Aula 00

PM-SP (Oficial) Matemática

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

29 de Junho de 2024

Índice

AVISO IMPORTANTE!

Olá, Alunos (as)!

Passando para informá-los a respeito da **disposição das questões** dentro do nosso material didático. Informamos que a escolha das bancas, dentro dos nossos Livros Digitais, é feita de maneira estratégica e pedagógica pelos nossos professores a fim de proporcionar a melhor didática e o melhor direcionamento daquilo que mais se aproxima do formato de cobrança da banca do seu concurso.

Assim, o formato de questões divididas por tópico facilitará o seu processo de estudo, deixando mais alinhado às disposições constantes no edital.

No mais, continuaremos à disposição de todos no Fórum de dúvidas!

Atenciosamente,

Equipe Exatas

Estratégia Concursos

APRESENTAÇÃO DO CURSO

Olá, pessoal! Tudo bem?

É com grande satisfação que damos início ao nosso curso!

Os professores **Eduardo Mocellin, Francisco Rebouças, Luana Brandão, Djefferson Maranhão** e **Vinicius Veleda** ficarão responsáveis pelo **Livro Digital**.

Antes de continuarmos, vamos apresentar os professores do material escrito:

> **Eduardo Mocellin**: Fala, pessoal! Meu nome é Eduardo Mocellin, sou professor de Matemática e de Raciocínio Lógico do Estratégia Concursos e engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Sinto-me feliz em poder contribuir com a sua aprovação! Não deixe de me seguir no Instagram: **@edu.mocellin**
>
> **Francisco Rebouças**: Fala, alunos! Aqui é o Francisco Rebouças, professor de Matemática do Estratégia Concursos. Sou Engenheiro Aeroespacial formado pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Saiba que será uma honra fazer parte da sua jornada rumo à aprovação e que estaremos sempre aqui para auxiliá-los com o que precisarem. Um grande abraço e nos vemos nas aulas!
>
> **Luana Brandão:** Oi, pessoal! O meu nome é Luana Brandão e sou professora de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduada, Mestre e Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense. Passei nos concursos de Auditor Fiscal (2009/2010) e Analista Tributário (2009) da Receita Federal e de Auditor Fiscal do Estado do Rio de Janeiro (2010). Sou Auditora Fiscal do Estado do RJ desde 2010. Vamos juntos nesse caminho até a aprovação? **@professoraluanabrandao**
>
> **Djefferson Maranhão**: Olá, amigos do Estratégia Concursos, tudo bem? Meu nome é Djefferson Maranhão, professor de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduado em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Desde 2015, sou Auditor da Controladoria Geral do Estado do Maranhão (2015 - 5º lugar). Antes, porém, exerci os cargos de Analista de Sistemas na UFMA (2010 - 1º lugar) e no TJ-MA (2011 - 1º lugar). Já estive na posição de vocês e sei o quanto a vida de um concurseiro é um tanto atribulada! São vários assuntos para se dominar em um curto espaço de tempo. Por isso, contem comigo para auxiliá-los nessa jornada rumo à aprovação. Um grande abraço.
>
> **Vinicius Veleda:** Olá, caros alunos! Sou Auditor Fiscal do Estado do Rio Grande do Sul. Professor de Matemática e Matemática Financeira do Estratégia Concursos. Aprovado nos Concursos de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda dos Estados do Rio Grande do Sul (SEFAZ RS - 2019), Santa Catarina (SEFAZ SC - 2018) e Goiás (SEFAZ GO - 2018). Formado em Engenharia de Petróleo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com graduação sanduíche em Engenharia Geológica pela Universidade Politécnica de Madrid (UPM). Pela UFRJ, fui campeão sul americano do Petrobowl (Buenos Aires) e, posteriormente, Campeão Mundial (Dubai). Cursei meu ensino médio na Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx). Contem comigo nessa trajetória! **@viniciusveleda**

O material escrito em **PDF** está sendo construído para ser sua fonte **autossuficiente** de estudos. Isso significa que o livro digital será **completo** e **voltado para o seu edital**, justamente para que você não perca o seu precioso tempo "caçando por aí" o conteúdo que será cobrado na sua prova. Ademais, sempre que necessário, você poderá fazer perguntas sobre as aulas no **fórum de dúvidas**. **Bons estudos!**

TEORIA DOS CONJUNTOS

Introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição de Conjunto

Iniciaremos o nosso estudo da matemática pela **Teoria dos Conjuntos**. A escolha desse conteúdo é **cuidadosamente pensada** para que você possa formar **uma base sólida,** que lhe servirá de alicerce na construção de toda matemática necessária a sua prova.

A palavra "conjunto" significa exatamente o que você deve estar pensando: uma espécie de **grupo, lista** ou **uma coleção** de determinado objeto. Observe alguns exemplos de **como podemos representar** conjuntos na matemática:

- $A = \{a, b, c, d, e\}$
- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

O conjunto A é formado pelas **5 primeiras letras** no nosso alfabeto. O conjunto B é formado por **5 números pares**. O conjunto C é formado por **10 números ímpares**. Você pode estar se perguntando: *só podemos fazer conjuntos de números e letras?*

A resposta é não! Podemos criar conjuntos de basicamente qualquer coisa, desde um conjunto representando **os funcionários de determinada empresa** a **conjuntos formados por outros conjuntos!** Por exemplo, o conjunto E lista alguns professores de exatas do Estratégia Concursos.

