por sua vez, como **20 responderam que tem filhos**, podemos escrever $n(F) = 20$.

E, ainda, como **15 responderam que possuem animal de estimação**, $n(A) = 15$.

Com essas três informações, conseguimos encontrar o número de pessoas que possuem filhos **e** animais de estimação - $n(A \cap F)$ - por meio da aplicação do **Princípio da Inclusão-Exclusão**:

$$n(A \cup F) = n(A) + n(F) - n(A \cap F)$$

Substituindo os valores,

$$29 = 20 + 15 - n(A \cap F) \qquad \rightarrow \qquad n(A \cap F) = 35 - 29 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{n(A \cap F) = 6}}$$

Gabarito: LETRA E.

20. (FGV/PC-RN/2021) Em um grupo de esportistas, 1/3 deles só gostam de vôlei e, dos demais, 2/5 gostam de vôlei e também de basquete. Todos os esportistas desse grupo gostam de, pelo menos, um desses dois esportes. Em relação ao total de membros desse grupo, a fração daqueles que só gostam de basquete é:

A) 2/3;

B) 2/5;

C) 3/5;

D) 4/15;

E) 1/15.

Comentários:

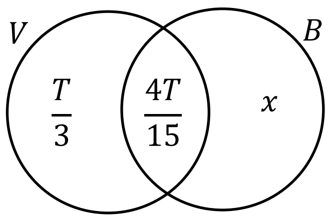
Considere que "V" denota o conjunto daqueles que gostam de Vôlei e "B" denota o conjunto daqueles que gostam de basquete. Por fim, considere que "T" é o total de esportistas desse grupo.

1) Como 1/3 desses esportistas só gostam de vôlei, então podemos escrever que **a quantidade dos que só gostam de vôlei é T/3**.

2) **Atenção aqui!!** Depois da informação acima, o enunciado fala: "DOS DEMAIS", ou seja, refere-se aqueles que não gostam só de vôlei ou não gostam de vôlei mesmo. Assim, **essa quantia é 2T/3**! Temos que **2/5 dessa quantidade gostam de vôlei e de basquete**.

$$\frac{2T}{3} \cdot \frac{2}{5} = \boldsymbol{\frac{4T}{15}}$$

No diagrama, ficamos com o seguinte:



Estamos procurando a fração daqueles que só gostam de basquete, ou seja, o valor de "x/T".

Vamos perceber algumas coisas aqui:

1) Todos nesse grupo gostam de, **pelo menos**, um desses dois esportes. Isso significa que **não temos ninguém fora de "V" ou "B"**.

2) Ademais, lembre-se que quando somamos as quantidades destacadas no diagrama, **ela deve totalizar o número de membros desse grupo**.

$$\frac{T}{3} + \frac{4T}{15} + x = T \quad \rightarrow \quad \frac{9T}{15} + x = 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{6T}{15} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{T} = \frac{2}{5}}$$

Gabarito: LETRA B.

21. (FGV/IMBEL/2021) Os 38 empregados novos da fábrica de brinquedos BLIME estão passando por um treinamento inicial. Uma das tarefas do treinamento é a de assistir aos filmes A e B sobre o funcionamento de duas partes da fábrica. Em uma reunião com os novos empregados o coordenador perguntou a todos quem já tinha assistido aos filmes recomendados e ele percebeu, pelas respostas, que

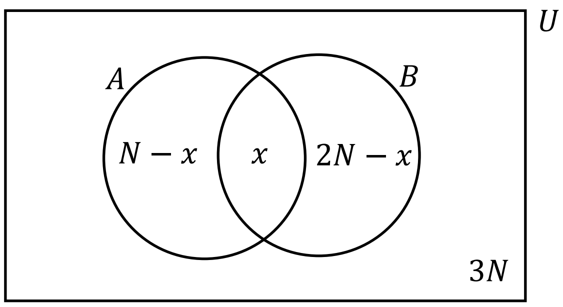
- N pessoas assistiram ao filme A.
- 2N pessoas assistiram ao filme B.
- 3N pessoas não assistiram a nenhum dos dois filmes.

É correto concluir que o número mínimo de pessoas que assistiu aos dois filmes foi

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Comentários:

Vamos colocar essas informações em um diagrama para uma melhor avaliação do problema.



A soma das quantidades destacadas no diagrama **deve totalizar o número de empregados novos** (38).

$$(N - x) + x + (2N - x) + 3N = 38$$

$$6N - x = 38 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 6N - 38}$$

Vamos voltar nossa atenção à expressão que destaquei acima. Note que **"x" e "N" são números naturais**, pois estão mensurando **a quantidade de empregados**. Não podemos ter "1,5" pessoas. *Concorda?* Além disso, **deve ser uma quantidade maior ou igual a zero**. Não faz sentido encontrarmos "-3" empregados!

Com isso, **o valor mínimo de "x" é o primeiro valor em que ele é positivo**. Isso acontece quando $\boldsymbol{N = 7}$.

$$x = 6 \cdot 7 - 38 \quad \rightarrow \quad x = 42 - 38 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x = 4}}$$

Note que para valores de "N" abaixo de 7, o valor de "x" é negativo. Não sendo uma solução possível para o problema.

Gabarito: LETRA D.

22. **(FGV/IMBEL/2021) Trinta estudantes praticam judô, natação e basquete, sendo que todos eles praticam pelo menos um desses esportes. Há 15 que praticam judô, 17 que praticam natação e 12 que praticam basquete. Há 10 estudantes que praticam pelo menos dois esportes. O número de estudantes que praticam os três esportes é**
A) 4.
B) 5.
C) 6.
D) 7.
E) 8.

Comentários:
Vamos resolver essa questão usando o **Princípio da Inclusão-Exclusão**.

- "J" denota o conjunto daqueles que praticam judô;
- "N" denota o conjunto daqueles que praticam natação;
- "B" denota o conjunto daqueles que praticam basquete.

1) Trinta estudantes praticam judô, natação e basquete.

$$n(J \cup N \cup B) = 30$$

2) 15 praticam judô.

$$n(J) = 15$$

3) 17 praticam natação.

$$n(N) = 17$$

4) 12 praticam basquete.

$$n(B) = 12$$

5) Há 10 estudantes que praticam pelo menos dois esportes.

$$n(J \cap B) + n(N \cap B) + n(J \cap N) - \mathbf{2}\boldsymbol{n(J \cap N \cap B)} = 10$$

Aqui está o "pulo do gato", pessoal!

A subtração em vermelho deve ser feita pois **estamos contando a "intersecção tripla" três vezes** quando fazemos a soma $n(J \cap B) + n(N \cap B) + n(J \cap N)$. No final, **só queremos contar ela uma única vez!** Por isso, subtraímos $\mathbf{2}\boldsymbol{n(J \cap N \cap B)}$. Agora, vamos escrever a expressão acima de uma forma mais conveniente, que você irá entender em breve.

$$n(J \cap B) + n(N \cap B) + n(J \cap N) = 10 + 2n(J \cap N \cap B)$$

Do PIE, temos:

$$n(J \cup N \cup B) = n(J) + n(N) + n(B) - n(J \cap B) - n(N \cap B) - n(J \cap N) + n(J \cap N \cap B)$$

Substituindo as informações,

$$30 = 15 + 17 + 12 - \left(\mathbf{10} + \mathbf{2}\boldsymbol{n(J \cap N \cap B)}\right) + n(J \cap N \cap B)$$

$$30 = 15 + 17 + 12 - 10 - 2n(J \cap N \cap B) + n(J \cap N \cap B)$$

$$30 = 34 - n(J \cap N \cap B) \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{n(J \cap N \cap B) = 4}}$$

Gabarito: LETRA A.