- $\mathrm{E} = \{\text{Francisco}, \text{Eduardo}, \text{Vinicius}, \text{Luana}, \text{Djefferson}\}$

Primeiramente, note que um conjunto muitas vezes aparecerá com seus elementos listados **dentro de um par de chaves**. Por isso, sempre que for escrever algum conjunto, não esqueça de colocar seus elementos aqui dentro: $\{\ \}$. É também usual as pessoas nomearem seus conjuntos com letras maiúsculas, mas **isso não é mandatório, nem necessário,** em algumas situações.

Relação de Pertinência

Quando um elemento faz parte de determinado conjunto, dizemos que **o elemento PERTENCE ao conjunto**. Essa relação de pertinência **entre um elemento e um conjunto** é representada pelo símbolo $\in$.

- $b \in A$: **Lemos**: b **pertence** a A;
- $4 \in B$: **Lemos**: 4 **pertence** a B;
- $15 \in C$: **Lemos**: 15 **pertence** a C.

Atente-se à simbologia! Podemos dizer que um elemento **não pertence** a um determinado conjunto. Para isso, utilizamos o símbolo "não pertence": $\notin$.

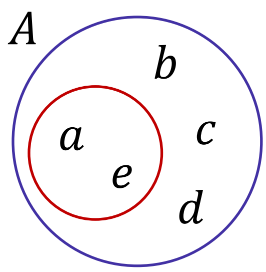
- $z \notin A$: z **não pertence** a A;
- $100 \notin B$: 100 **não pertence** a B;
- Beltrano $\notin$ E : Beltrano **não pertence** a E.

Relação de Inclusão

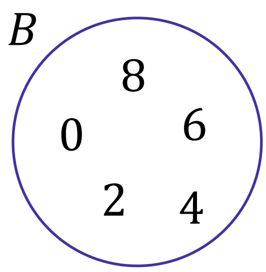
Existe mais um tipo de relação que devemos estudar: **a relação de inclusão**. Nesse tipo de relação, é estabelecido **um relacionamento entre dois conjuntos** e não mais entre um elemento e outro conjunto. Para isso, usamos uma simbologia específica que você deverá guardar: $\subset, \not\subset, \supset$ *e* $\not\supset$. Vamos ver com calma o que cada um deles diz! Considere: $\boldsymbol{A = \{a, b, c, d, e\}}$, $\boldsymbol{B = \{0, 2, 4, 6, 8\}}$ e $\boldsymbol{C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}}$.

- $\{a, e\} \subset A$: **Lemos**: $\{a, e\}$ **está contido** em A;
- $\{0, 2, 8\} \subset B$: **Lemos**: $\{0, 2, 8\}$ **está contido** em B;

Perceba que agora não estamos estabelecemos uma relação entre um elemento e um conjunto**. A relação de inclusão envolve <u>2 conjuntos</u>!** Diante disso, podemos introduzir um novo termo: **o subconjunto**. O subconjunto nada mais é do que **parte de um conjunto maior**. Quando dizemos, por exemplo, que $\boldsymbol{\{a, e\}}$ **está contido em** $\boldsymbol{A}$, estamos dizendo, com outras palavras, que $\{a, e\}$ é um subconjunto de $\boldsymbol{A}$.



O diagrama acima ajuda a compreender a relação de inclusão. Observe que **o conjunto** $\boldsymbol{\{a, e\}}$ **está inteiramente contido em** $\boldsymbol{A}$. Nessas condições, dizemos que $\{a, e\}$ está contido em A ou ainda que $\{a, e\}$ é um subconjunto de A. Algumas vezes, você poderá ver **o termo "parte" sendo usado como sinônimo de subconjunto**. Agora, imagine a seguinte situação:



Nesse caso, temos que $\{a, e\} \not\subset B$: **Lemos**: $\{a, e\}$ não está contido em B ou $\{a, e\}$ não é um subconjunto de B. Vamos ver mais alguns exemplos de quando **um conjunto não está contido em outro**:

- $\{a, e, f\} \not\subset A$
- $\{1, 3, 5\} \not\subset B$
- $\{0, 1\} \not\subset C$
- $\{\text{Sicrano, Beltrano}\} \not\subset \text{E}$

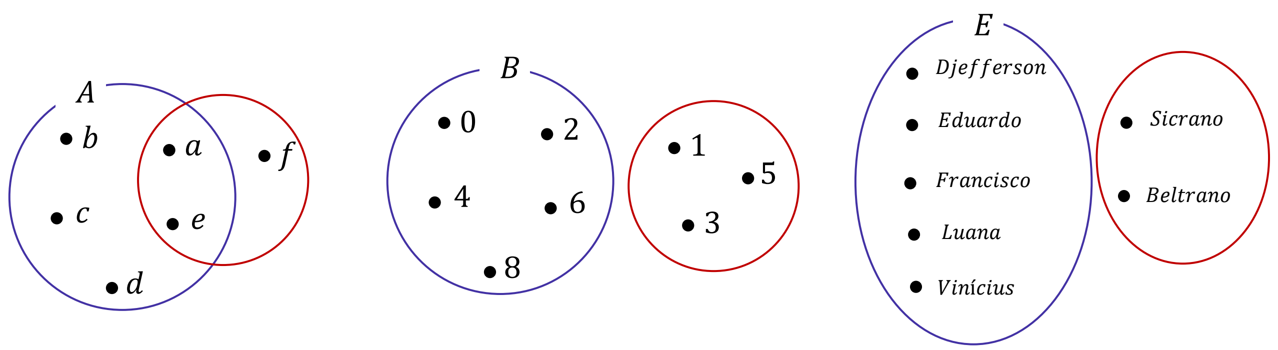
Perceba que **basta um elemento do conjunto não pertencer** ao conjunto maior que **não poderemos estabelecer uma relação de inclusão** entre os dois conjuntos e, portanto, dizemos que um não está contido no outro. Pessoal, **se $\{a, e\}$ está contido em A,** então também podemos dizer que **A contém $\{a, e\}$**. Quando queremos expressar essa ideia de que um conjunto maior contém determinado subconjunto, utilizamos o símbolo $\supset$.

- $A \supset \{a, e\}$: A **contém** $\{a, e\}$
- $B \supset \{0, 2, 8\}$: B **contém** $\{0, 2, 8\}$
- $C \supset \{1, 3, 5, 19\}$: C **contém** $\{1, 3, 5, 19\}$
- $\text{E} \supset \{\text{Francisco, Eduardo}\}$: E **contém** $\{\text{Francisco, Eduardo}\}$

Analogamente, podemos estender o raciocínio para quando queremos dizer que determinado conjunto **não contém outro**. Nessas situações, utilizamos $\not\supset$.

- $A \not\supset \{a, e, f\}$: A **não contém** $\{a, e, f\}$
- $C \not\supset \{0, 1\}$: C **não contém** $\{0, 1\}$
- $\text{E} \not\supset \{\text{Sicrano, Beltrano}\}$ -- E **não contém** $\{\text{Sicrano, Beltrano}\}$

ESQUEMATIZANDO



$A \not\supset \{a, e, f\}$ $\quad$ $B \not\supset \{1, 3, 5\}$ $\quad$ $\text{E} \not\supset \{\text{Sicrano, Beltrano}\}$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. PIÊN/2023) Sejam A, B e C conjuntos dados por $A = \{-1,2,9,7,3\}$, $B = \{2,7\}$ e $C = \{-1,0\}$. Assinale a alternativa **CORRETA**.

A) $0 \in A$
B) $7 \subset A$
C) $B \subset A$
D) $C \subset A$
E) $-1 \notin A$

Comentários:

Vamos verificar se cada alternativa, de acordo com a definição dos conjuntos A, B e C.

A) $0 \in A$
Falsa, pois 0 **não** está no conjunto $A = \{-1,2,9,7,3\}$.

B) $7 \subset A$
Falsa, pois **7 não é um conjunto, mas um elemento**. Não podemos dizer que um elemento está contido em outro conjunto.

C) $B \subset A$
Verdadeira, pois todos os elementos de $B = \{2,7\}$ também estão no conjunto A.

D) $C \subset A$
Falsa, pois $C = \{-1,0\}$ tem um elemento, 0, que não está no conjunto A.

E) $-1 \notin A$
Falsa, pois -1 está no conjunto A.

Gabarito: LETRA C.

Igualdade entre Conjuntos

Pessoal, dois conjuntos são considerados iguais (ou idênticos) se eles possuem **exatamente os mesmos elementos!** Todo elemento que estiver em um deve necessariamente estar no outro. Por exemplo, considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 2,1\}$. Nessa situação, podemos escrever que $A = B$.

Professor, mas a ordem está diferente!

Não importa! O importante é que todos elementos de A são os mesmos elementos de B.

HORA DE PRATICAR!

(MPE-GO/2022) Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{0, 8, 2\}$ e $\{x, y, 2\}$ são iguais, podemos afirmar que:
A) $x = 0$ e $y = 8$
B) $x + y = 8$
C) $x < y$
D) $x + 2y = 8$

Comentários:
Para que os dois conjuntos sejam iguais, **seus elementos devem ser iguais**. Note que o "2" já aparece nos dois conjuntos, então não vamos nos preocupar com ele.

$$\{0, 8, 2\} \qquad \{x, y, 2\}$$

Com isso, observe que **podemos ter duas situações**.

1ª situação) $x = 0$ e $y = 8$
2ª situação) $x = 8$ e $y = 0$

Sabendo disso, vamos analisar as alternativas.

A) $x = 0$ e $y = 8$
Errado. Essa é a nossa primeira situação, que não é necessariamente verdade. Também é uma possibilidade o caso em que $x = 8$ e $y = 0$.

B) $x + y = 8$
Correto. Esse é nosso gabarito, pessoal. Verifique que **independentemente da situação**, sempre vamos ter $x + y = 8$. Afinal, sempre um vai ser 0 (zero) e o outro será 8 (oito), de forma que a soma é sempre 8 (oito).

C) $x < y$
Errado. Essa afirmação é verdade apenas para a primeira situação. Como podemos ter o caso em que $x = 8$ e $y = 0$, tem-se também que x pode ser maior que y.

D) $x + 2y = 8$
Errado. Essa equação é válida apenas para a segunda situação. No caso em que $x = 0$ e $y = 8$, já é possível verificar que ela é inválida.