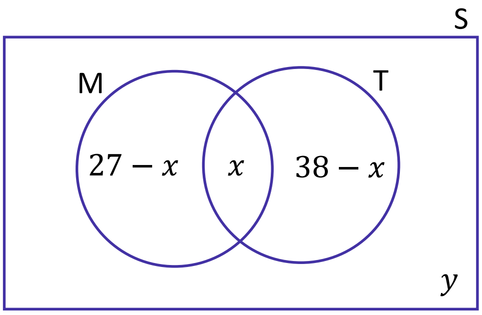
23. (FGV/PM-AM/2022) Em um grupo de 45 soldados, 27 gostam de marchar e 38 gostam de praticar tiro ao alvo. Sejam:

X: o número de soldados desse grupo que gostam de marchar e também de praticar tiro ao alvo;
Y: o número de soldados desse grupo que não gostam nem de marchar nem de praticar tiro ao alvo.

Nesse caso, é correto afirmar que

A) X é no máximo 20.
B) Y é no mínimo 7.
C) quando X = 23, tem-se Y = 7.
D) quando Y = 7, tem-se X = 20.
E) quando Y = 5, tem-se X = 25.

Comentários:
Vamos desenhar os diagramas!



No diagrama acima, "M" representa o conjunto daqueles soldados que **gostam de marchar**. Por sua vez, "T" representa o conjunto daqueles que **gostam de praticar tiro ao alvo**. Dito isso, perceba o seguinte:

1) Representamos com "x" a quantidade de soldados na **intersecção dos dois conjuntos**, ou seja, "x" é a quantidade de soldados que gostam de marcar **e** de praticar tiro ao alvo. Com isso, podemos concluir que "$27 - x$" é a quantidade de soldados que gosta **apenas** de marchar.

2) Da mesma forma que raciocinamos anteriormente, podemos concluir que "$38 - x$" é a quantidade de soldados que gostam **apenas** de praticar tiro ao alvo.

3) **Fora** dos conjuntos "M" e "T", colocamos o "y". Esse "y" é a quantidade de soldados que **não** gostam de marchar **nem** de praticar tiro ao alvo.
E agora? O que fazemos?

Agora, nós utilizamos a informação de que **o total de soldados é igual a 45**. Ou seja, quando **somamos** cada uma das regiões desse diagrama, **devemos obter o total de soldados**, isto é,

$$(27 - x) + x + (38 - x) + y = 45 \quad \rightarrow \quad 65 - x + y = 45 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 20 + y}$$

Essa é a relação entre "x" e "y". Perceba que quando $y = 5$, temos $x = 25$, **exatamente** como consta na alternativa E.

Gabarito: LETRA E.

24. (FGV/PREF. SALVADOR/2019) 50 atletas estão treinando e todos usam bermuda e camiseta do mesmo modelo, mas com cores diversas. Entre esses atletas há 20 com bermudas brancas, 25 com camisetas brancas e 12 com bermudas e camisetas brancas. Assinale a opção que indica o número de atletas que não estão vestindo nenhuma peça branca.

a) 5

b) 13

c) 15

d) 17

e) 20

Comentários:

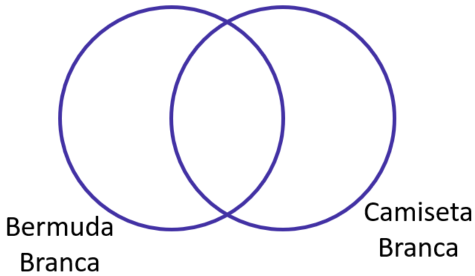
Beleza, moçada. Vamos extrair as informações do enunciado.

- Atletas com bermudas brancas. $n(B) = 20$
- Atletas com camisetas brancas. $n(C) = 25$
- Atletas com bermudas **e** camisetas brancas. $n(B \cap C) = 12$

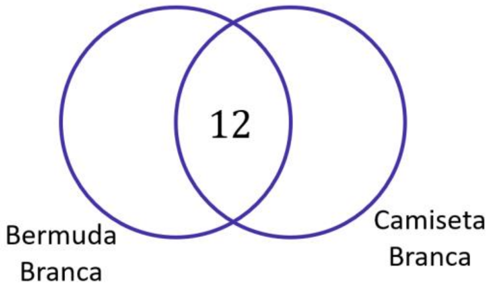
Podemos resolver de duas maneiras.

1ª) Por diagrama de Venn.

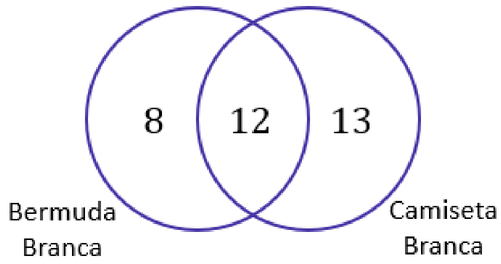
- Primeiro passo: desenhar os dois conjuntos.



- Segundo passo: colocar o valor da intersecção. No nosso caso, seria quantos estão de bermuda branca e de camiseta branca.



- Terceiro passo: subtraímos as quantidades totais de cada conjunto pela quantidade que já colocamos na intersecção. Dessa forma, encontraremos quantas pessoas usaram **apenas a bermuda branca** $(20 - 12 = 8)$ ou **apenas a camiseta branca** $(25 - 12 = 13)$.



- Quarto passo: somar os números para obter a quantidade de pessoas que está usando o bermuda branca ou camiseta branca (incluindo os dois ao mesmo tempo) = 8 + 12 + 13 = 33. Logo, se temos 33 atletas que estão vestindo alguma peça branca de um total de 50, então 50 - 33 = **17 não estão**.

2ª) Por Princípio da Inclusão-Exclusão.

Aplicar na fórmula que aprendemos na teoria e descobrir $n(B \cup C)$.

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$$

$$n(B \cup C) = 20 + 25 - 12$$

$$n(B \cup C) = 33$$

Logo, 33 atletas estão usando algo branco. Como ao todo são 50 atletas, 50 - 33 = **17 não estão vestindo nenhuma peça branca**.

Gabarito: LETRA D.