Gabarito: LETRA B.

Subconjuntos

Vamos aprofundar um pouco o nosso estudo sobre **os subconjuntos**. Para começar, tente dizer quais são os subconjuntos do conjunto $A = \{a, b\}$. *Pronto?* Observe como fica:

Conjunto	Subconjuntos
$A = \{a, b\}$	$\emptyset$
	$\{a\}$
	$\{b\}$
	$\{a, b\}$

A tabela acima lista todos os subconjuntos que podemos formar utilizando o conjunto A. Sabendo disso, podemos escrever as seguintes relações:

- $\emptyset \subset A$
- $\{a\} \subset A$
- $\{b\} \subset A$
- $\{a, b\} \subset A$

Devemos falar um pouco do **conjunto vazio e conjunto unitário**. O conjunto vazio, como o próprio nome sugere, **é um conjunto que não possui elementos**! É representado por meio do **símbolo** $\emptyset$ mas também pode aparecer como um simples par de chaves $\{\,\}$. Já **o conjunto unitário** é todo conjunto que **possui um único elemento**!

TOME NOTA!

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

Seja X um conjunto genérico, então:

$$\emptyset \subset X \qquad ou \qquad \{\,\} \subset X$$

Observe que $\{a, b\} \subset A$, indicando que **qualquer conjunto é também um subconjunto de si mesmo**! Seja $B = \{a, b, c\}$. Vamos listar os seus subconjuntos também?

Conjunto	Subconjuntos
$B = \{a, b, c\}$	$\emptyset$
	$\{a\}$
	$\{b\}$
	$\{c\}$
	$\{a, b\}$
	$\{a, c\}$
	$\{b, c\}$
	$\{a, b, c\}$

Quando um subconjunto de B é diferente do próprio B, chamamos ele de **subconjunto próprio de B**. Por exemplo, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ são subconjuntos próprios de B. Já o subconjunto $\{a, b, c\}$ é denominado **impróprio** pois é igual ao próprio B! Com os conjuntos listados na tabela acima são subconjuntos de B, então podemos escrever:

- $\emptyset \subset B$
- $\{a\} \subset B$
- $\{b\} \subset B$
- $\{c\} \subset B$
- $\{a, b\} \subset B$
- $\{a, c\} \subset B$
- $\{b, c\} \subset B$
- $\{a, b, c\} \subset$

Pessoal, observe que **os subconjuntos de um conjunto são apenas diferentes combinações de seus elementos**. Portanto, se você precisar listar os subconjuntos, siga os seguintes passos:

PRESTE MAIS
ATENÇÃO!

Passo 1: O primeiro conjunto que você deve anotar como subconjunto é o **conjunto vazio**.

Passo 2: Depois, transforme em subconjunto cada elemento, um por um.

Passo 3: Em seguida, escreva os subconjuntos formado por pares de elementos.

Passo 4: Acabando os pares, pegue os trios e assim sucessivamente.

Seguindo essa receita, vamos listar os subconjuntos de $C = \{1, 2, 3\}$?

Passo 1: Você não deve esquecer que **o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto**, portanto:

$$\emptyset$$

Passo 2: Transformando cada elemento em um subconjunto, **um por um**.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$$

Passo 3: Escrever os subconjuntos formado por **pares** de elementos.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}$$

Passo 4: Ir para os trios.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}, \{1, 2, 3\}$$

Como o conjunto C só possui 3 elementos, encerramos por aqui! Listamos todos os subconjuntos dele. Observe que quando tínhamos um conjunto com **2 elementos, obtivemos 4 subconjuntos**. Ao aumentar um elemento no conjunto, **passamos a ter 8 subconjuntos**. Será que é possível estabelecer uma fórmula para calcular **o número de subconjuntos baseado na quantidade de elementos de um conjunto**?

É possível sim e **a fórmula é bem simples**. Seja $n(A)$ **o número de elementos de um conjunto A**. Então, **o número de subconjuntos de A, n_{S_A}**, é dado por:

$$\boxed{n_{S_A} = 2^{n(A)}}$$

Por exemplo, vamos voltar no conjunto $C = \{1, 2, 3\}$. Como ele tem **três elementos**, para encontrar o número de subconjuntos de C, fazemos assim:

$$n_{S_C} = 2^{n(C)} \quad \rightarrow \quad n_{S_C} = 2^3 \quad \rightarrow \quad n_{S_C} = 8$$

Logo, C tem **oito subconjuntos**.

(Pref. Tuparetema/2024) Julgue o item:

Um conjunto não pode ser um subconjunto de si mesmo.

Comentários:
Para julgar o item, precisamos saber o que é um subconjunto. Um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B **se todos os elementos de A também pertencem a B**. Por exemplo, $\{a, b\}$ é um subconjunto de $\{a, b, c\}$, mas $\{a, d\}$ não é um subconjunto de $\{a, b, c\}$. A relação de subconjunto é representada pelo símbolo $\subseteq$. Podemos escrever $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$, mas não podemos escrever $\{a, d\} \subseteq \{a, b, c\}$.

Uma propriedade importante da relação de subconjunto é que todo conjunto é um subconjunto de si mesmo. **Isso significa que qualquer conjunto A satisfaz $A \subseteq A$, pois todos os elementos de A pertencem a A.** Portanto, o item está errado. Um conjunto pode sim ser um subconjunto de si mesmo.