25. (FGV/PREF. ANGRA/2019) Aos 5 anos, toda criança deve tomar um reforço das vacinas tríplice e pólio. Uma pesquisa feita com as 80 crianças que entraram no 1º ano do Ensino Fundamental de uma escola mostrou que:

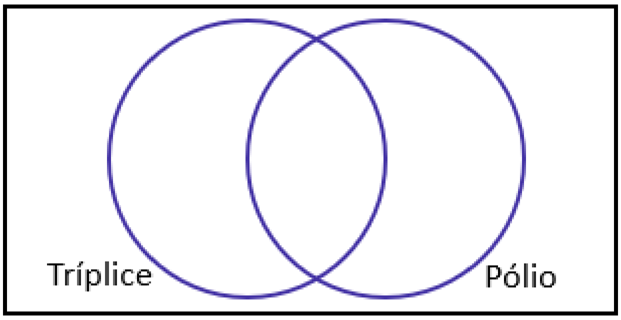
- 54 alunos tomaram a vacina tríplice.
- 52 alunos tomaram a vacina pólio.
- 16 alunos não tomaram nenhuma das duas vacinas.

O número de alunos que tomou as duas vacinas é
a) 42.
b) 44.

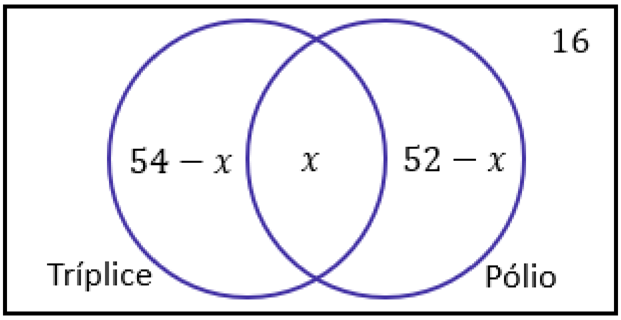
c) 46.
d) 48.
e) 50.

Comentários:

- Primeiro passo: desenhar os conjuntos daqueles que tomaram a vacina tríplice e daqueles que tomaram a vacina pólio.



- Segundo passo: Adicionar as informações que foram passadas no enunciado. Conforme aprendemos, sempre devemos **começar pelo valor que está na intersecção**. Na questão, **esse valor equivale ao número de pessoas que tomaram a vacina tríplice e a pólio**. Como não sabemos, podemos simplesmente chamar de x.



É importante perceber que devemos colocar a quantidade de pessoas que não tomaram nenhuma das vacinas também. No nosso caso, **essa quantidade é o 16**.

- Terceiro passo: somar todas as quantidades do diagrama e a **igualar a quantidade de pessoas participantes da pesquisa**. De acordo com o enunciado, foram **80 crianças**. Assim,

$$(54 - x) + x + (52 - x) + 16 = 80 \quad \rightarrow \quad 122 - x = 80 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 42}$$

Portanto, **42 alunos tomaram as duas vacinas**.

Gabarito: LETRA A.

QUESTÕES COMENTADAS - FGV

Conjuntos Numéricos

1. (FGV/MEC/2009) Sejam X e Y dois números inteiros positivos. Se $X^2 + Y^2$ é ímpar, então se pode afirmar de maneira correta que:

A) X^Y é par.
B) Y^X é par.
C) XY é par.
D) $X - Y$ é par.
E)$X + Y$ é par.

Comentários:

Moçada, antes de qualquer análise, é importante guardar que **X e Y são dois números inteiros positivos**. Ou seja, **não são números negativos, nem quebrados, nem mesmo podem ser iguais a zero**. Tudo bem? Além disso, vamos lembrar o seguinte:

- $\text{PAR} \pm \text{PAR} = \text{PAR}$
- $\text{ÍMPAR} \pm \text{ÍMPAR} = \text{PAR}$
- $\textbf{ÍMPAR} \pm \textbf{PAR} = \textbf{ÍMPAR}$

A única opção em que o resultado de uma soma ou subtração é um número ímpar, **é quando um dos números é ímpar e o outro é par**. Assim, se X^2+Y^2 é ímpar, ou X^2 é par e Y^2 é ímpar OU X^2 é ímpar e Y^2 é par.

Perceba que um número par elevado a qualquer expoente inteiro positivo será sempre um número par. O mesmo acontece com um número ímpar. Para começar a entender esse fato, **você pode pensar em alguns exemplos, tais como o $3^2 = 9, 3^3 = 27, 4^2 = 16, 4^3 = 64$.**

Isso acontece pois **um número par sempre terá o fator "2".** Portanto, quando multiplicar esse número várias vezes, o 2 sempre estará lá!

$$(2n)^5 = (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) = 2 \cdot (2^4 n)$$

Por sua vez, **números ímpares não possuem o fator "2".** Se você multiplica um número que não tem o fator 2 pelo mesmo número, o resultado continuará sem o fator "2", ou seja, será um número ímpar. Tudo bem?! Essas conclusões são válidas apenas quando temos expoentes números inteiros positivos.

Agora, voltando para o problema, vamos analisar as alternativas.

A) X^Y é par.

ERRADO. Pessoal, se X for o número par, então estaria correto. No entanto, **X pode ser o ímpar**. Não sabemos. Nesse sentido, X^Y também pode ser um número ímpar.

B) Y^X é par.
ERRADO. É pelo mesmo motivo da alternativa anterior: se Y fosse o número par, então estaria correto. No entanto, **Y pode ser o ímpar**. Não sabemos. Nesse sentido, Y^X também pode ser um número ímpar.

C) XY é par.
CERTÍSSIMO. O produto de um número par por um número ímpar é um número par. Isso acontece pois o número par possui o fator "2", que leva o fator para a multiplicação.

D) $X - Y$ é par.
ERRADO. Sabemos que a soma ou subtração de um número par com um número ímpar, resultará em um número ímpar.

E)$X + Y$ é par.
ERRADO. Pelo mesmo motivo do item anterior: a soma ou subtração de um número par com um número ímpar, resultará em um número ímpar.

Gabarito: LETRA C.

2. (FGV/SEFAZ-MS/2006) O maior número inteiro que é menor que ou igual a -5,7 é:
A) -6
B) -5
C) -4
D) -3
E) -2

Comentários:
Os números inteiros são os números "não quebrados", podendo ser negativos ou positivos. Veja que **-5,7 não é um número inteiro**. Queremos o primeiro inteiro menor do que ele! Ora, -6 é o número que a questão está procurando.

Perceba que **não pode ser -5 pois o -5 é MAIOR que -5,7**. O enunciado pergunta pelo maior inteiro que é menor do que -5,7. A banca tentou pegar o candidato com essa história de "maior que é menor", causando confusão facilmente.

Gabarito: LETRA A.

3. (FGV/ALESP/2002) Um número racional qualquer:

A) Tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.
B) Tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.
C) Não se pode expressar em forma decimal exata.
D) Tem sempre como denominador um número diferente de zero.

Comentários:
A) Tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.
ERRADO. Vimos na teoria que as dízimas periódicas, **apesar da representação decimal infinita, são números racionais**, pois conseguimos expressá-la na forma de uma fração, com denominador não-nulo.

B) Tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.
ERRADO. Há números racionais que possuem um número finito de casas decimais. Para isso, basta lembrar que **0,5, por exemplo, é um número racional**.

C) Não se pode expressar em forma decimal exata.
ERRADO. Um número racional é qualquer número que pode ser escrito na forma de uma fração denominador não nulo. Como consequência, **tanto números decimais exatos quanto dízimas periódicas são exemplos de números racionais**.

D) Tem sempre como denominador um número diferente de zero.
CERTO. Pessoal, é exatamente parte da definição de um número racional: **qualquer número que pode ser escrito na forma de uma fração, com denominador diferente de zero**. Caso não seja possível, teremos um número irracional.

Gabarito: LETRA D.

4. (FGV/AL-MT/2013) Suponha que o valor da expressão $\frac{5x}{6} - \frac{x}{2}$ seja um número inteiro. O valor de x é necessariamente
A) positivo.
B) par.
C) múltiplo de 3.
D) múltiplo de 6.
E) múltiplo de 12.

Comentários:
Sabemos que um número inteiro é um número "não quebrado". **Não pode ter casa decimal!** A expressão do enunciado foi:

$$E = \frac{5x}{6} - \frac{x}{2}$$

Vamos tirar o MMC e calcular na forma de uma única fração.

$$\boldsymbol{E = \frac{5x}{6} - \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad E = \frac{10x - 6x}{12} \quad \rightarrow \quad E = \frac{4x}{12} \quad \rightarrow \quad E = \frac{x}{3}}$$

Note que **x deve ser um múltiplo de 3** (3, 6, 9, 12, 15, 18, ...). Caso não fosse, quando o dividíssemos por 3, resultaria em um número quebrado e, **portanto, não teríamos um inteiro**.

Gabarito: LETRA C.

Questões Comentadas - FGV

Problemas

1. (FGV/PREF. VITORIA/2024) Se a soma de 5 números inteiros positivos consecutivos dá resultado par, então, entre esses números

A) a maioria é ímpar.
B) o produto dos dois menores é ímpar.
C) o produto do maior com o menor ímpar.
D) a soma de todos os pares é ímpar.
E) a soma de todos os ímpares é par.

Comentários:

Vamos lá! Sejam os **cinco números inteiros positivos consecutivos**:

$$x-2, \qquad x-1, \qquad x, \qquad x+1, \qquad x+2$$

Como **a soma dá um resultado par**, podemos escrever:

$$(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=2k$$

$$5x=2k$$

$$x=2\left(\frac{k}{5}\right)$$

Note que “x” é par, já que é inteiro e possui o fator 2.

Ora, COMO “x” é par, então podemos concluir o seguinte.

$$\underbrace{x-2}_{\text{PAR}}, \quad \underbrace{x-1}_{\text{ÍMPAR}}, \quad \underbrace{x}_{\text{PAR}}, \quad \underbrace{x+1}_{\text{ÍMPAR}}, \quad \underbrace{x+2}_{\text{PAR}}$$

Sabendo disso, vamos olhar as alternativas.
A) a maioria é ímpar.
Errado. A maioria é par.

B) o produto dos dois menores é ímpar.
Errado. Sabemos que **a multiplicação entre um par e um ímpar é um número par**.

C) o produto do maior com o menor é ímpar.
Errado. O maior é par e o menor também é par. Sendo assim, **a multiplicação desses dois é um número par**.

D) a soma de todos os pares é ímpar.
Errado. A soma de números pares é um par.

E) a soma de todos os ímpares é par.
Correto. Como temos dois ímpares, **a soma de dois ímpares é um número par**, conforme vimos na teoria.

Gabarito: LETRA E.

2. (FGV/BANESTES/2023) A quantidade de números inteiros e positivos formados por 2 algarismos cuja diferença vale 4 é igual a
A) 5.
B) 6.
C) 10.
D) 11.
E) 15.

Comentários:
Os números **inteiros** e **positivos** formados por 2 algarismos **são todos aqueles que vão de 10 até 99**. A questão pede quantos existem tal que **a diferença entre esses algarismos seja igual a 4**. Um número que obedece a essa condição seria o 40, pois 4 - 0 = 4. Como não são tantos números, podemos listá-los!

$$15, 26, 37, 40, 48, 51, 59, 62, 73, 84, 95$$

Ou seja, **11 números**! Podemos marcar a alternativa D.

Gabarito: LETRA D.

3. (FGV/SEAD-AP/2022) A soma de dois números naturais é 33. O maior valor para o produto deles é
a) 271.
b) 271,75.
c) 272.
d) 272,25.
e) 273.

Comentários:

Inicialmente, perceba que estamos trabalhando com números naturais. Na prática, não consideraremos os números "quebrados" ou negativos, pois:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

A questão informa que **temos dois números naturais tais que a soma deles é igual a 33**.

$$x + y = 33$$

Queremos saber **qual é o valor máximo do produto xy**. Para isso, pode ser interessante escrevermos uma tabela. Acompanhe:

x	y	xy	$x + y$
1	32	32	33
2	31	62	33
3	30	90	33
4	29	116	33
5	28	140	33
6	27	162	33

Na tabela acima listei algumas possibilidades para "x" e para "y" de forma que a soma $x + y$ fosse sempre igual a 33 (pois é a condição do enunciado).

Agora, vamos olhar o produto xy. Observe que **ele aumenta conforme aumentamos "x" e diminuímos "y"**. *Será que esse aumento ocorre indefinidamente?* Vamos continuar a tabela e observar mais um pouco!

x	y	xy	$x + y$
7	26	182	33
8	25	200	33
...	...	...	33
15	18	270	33
16	**17**	**272**	**33**
17	**16**	**272**	**33**
18	15	270	33

Pronto! Observe que o valor máximo do produto ocorre quando $x = 16$ e $y = 17$ (ou o contrário).

$$\boxed{(xy)_{máx} = 272}$$

Professor, mas na prova eu terei que desenhar essa tabela toda?

Na prática, não! O interessante é perceber que o produto aumenta até atingir um máximo e depois começa a diminuir! Assim, você pode ir pulando algumas possibilidades (como fizemos na última tabela de x=7 para x=15) até encontrar o momento em que o produto começa a diminuir.

Gabarito: Letra C

4. (FGV/IMBEL/2021) Sabe-se que a soma de dez números naturais é par. Em relação a esses dez números é correto afirmar que

A) todos são, obrigatoriamente, pares.
B) todos são, obrigatoriamente, ímpares.
C) pelo menos um deles é par.
D) a quantidade de números pares é ímpar.
E) a quantidade de números ímpares é par.

Comentários:

Vamos comentar alternativa por alternativa!

A) todos são, obrigatoriamente, pares.
Errado. Isso não é necessariamente verdade, pessoal. É bem verdade que se somarmos dez números pares, vamos obter um número par. No entanto, se somarmos dez números ímpares, também obteremos um número par. Faça o teste!

B) todos são, obrigatoriamente, ímpares.
Errado. É a mesma justificativa dada anteriormente. Se somarmos dez números ímpares, vamos obter um número par! Mas essa obrigatoriedade não existe! Da mesma forma, se somarmos dez números pares, também vamos obter um número par.