Gabarito: ERRADO.

Conjunto das Partes

Você sabia que **podemos juntar todos os subconjuntos de um conjunto para formar um novo conjunto**? Esse novo conjunto formado é denominado **conjunto das partes** e é representado pelo **símbolo** $\wp$. Por exemplo, os **conjuntos das partes** de $A = \{a, b\}$ e de $B = \{a, b, c\}$ são:

$$\wp(A) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\wp(B) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Observe que $\wp(A)$ e $\wp(B)$ são **conjuntos formados por outros conjuntos**! Note ainda que **a sua quantidade de elementos é exatamente a quantidade de subconjuntos** calculada pela fórmula $\boldsymbol{nS_A = 2^{n(A)}}$. Um outro ponto que chamamos atenção é que, no conjunto das partes, listamos **o conjunto vazio** $\{\ \}$ explicitamente com um dos seus elementos.

HORA DE PRATICAR!

(CRQ 4/2023) Considerem-se A o conjunto dos meses do ano que começam com vogal, B o conjunto dos meses do ano que começam com consoante e C o conjunto dos meses do ano que começam com a letra J. Com base nessas informações, julgue o item.

O conjunto das partes de A tem 8 subconjuntos não vazios.

Comentários:
Vamos lá!

conjunto A é **formado pelos meses do ano que começam com vogal**, ou seja:

$$\mathrm{A} = \{\text{abril, agosto, outubro}\}$$

O **conjunto das partes de A é o conjunto que contém todos os subconjuntos possíveis de A**, incluindo o subconjunto vazio e o próprio A. Para calcular o número de elementos do conjunto das partes de um conjunto finito, usa-se a fórmula $\boldsymbol{2^n}$**,** onde n é o número de elementos do conjunto original. No caso de A, $n = 3$, então o conjunto das partes de A tem $2^3 = \mathbf{8}$ **elementos**.

Porém, desses 8 elementos, um deles é o subconjunto vazio. Portanto, **o conjunto das partes de A tem 7 subconjuntos não vazios**, e não 8 como afirma o item.

Os subconjuntos não vazios de A são: {abril}, {agosto}, {outubro}, {abril, agosto}, {abril, outubro}, {agosto, outubro} e {abril, agosto, outubro}.

Gabarito: ERRADO.

INDO MAIS FUNDO!

Observe o conjunto F exemplificado abaixo.

$$F = \{1, 2, 3, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{W\}\}$$

Assim como o conjunto das partes, ***F* é um conjunto que possui como elemento outros conjuntos**. Note que o conjunto $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ **é um elemento de $\boldsymbol{F}$**. Nessas situações, e somente nelas, podemos escrever $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \in \boldsymbol{F}$. Galera, muita atenção aqui! $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ **não é um subconjunto de F, é um elemento!** Perceba que ele está listado juntamente com os demais elementos!

- $1 \in F$
- $2 \in F$
- $3 \in F$
- $\{a, b, c\} \in F$
- $\{d, e, f\} \in F$
- $\{W\} \in F$

E nesses casos, *quando usaremos a relação de inclusão?* Veja alguns exemplos de subconjuntos de F:

- $\{1\} \subset F$
- $\{1, 2\} \subset F$
- $\{1, 2, 3\} \subset F$
- $\{\{a, b, c,\}\} \subset F$
- $\{\{W\}\} \subset F$
- $\{\{a, b, c,\}, \{d, e, f\}, \{W\}\} \subset F$

Observe que, para representar os subconjuntos que contém outros conjuntos, utilizamos, sem problema algum, dois pares de chaves. Tenha bastante cuidado em questões que tragam esse tipo de abordagem! Já vi muitas bancas se enrolarem ao cobrar questões com essa temática, pois desconhecem que conjuntos podem sim ser elementos de outros conjuntos e que podemos estabelecer uma relação de pertinência nessas situações.

HORA DE PRATICAR!

(FMS POMBOS/2023) Julgue o item:

Dado que X = {3, 5, 7, 9} e Y = {3, 5, {7, 9}}, podemos afirmar corretamente que esses conjuntos são iguais.

Comentários:

Para julgar o item, devemos lembrar a definição de conjunto e de igualdade entre conjuntos. Um conjunto é uma coleção de objetos distintos e não ordenados, chamados de elementos. **Dois conjuntos são iguais se e somente se têm os mesmos elementos**, independentemente da ordem ou da forma como são apresentados.

No caso dos conjuntos X = {3, 5, 7, 9} e Y = {3, 5, {7, 9}}, podemos observar que eles não são iguais, pois têm elementos diferentes. **O conjunto X tem quatro elementos: 3, 5, 7 e 9. O conjunto Y tem três elementos: 3, 5 e {7, 9}**. O elemento {7, 9} é um conjunto em si mesmo, formado por dois números. Portanto, ele é diferente do elemento 7 e do elemento 9, que são números simples.

Logo, **o item está errado**, pois afirma incorretamente que os conjuntos X e Y são iguais.

Gabarito: ERRADO.

(FMS POMBOS/2023) Julgue o item:

Ao empregar a linguagem de conjuntos e considerando o conjunto $X = \{x, \{y\}, z\}$, podemos afirmar corretamente que o conjunto $\{x, \{y\}\}$ pertence a X.