C) pelo menos um deles é par.
Errado. Por exemplo, em uma situação em que nove são ímpares (I) e apenas um é par, teremos o seguinte:

$$\underbrace{I+I}_{par}+\underbrace{I+I}_{par}+\underbrace{I+I}_{par}+\underbrace{I+I}_{par}+\underbrace{I+P}_{ímpar}=\underbrace{P+I}_{ímpar}=I$$

D) a quantidade de números pares é ímpar.
Errado. Na situação da alternativa anterior temos uma quantidade de números pares que é ímpar. Mesmo assim, vimos que o resultado foi um número ímpar.

E) a quantidade de números ímpares é par.

Correto. Precisamos de uma quantidade par de números ímpares, pois sabemos que **a soma de dois ímpares sempre resultará em um par**. Com isso, esses pares, ao serem somado com outros números pares, resultará em um número par.

Gabarito: LETRA E.

5. (FGV/MEC/2009) Sejam X e Y dois números inteiros positivos. Se $X^2 + Y^2$ é ímpar, então se pode afirmar de maneira correta que:

A) X^Y é par.
B) Y^X é par.
C) XY é par.
D) $X - Y$ é par.
E)$X + Y$ é par.

Comentários:

Moçada, antes de qualquer análise, é importante guardar que **X e Y são dois números inteiros positivos**. Ou seja, **não são números negativos, nem quebrados, nem mesmo podem ser iguais a zero**. Tudo bem? Além disso, vamos lembrar o seguinte:

- $\text{PAR} \pm \text{PAR} = \text{PAR}$
- $\text{ÍMPAR} \pm \text{ÍMPAR} = \text{PAR}$
- $\textbf{ÍMPAR} \pm \textbf{PAR} = \textbf{ÍMPAR}$

A única opção em que o resultado de uma soma ou subtração é um número ímpar, **é quando um dos números é ímpar e o outro é par**. Assim, se X^2+Y^2 é ímpar, ou X^2 é par e Y^2 é ímpar OU X^2 é ímpar e Y^2 é par.

Perceba que um número par elevado a qualquer expoente inteiro positivo será sempre um número par. O mesmo acontece com um número ímpar. Para começar a entender esse fato, **você pode pensar em alguns exemplos, tais como o $\mathbf{3^2 = 9, 3^3 = 27, 4^2 = 16, 4^3 = 64}$.**

Isso acontece, pois, **um número par sempre terá o fator "2".** Portanto, quando multiplicar esse número várias vezes, o 2 sempre estará lá!

$$(2n)^5 = (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) = 2 \cdot (2^4 n)$$

Por sua vez, **números ímpares não possuem o fator "2".** Se você multiplica um número que não tem o fator 2 pelo mesmo número, o resultado continuará sem o fator "2", ou seja, será um número ímpar. Tudo bem?! Essas conclusões são válidas apenas quando temos expoentes números inteiros positivos.

Agora, voltando para o problema, vamos analisar as alternativas.

A) X^Y é par.

ERRADO. Pessoal, se X for o número par, então estaria correto. No entanto, **X pode ser o ímpar**. Não sabemos. Nesse sentido, X^Y também pode ser um número ímpar.

B) Y^X é par.

ERRADO. É pelo mesmo motivo da alternativa anterior: se Y fosse o número par, então estaria correto. No entanto, **Y pode ser o ímpar**. Não sabemos. Nesse sentido, Y^X também pode ser um número ímpar.

C) XY é par.

CERTÍSSIMO. O produto de um número par por um número ímpar é um número par. Isso acontece pois o número par possui o fator "2", que leva o fator para a multiplicação.

D) $X - Y$ é par.

ERRADO. Sabemos que a soma ou subtração de um número par com um número ímpar, resultará em um número ímpar.

E)$X + Y$ é par.

ERRADO. Pelo mesmo motivo do item anterior: a soma ou subtração de um número par com um número ímpar, resultará em um número ímpar.

Gabarito: LETRA C.

6. (FGV/SEFAZ-MS/2006) O maior número inteiro que é menor que ou igual a -5,7 é:

A) -6

B) -5

C) -4

D) -3

E) -2

Comentários:

Os números inteiros são os números "não quebrados", podendo ser negativos ou positivos. Veja que **-5,7 não é um número inteiro**. Queremos o primeiro inteiro menor do que ele! Ora, -6 é o número que a questão está procurando.

Perceba que **não pode ser -5 pois o -5 é MAIOR que -5,7**. O enunciado pergunta pelo maior inteiro que é menor do que -5,7. A banca tentou pegar o candidato com essa história de "maior que é menor", causando confusão facilmente.

Gabarito: LETRA A.

7. (FGV/ALESP/2002) Um número racional qualquer:
A) Tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.
B) Tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.
C) Não se pode expressar em forma decimal exata.
D) Tem sempre como denominador um número diferente de zero.

Comentários:
A) Tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.
ERRADO. Vimos na teoria que as dízimas periódicas, **apesar da representação decimal infinita, são números racionais**, pois conseguimos expressá-la na forma de uma fração, com denominador não-nulo.

B) Tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.
ERRADO. Há números racionais que possuem um número finito de casas decimais. Para isso, basta lembrar que **0,5, por exemplo, é um número racional**.

C) Não se pode expressar em forma decimal exata.
ERRADO. Um número racional é qualquer número que pode ser escrito na forma de uma fração denominador não nulo. Como consequência, **tanto números decimais exatos quanto dízimas periódicas são exemplos de números racionais**.

D) Tem sempre como denominador um número diferente de zero.
CERTO. Pessoal, é exatamente parte da definição de um número racional: **qualquer número que pode ser escrito na forma de uma fração, com denominador diferente de zero**. Caso não seja possível, teremos um número irracional.

Gabarito: LETRA D.

8. (FGV/AL-MT/2013) Suponha que o valor da expressão $\frac{5x}{6} - \frac{x}{2}$ seja um número inteiro. O valor de x é necessariamente
A) positivo.
B) par.
C) múltiplo de 3.
D) múltiplo de 6.
E) múltiplo de 12.

Comentários:
Sabemos que um número inteiro é um número "não quebrado". **Não pode ter casa decimal!** A expressão do enunciado foi:

$$E = \frac{5x}{6} - \frac{x}{2}$$

Vamos tirar o MMC e calcular na forma de uma única fração.

$$E = \frac{5x}{6} - \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad E = \frac{10x - 6x}{12} \quad \rightarrow \quad E = \frac{4x}{12} \quad \rightarrow \quad E = \frac{x}{3}$$

Note que **x deve ser um múltiplo de 3** (3, 6, 9, 12, 15, 18, ...). Caso não fosse, quando o dividíssemos por 3, resultaria em um número quebrado e, **portanto, não teríamos um inteiro**.

Gabarito: LETRA C.

LISTA DE QUESTÕES - FGV

Introdução à Teoria dos Conjuntos

1. (FGV/TCE-SP/2023) Considere o conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$. O número de subconjuntos de A com 3 elementos, sendo pelo menos um elemento ímpar, é:

A) 16

B) 15

C) 14

D) 12

E) 8

2. (FGV/PREF. SALVADOR/2019) Em uma classe de 20 estudantes, 12 são meninas. Além disso, dos 20 estudantes, 15 gostam de Matemática. É correto concluir que

a) nenhuma menina gosta de Matemática.

b) todas as meninas gostam de Matemática.

c) no máximo 7 meninas gostam de Matemática.

d) no mínimo 7 meninas gostam de Matemática.

e) exatamente 7 meninas gostam de Matemática.

3. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Na matemática, as coleções são chamadas de conjuntos. Se uma coleção tem apenas um elemento, ela é dita um conjunto unitário. Um exemplo de conjunto unitário é a coleção formada pelos números que são:

a) ao mesmo tempo, divisores de 4 e 9;

b) divisores de 4;

c) divisores de 9;

d) maiores que 4 e menores que 9;

e) formados pelos algarismos 4 e 9.

4. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Conjunto é o nome dado, na Matemática, a qualquer coleção. Entretanto, uma coleção pode não ter elementos. Nesse caso, diz-se que esse é um conjunto vazio. Um exemplo de conjunto vazio é a coleção:

a) de meses do ano que começam pela letra J;

b) de dias da semana que começam pela letra T;

c) dos números que são, ao mesmo tempo, pares e ímpares;

d) dos números menores que 10 e maiores que 6;

e) das pessoas brasileiras que são casadas.

5. (FGV/CODEBA/2010) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 2, 4\}$ dois conjuntos. Com relação aos conjuntos A e B, analise as afirmativas a seguir:

I. $B \subset A$
II. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
III. $A \cap B = \{0, 2\}$

Está(ão) correta(s) somente
a) I.
b) II.
c) III.
d) I e II.
e) II e III.

6. (FGV/BADESC/2010) Dado um conjunto A, chamamos subconjunto próprio não vazio de A a qualquer conjunto que pode ser formado com parte dos elementos do conjunto A, desde que:

- algum elemento de A seja escolhido;
- não sejam escolhidos todos os elementos de A.

Sabemos que a quantidade de subconjuntos próprios não vazios de A é 14. A quantidade de elementos de A é igual a:
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

7. (FGV/ALESP/2002) São dados os conjuntos: D = divisores de 24 (divisores positivos), M = múltiplos de 3 (múltiplos positivos), S = D ∩ M e n = números de subconjuntos de S. Portanto, n é igual a:
a) 64
b) 16
c) 32
d) 8

Gabarito

1. LETRA A
2. LETRA D
3. LETRA A
4. LETRA C
5. LETRA E
6. LETRA A
7. LETRA B

Lista de Questões - FGV

Operações com Conjuntos

1. (FGV/CM-SP/2024) Sabe-se que os conjuntos $A = \{1, 3, 5, x, 8\}$ e $B = \{2, 3, y, 7, 8\}$ têm, cada um, 5 elementos. Sabe-se, também, que a interseção de A e B tem 4 elementos. A soma dos elementos da união de A e B é

A) 26.
B) 27.
C) 28.
D) 29.
E) 30.

2. (FGV/BANESTES/2023) Sejam A e B dois conjuntos finitos tais que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $\{1, 2, 5\}$ é o conjunto de elementos que estão em A e não estão em B. O conjunto dos elementos que não estão em A ou estão em B é

A) {3, 4}.
B) {3, 6}.
C) {3, 4, 6}.
D) {4, 6, 7}.
E) {3, 4, 6, 7}.

3. (FGV/SSP-AM/2022) Sobre dois conjuntos A e B sabe-se que:

- A união de A e B tem 130 elementos.
- A diferença B – A tem 50 elementos.
- A diferença A – B tem 60 elementos.

Sendo x o número de elementos de A e y o número de elementos de B, o valor de x + y é igual a

A) 110.
B) 120.
C) 130.
D) 140.
E) 150.

4. (FGV/SEFAZ-MS/2006) Os conjuntos A, B e C satisfazem $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$:

a) nunca.
b) se e somente se A = B = C.
c) se e somente se B = C.

d) se e somente se B ∩ C = ∅.

e) sempre.

5. (FGV/SEFAZ-MS/2006) Se X, Y e Z são conjuntos, $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup Z$:

a) nunca.

b) se e somente se X = Y = Z.

c) se e somente se $Z \subset X$

d) se e somente se $Z \subset Y$

e) sempre.

GABARITO

1. LETRA A
2. LETRA E
3. LETRA E
4. LETRA E
5. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES - FGV

Princípio da Inclusão-Exclusão

1. (FGV/GCM-SJC/2024) Em um grupo de 50 guardas, 35 estão de bermuda e 27 estão de boné. Sabe-se também que, nesse grupo, todos estão usando bermuda ou boné. O número de guardas, nesse grupo, que estão usando bermuda e boné é

A) 35.

B) 27.

C) 23.

D) 15.

E) 12.

2. (FGV/ALESC/2024) Em uma prateleira há 15 latas iguais e vazias. Em algumas delas são colocadas bolinhas pretas e bolinhas brancas. Sabe-se que 7 latas contêm bolinhas pretas, 5 latas contêm bolinhas brancas e 3 latas contém bolinhas pretas e bolinhas brancas. O número de latas que ficaram vazias é igual a

A) 3.

B) 4.

C) 5.

D) 6.

E) 7.

3. (FGV/CM-FORTALEZA/2024) Uma turma é composta por 40 alunos, dos quais:

- 12 gostam de Matemática, mas não de História;
- 19 não gostam de Matemática.

A quantidade de alunos dessa turma que gostam, simultaneamente, de Matemática e de História é

A) 6.

B) 7.

C) 8.

D) 9.

E) 10.

4. (FGV/ALEP-PR/2024) Uma escola de ensino médio oferece a seus estudantes cursos extras de francês, italiano e alemão. Os estudantes podem frequentar um ou mais desses cursos. Uma turma dessa escola tem 50 alunos no total. Todos os estudantes dessa turma frequentam pelo menos um dos três cursos extras de idiomas oferecidos pela escola, sendo que 30 frequentam o curso de francês, 20 frequentam

italiano e 10 frequentam alemão. Sabe-se ainda que 10 frequentam simultaneamente francês e italiano, 8 frequentam simultaneamente francês e alemão e 6 frequentam simultaneamente italiano e alemão. Assinale a opção que indica o número de alunos da turma frequentam simultaneamente os três cursos de idiomas oferecidos pela escola.

A) 6
B) 10
C) 14
D) 34
E) 86

5. (FGV/CÂMARA DOS DEPUTADOS/2023) Dra. Míriam é a responsável pelo atendimento psicológico de 97 estudantes de uma escola, às segundas, quartas e sextas. Há 21 estudantes que só procuram a Dra. Míriam na segunda-feira, 20 que só comparecem às quartas e 17 que só vão às sextas. Dra. Míriam atende 48 estudantes às segundas, 53 às quartas e 43 às sextas. O número de estudantes que são atendidos três vezes por semana é igual a

A) 7.
B) 8.
C) 9.
D) 10.
E) 11.

6. (FGV/PM-SP/2023) Em um conjunto de 20 objetos, 12 têm a característica A e 9 têm a característica B. Apenas 3 dos objetos não possuem nem a característica A, nem a característica B. Assim, a quantidade de objetos desse conjunto que possuem simultaneamente as características A e B é igual a

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.