Comentários:

Na linguagem dos conjuntos, usamos os símbolos ∈ (pertence) e ∉ (não pertence) para indicar se um elemento faz ou não parte de um conjunto. Por exemplo, se A = {1, 2, 3}, então 1 ∈ A e 4 ∉ A. **Um conjunto também pode conter outros conjuntos como seus elementos**. Nesse caso, usamos as chaves {{ }} para diferenciar os conjuntos dos elementos. Por exemplo, se B = {a, {b, c}, d}, então a ∈ B, b ∉ B, {b, c} ∈ B e {a, d} ∉ B.

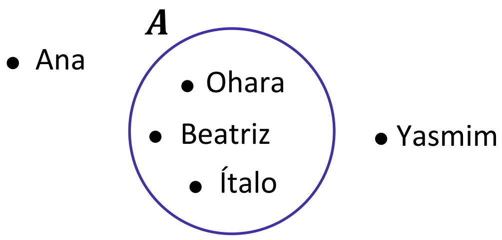
No item, temos **o conjunto $X = \{x, \{y\}, z\}$, que contém três elementos: x, {y} e z**. O elemento {y} é um conjunto que contém o elemento y. Portanto, podemos dizer que y ∈ {y} e {y} ∈ X. No entanto, **o conjunto {x, {y}} não é um elemento de X, mas sim um subconjunto de X**. Logo, o item está errado.

Gabarito: ERRADO.

Operações com Conjuntos

Representação por Diagramas

Você deve ter visto ao longo da aula que **apareceram alguns conjuntos na forma de diagramas**. Esse tipo de representação é extremamente útil na resolução de questões, pois **possibilita uma melhor compreensão do problema**. Por exemplo, seja $\boldsymbol{A}$ o conjunto de funcionários de uma determinada empresa.



Todos aqueles que estão dentro do conjunto $\boldsymbol{A}$ **representam funcionários da empresa**. **Quem está fora, não é funcionário da empresa**. Olhando simplesmente para o diagrama, podemos dizer que:

- $Ohara \in A$;
- $Beatriz \in A$;
- $Italo \in A$;
- $Yasmim \notin A$;
- $Ana \notin A$.

Esses diagramas são bastante conhecidos no meio matemático e possuem um nome especial: são os **Diagramas de Venn-Euler** ou, simplesmente, **Diagramas de Venn**. Esse tipo de representação é utilizado principalmente quando **precisamos representar vários conjuntos ao mesmo tempo**. Nos tópicos a seguir, usaremos bastante esses diagramas e você logo ficará habituado.

INDO MAIS FUNDO!

Existem diferentes maneiras de representarmos os conjuntos. A primeira dela é como estamos fazendo desde o começo da aula, como por exemplo, em $V = \{a, e, i, o, u\}$. Chamamos esse tipo de representação de "**representação por enumeração**".

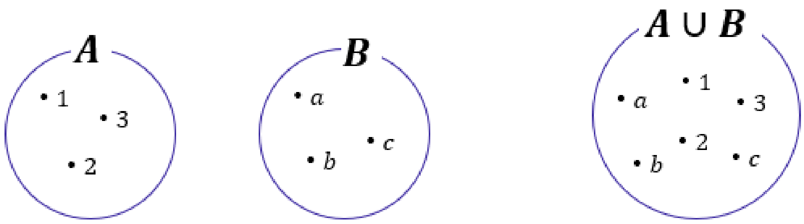
Ademais, temos a **representação por propriedade**. Para entender melhor, considere o mesmo conjunto V citado anteriormente. Ele também poderia ser escrito da seguinte forma: $\boldsymbol{V = \{x \mid x \text{ é } vogal\}}$.

Na prática, podemos ler tal conjunto da seguinte forma: **V é o conjunto dos elementos de x, tal que x é vogal**. Lemos essa barrinha vertical como "**tal que**". **Não esqueça!**

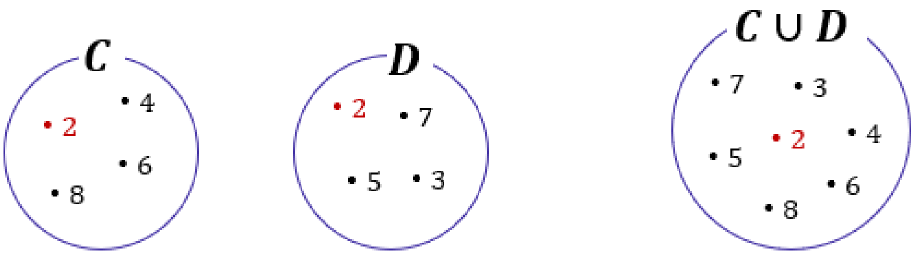
Por fim, temos a **representação por diagramas** que estudamos agora a pouco! Fechou?

União

Nessa parte da nossa aula, veremos que existem **várias operações** que os conjuntos podem se submeter. A mais conhecida talvez seja **a união (ou reunião) de conjuntos**. A união de conjuntos é representada pelo **símbolo** ∪ e, basicamente, **funde dois conjuntos em um só**.