7. (FGV/MPE-SP/2023) Em um grupo de 55 pessoas, 32 jogam pôquer, 36 jogam truco, 34 jogam buraco, 18 jogam pôquer e truco, 21 jogam truco e buraco e 20 jogam buraco e pôquer. Se há, no grupo, uma única pessoa que não joga quaisquer desses três jogos de cartas, então a quantidade de pessoas que jogam esses três jogos é

A) 12.
B) 11.
C) 9.
D) 7.
E) 6.

8. (FGV/SEFAZ-MG/2023) Sobre 3 conjuntos A, B e C, sabe-se que:

A tem 16 elementos;
B tem 24 elementos;
C tem 18 elementos;
$A \cap B$ tem 5 elementos;
$B \cap C$ tem 7 elementos;
$A \cap B \cap C$ tem 3 elementos;
$A - (B \cup C)$ tem 8 elementos.

O número de elementos do conjunto $A \cup B \cup C$ é igual a
a) 35.
b) 43.
c) 47.
d) 48.
e) 58.

9. (FGV/SENADO FEDERAL/2022) Um clube tem 180 associados que participam de suas duas atividades sociais. Há 130 frequentadores da cinemateca, enquanto 92 sócios participam das aulas de dança de salão. Sendo assim, é correto afirmar que
a) mais de 40 sócios participam das duas atividades.
b) menos de 30 sócios participam das duas atividades.
c) mais de 55 sócios só vão às aulas de dança.
d) menos de 80 sócios só vão à cinemateca.
e) menos de 45 sócios só vão às aulas de dança.

10. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Em uma assembleia com 172 votantes, duas propostas independentes, A e B, foram colocadas em votação. Cada votante votou a favor ou contra cada uma das duas propostas. Sabe-se que 138 votaram a favor da proposta A, 74 votaram a favor da proposta B e 32 votaram contra as duas propostas. O número de votantes que votaram a favor da proposta A e contra a proposta B é
a) 66.
b) 69.
c) 72.
d) 74.
e) 140.

11. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) A prefeitura de certo município formou com seus funcionários 3 comissões para examinar assuntos diferentes. Sabe-se que:

- há funcionários que participam de mais de uma comissão.
- cada comissão é formada por 15 funcionários.

- em cada comissão há 5 funcionários que não participam de mais nenhuma outra comissão.
- há 2 funcionários que participam das três comissões.

O número de funcionários que participam de, pelo menos, uma comissão é igual a
a) 29.
b) 31.
c) 36.
d) 39.
e) 43.

12. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Uma empresa disponibilizou 3 cursos de aperfeiçoamento para seus funcionários: o Curso A, o Curso B e o Curso C. Como o horário permitia, cada funcionário poderia se matricular em mais de um curso. Terminado o prazo de matrículas, verificou-se que 8 funcionários se matricularam no curso A, 10 no curso B e 12 no curso C. Havia 4 funcionários matriculados nos cursos A e B, 4 funcionários nos cursos B e C e, também, 4 nos cursos A e C. Sabe-se ainda que há 1 único funcionário matriculado apenas no curso A. O número de funcionários que estão matriculados em ao menos 1 curso é
a) 19.
b) 21.
c) 23.
d) 27.
e) 30.

13. (FGV/SEJUSP-MG/2022) Um grupo de 60 estudantes que se formaram juntos no Ensino Médio resolveu formar 2 grupos no WhatsApp: GP1 e GP2. Sabe-se que dos 60 estudantes, 7 resolveram não participar do GP1 nem do GP2 e que os números de participantes do GP1 e do GP2 são, respetivamente, 41 e 32. O número de estudantes que participam simultaneamente dos dois grupos é
a) 7.
b) 13.
c) 20.
d) 23.
e) 32.

14. (FGV/SEJUSP-MG/2022) Os conjuntos A, B e C possuem, cada um, 10 elementos e são tais que: A e B possuem elementos em comum, B e C possuem elementos em comum, mas A e C não possuem elementos comuns. Entre os elementos da união dos três conjuntos sabe-se que 8 elementos pertencem apenas ao conjunto A e 5 elementos pertencem apenas ao conjunto C. O número de elementos que pertencem apenas ao conjunto B é
a) 1.
b) 2.

c) 3.
d) 4.
e) 5.

15. (FGV/SEFAZ-ES/2022) Em um grupo de 70 pessoas, há 50 capixabas e 40 torcedores do Vasco. Em relação a esse grupo de pessoas, é correto concluir que

A) no máximo 20 são capixabas torcedores do Vasco.
B) no mínimo 20 não são nem capixabas nem torcedores do Vasco.
C) exatamente 30 são capixabas não torcedores do Vasco.
D) no máximo 40 são capixabas torcedores do Vasco.
E) é possível que nenhuma delas seja capixaba torcedor do Vasco.

16. (FGV/MPE-GO/2022) Em um grupo de 48 pessoas, há 35 advogados e 32 policiais. Nesse grupo, o número mínimo de pessoas que são ao mesmo tempo advogados e policiais é

A) 13.
B) 16.
C) 19.
D) 32.
E) 35.

17. (FGV/SEMSA-MANAUS/2022) Em um grupo de 50 pessoas, 27 gostam de filmes de suspense e 32 gostam de filmes de terror. Com relação a essas 50 pessoas, é correto concluir que

A) no máximo 18 delas não gostam de filmes de suspense nem de filmes de terror.
B) exatamente 9 delas gostam tanto de filmes de suspense como de filmes de terror.
C) exatamente 18 delas só gostam de filmes de suspense.
D) exatamente 23 delas só gostam de filmes de terror.
E) no mínimo 18 delas gostam tanto de filmes de suspense como de filmes de terror.

18. (FGV/MPE-GO/2022) Uma empresa possui 32 funcionários que trabalham nos setores A, B e C. Sabe-se que 20 funcionários trabalham no setor A, 14 funcionários trabalham no setor B e 9 funcionários trabalham no setor C. Há funcionários que trabalham simultaneamente nos setores A e B, há funcionários que trabalham simultaneamente nos setores A e C, mas nenhum funcionário trabalha simultaneamente nos setores B e C. O número de funcionários que trabalha apenas no setor A é igual a

A) 4
B) 5
C) 6
D) 8
E) 9

19. (FGV/SEMSA-MANAUS/2022) Uma pesquisa foi feita com 40 funcionários de uma empresa e entre as perguntas havia as que estão abaixo:

- Você tem filhos?
- Você tem animal de estimação?

20 pessoas responderam SIM para a primeira pergunta.
15 pessoas responderam SIM para a segunda pergunta.
11 pessoas deixaram as duas perguntas em branco.

As instruções da pesquisa estabeleciam que deixar em branco significaria dizer NÃO. Sendo assim, o número de pessoas que possuem filhos e animais de estimação é igual a

A) 2.
B) 3.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

20. (FGV/PC-RN/2021) Em um grupo de esportistas, 1/3 deles só gostam de vôlei e, dos demais, 2/5 gostam de vôlei e também de basquete. Todos os esportistas desse grupo gostam de, pelo menos, um desses dois esportes. Em relação ao total de membros desse grupo, a fração daqueles que só gostam de basquete é:

A) 2/3;
B) 2/5;
C) 3/5;
D) 4/15;
E) 1/15.

21. (FGV/IMBEL/2021) Os 38 empregados novos da fábrica de brinquedos BLIME estão passando por um treinamento inicial. Uma das tarefas do treinamento é a de assistir aos filmes A e B sobre o funcionamento de duas partes da fábrica. Em uma reunião com os novos empregados o coordenador perguntou a todos quem já tinha assistido aos filmes recomendados e ele percebeu, pelas respostas, que

- N pessoas assistiram ao filme A.
- 2N pessoas assistiram ao filme B.
- 3N pessoas não assistiram a nenhum dos dois filmes.

É correto concluir que o número mínimo de pessoas que assistiu aos dois filmes foi

A) 1.
B) 2.
C) 3.

D) 4.
E) 5.

22. **(FGV/IMBEL/2021) Trinta estudantes praticam judô, natação e basquete, sendo que todos eles praticam pelo menos um desses esportes. Há 15 que praticam judô, 17 que praticam natação e 12 que praticam basquete. Há 10 estudantes que praticam pelo menos dois esportes. O número de estudantes que praticam os três esportes é**
A) 4.
B) 5.
C) 6.
D) 7.
E) 8.

23. (FGV/PM-AM/2022) Em um grupo de 45 soldados, 27 gostam de marchar e 38 gostam de praticar tiro ao alvo. Sejam:

X: o número de soldados desse grupo que gostam de marchar e também de praticar tiro ao alvo;
Y: o número de soldados desse grupo que não gostam nem de marchar nem de praticar tiro ao alvo.

Nesse caso, é correto afirmar que
A) X é no máximo 20.
B) Y é no mínimo 7.
C) quando X = 23, tem-se Y = 7.
D) quando Y = 7, tem-se X = 20.
E) quando Y = 5, tem-se X = 25.

24. (FGV/PREF. SALVADOR/2019) 50 atletas estão treinando e todos usam bermuda e camiseta do mesmo modelo, mas com cores diversas. Entre esses atletas há 20 com bermudas brancas, 25 com camisetas brancas e 12 com bermudas e camisetas brancas. Assinale a opção que indica o número de atletas que não estão vestindo nenhuma peça branca.
a) 5
b) 13
c) 15
d) 17
e) 20

25. (FGV/PREF. ANGRA/2019) Aos 5 anos, toda criança deve tomar um reforço das vacinas tríplice e pólio. Uma pesquisa feita com as 80 crianças que entraram no 1º ano do Ensino Fundamental de uma escola mostrou que:

- 54 alunos tomaram a vacina tríplice.

- 52 alunos tomaram a vacina pólio.

- 16 alunos não tomaram nenhuma das duas vacinas.

O número de alunos que tomou as duas vacinas é

a) 42.

b) 44.

c) 46.

d) 48.

e) 50.

26. (FGV/MPE-RJ/2019) Sobre os conjuntos A e B, sabe-se que:

- $(A - B)$ **tem 7 elementos;**

- A tem 28 elementos;

- A união de A e B tem 38 elementos

O número de elementos do conjunto B é:

a) 10;

b) 18;

c) 19;

d) 31;

e) 35.

GABARITO

1. LETRA E
2. LETRA D
3. LETRA D
4. LETRA C
5. LETRA B
6. LETRA D
7. LETRA B
8. LETRA B
9. LETRA A
10. LETRA A
11. LETRA A
12. LETRA A
13. LETRA C
14. LETRA C
15. LETRA D
16. LETRA C
17. LETRA A
18. LETRA E
19. LETRA E
20. LETRA B
21. LETRA D
22. LETRA A
23. LETRA E
24. LETRA D
25. LETRA A

Lista de Questões - FGV

Conjuntos Numéricos

1. (FGV/MEC/2009) Sejam X e Y dois números inteiros positivos. Se $X^2 + Y^2$ é ímpar, então se pode afirmar de maneira correta que:

A) X^Y é par.

B) Y^X é par.

C) XY é par.

D) $X - Y$ é par.

E)$X + Y$ é par.

2. (FGV/SEFAZ-MS/2006) O maior número inteiro que é menor que ou igual a -5,7 é:

A) -6

B) -5

C) -4

D) -3

E) -2

3. (FGV/ALESP/2002) Um número racional qualquer:

A) Tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.

B) Tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.

C) Não se pode expressar em forma decimal exata.

D) Tem sempre como denominador um número diferente de zero.

4. (FGV/AL-MT/2013) Suponha que o valor da expressão $\frac{5x}{6} - \frac{x}{2}$ seja um número inteiro. O valor de x é necessariamente

A) positivo.

B) par.

C) múltiplo de 3.

D) múltiplo de 6.

E) múltiplo de 12.

GABARITO

1. LETRA C
2. LETRA A
3. LETRA D
4. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES - FGV

Problemas

1. (FGV/PREF. VITORIA/2024) Se a soma de 5 números inteiros positivos consecutivos dá resultado par, então, entre esses números

A) a maioria é ímpar.

B) o produto dos dois menores é ímpar.

C) o produto do maior com o menor ímpar.

D) a soma de todos os pares é ímpar.

E) a soma de todos os ímpares é par.

2. (FGV/BANESTES/2023) A quantidade de números inteiros e positivos formados por 2 algarismos cuja diferença vale 4 é igual a

A) 5.

B) 6.

C) 10.

D) 11.

E) 15.

3. (FGV/SEAD-AP/2022) A soma de dois números naturais é 33. O maior valor para o produto deles é

a) 271.

b) 271,75.

c) 272.

d) 272,25.

e) 273.

4. (FGV/IMBEL/2021) Sabe-se que a soma de dez números naturais é par. Em relação a esses dez números é correto afirmar que

A) todos são, obrigatoriamente, pares.

B) todos são, obrigatoriamente, ímpares.

C) pelo menos um deles é par.

D) a quantidade de números pares é ímpar.

E) a quantidade de números ímpares é par.

5. (FGV/MEC/2009) Sejam X e Y dois números inteiros positivos. Se $X^2 + Y^2$ é ímpar, então se pode afirmar de maneira correta que:

A) X^Y é par.

B) Y^X é par.

C) XY é par.

D) $X - Y$ é par.

E)$X + Y$ é par.

6. (FGV/SEFAZ-MS/2006) O maior número inteiro que é menor que ou igual a $-5,7$ é:

A) -6

B) -5

C) -4

D) -3

E) -2

7. (FGV/ALESP/2002) Um número racional qualquer:

A) Tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.

B) Tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.

C) Não se pode expressar em forma decimal exata.

D) Tem sempre como denominador um número diferente de zero.

8. (FGV/AL-MT/2013) Suponha que o valor da expressão $\frac{5x}{6} - \frac{x}{2}$ seja um número inteiro. O valor de x é necessariamente

A) positivo.

B) par.

C) múltiplo de 3.

D) múltiplo de 6.

E) múltiplo de 12.

GABARITO

1. LETRA E
2. LETRA D
3. LETRA C
4. LETRA E
5. LETRA C
6. LETRA A
7. LETRA D
8. LETRA C

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.