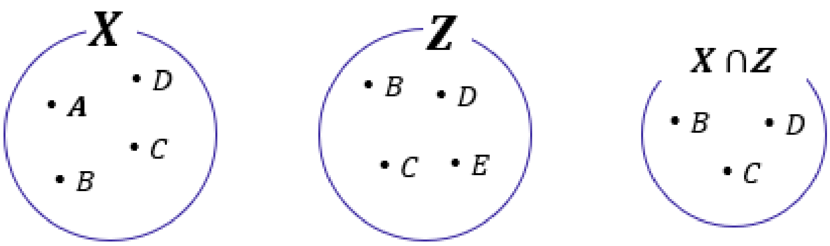
No diagrama acima, temos que $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Quando fazemos a união de A e B, criamos um conjunto que possui **todos os elementos dos dois conjuntos**, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$. Haverá casos em que os conjuntos possuirão um mesmo elemento e, quando for necessário fazer a união dos dois, **você não precisará escrever duas vezes o elemento repetido**. Observe um exemplo nos diagramas abaixo.



Note que **o 2 é um elemento comum aos dois conjuntos**: $C = \{2, 4, 8, 6\}$ e $D = \{2, 3, 5, 7\}$. Nessas situações, quando fazemos a união de conjuntos que possuem elementos em comum, **esse elemento não vai aparecer duas vezes no conjunto união**! Confira que $C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, **o 2 aparece apenas uma vez**.

Intersecção

A operação que seleciona **os elementos comuns entre dois ou mais conjuntos é denominada intersecção e é representada por** ∩. Por exemplo, nos diagramas acima o número 2 é o único elemento comum entre C e D. Logo, o conjunto intersecção será formado apenas pelo elemento 2: $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D} = \{\mathbf{2}\}$. Veja mais um exemplo abaixo.



Temos que $X = \{A, B, C, D\}$ e $Z = \{B, C, D, E\}$. São dois conjuntos distintos, mas que **possuem alguns elementos em comum**. Os elementos $B, C\ e\ D$ aparecem nos 2 conjuntos e formam o conjunto intersecção: $\boldsymbol{X \cap Z = \{B, C, D\}}$. Vamos treinar um pouco esses conceitos?

HORA DE PRATICAR!

(IBGE/2023) Assinale a alternativa que identifica corretamente a intersecção entre esses três conjuntos A = {1, 2, 5, 6, 7}, B = {2, 3, 4, 5, 6, 7} e C = {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

A) {2, 3, 5}

B) {2, 5}

C) {6, 7}

D) {1, 2, 5}

E) {1, 2, 3, 4, 5}

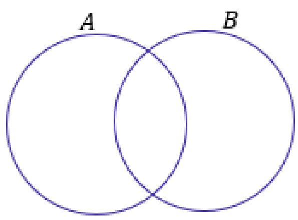
Comentários:

A intersecção entre três conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem aos três conjuntos ao mesmo tempo. Portanto, **para encontrar a intersecção entre A, B e C, basta identificar quais elementos estão presentes nos três conjuntos dados**.

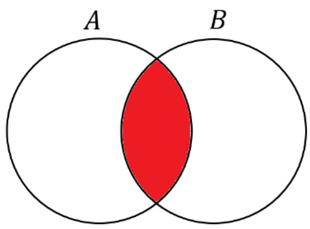
Assim, para encontrar a intersecção entre A, B e C, devemos verificar quais elementos satisfazem a condição de pertencer aos três conjuntos A, B e C. Dados os conjuntos A = {1, 2, 5, 6, 7}, B = {2, 3, 4, 5, 6, 7} e C = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, podemos ver que **os únicos elementos que cumprem essa condição são 2 e 5**. Portanto, a intersecção entre esses três conjuntos é o conjunto {2, 5}. Assim, a alternativa correta é a letra B.

Gabarito: LETRA B.

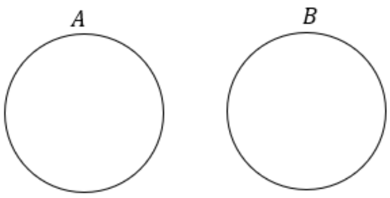
Quando dois conjuntos **possuem elementos em comum**, podemos representá-los assim:



Essa região comum representa exatamente a sua intersecção. Os elementos que estão na região em **vermelho** abaixo **pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B**.

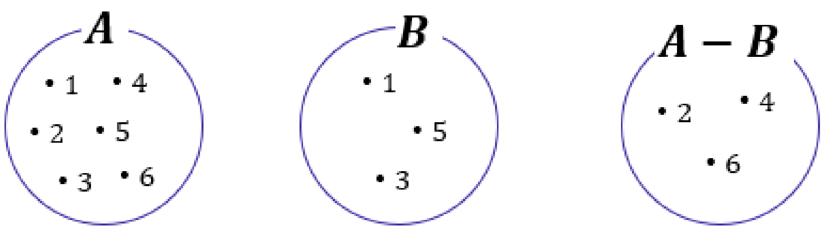


Caso os conjuntos não possuam elementos em comum, isto é, **não haja intersecção entre os dois**, nós vamos chamá-los de **disjuntos** e os representaremos utilizando círculos afastados um do outro.

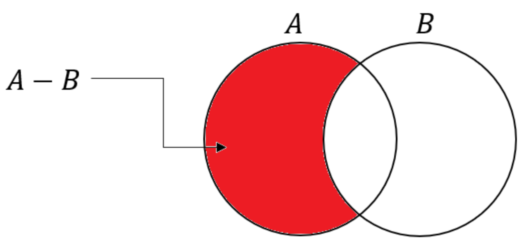


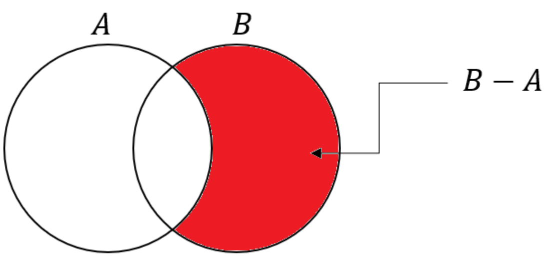
Diferença

Existe uma outra operação que é muito importante para a sua prova! Essa operação **é a diferença ou, como também é conhecida, a subtração de conjuntos**! O conjunto diferença é representado por $\boldsymbol{A - B}$ e é formado por **todos os elementos de A que não são elementos de B**! Por exemplo, considere os conjuntos:

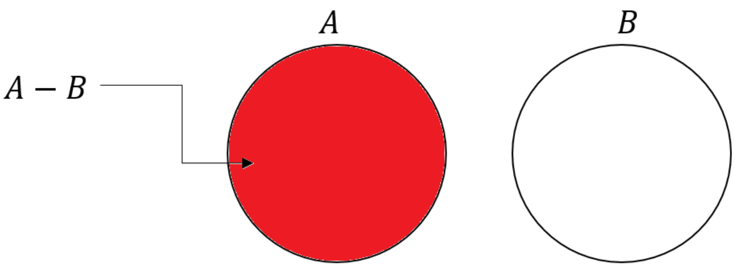


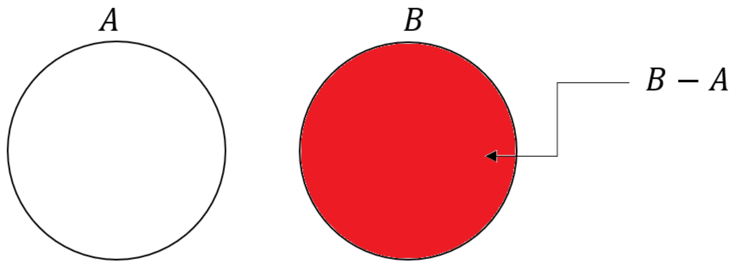
Observe que $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Para encontrar $A - B$, devemos selecionar **os elementos de $\boldsymbol{A}$ que não são elementos de $\boldsymbol{B}$**! Ou seja, **aqueles elementos que são apenas elementos de $\boldsymbol{A}$**! Observe que A e B possuem em comum os seguintes elementos: $A \cap B = \{1, 3, 5\}$. Logo, se $A = \{\mathbf{1}, 2, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6\}$, então o $A - B = \{2, 4, 6\}$. Em diagramas, também é possível representar o conjunto diferença.





Um detalhe importante é que se A e B são **conjuntos disjuntos**, então $\boldsymbol{A - B = A}$ **e** $\boldsymbol{B - A = B}$. Veja como essa informação pode ser representada:





Vamos fazer alguns **exemplos numéricos** para visualizar ainda melhor essa última situação.

Considere os conjuntos $A = \{10, 20, 30\}$ e $B = \{40, 50\}$. Primeiramente, note que os conjuntos são disjuntos. *Mas qual é o motivo mesmo para eles serem disjuntos, professor?*

A e B são disjuntos pois não possuem elementos em comum! Nenhum sequer!! São totalmente diferentes um outro. *Tudo bem?!* Agora, lembre-se que **$A - B$ é o conjunto de elementos formados por todos os elementos de A que não são elementos de B**.

Ora, nesse nosso exemplo, **todos os elementos de A não são elementos de B**!! Sendo assim, podemos escrever que:

$$A - B = \{10, 20, 30\} = A$$

HORA DE PRATICAR!

(UFPB/2023) Sejam os conjuntos finitos A = {0,1,2,3,5,6} e B = {0,2,3,5,8}, então podemos dizer que:

A) A união entre os conjuntos A e B possui exatamente 8 elementos

B) A – B possui exatamente 2 elementos

C) B – A possui exatamente 2 elementos

D) A intersecção entre os conjuntos A e B possui exatamente 3 elementos

E) Os conjuntos A e B são disjuntos

Comentários:

Essa questão envolve várias operações e conceitos da Teoria dos Conjuntos! Vamos comentar cada uma das alternativas.

A) A união entre os conjuntos A e B possui exatamente 8 elementos

Incorreta! A união entre A e B é formada pelos elementos {0,1,2,3,5,6,8}, que **são 7 ao todo.**

B) A – B possui exatamente 2 elementos

Correta! A – B é formado pelos elementos que pertencem a A, mas não a B. Neste caso, temos que $A - B = \{1,6\}$, que **possui exatamente 2 elementos**.

C) B – A possui exatamente 2 elementos

Incorreta! $B - A$ é formado pelos elementos que pertencem a B, mas não a A. Neste caso, temos que $B - A = \{8\}$, que **possui apenas 1 elemento**.

D) A intersecção entre os conjuntos A e B possui exatamente 3 elementos

Incorreta! A intersecção entre A e B é formada pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos ao mesmo tempo. Neste caso, temos que $A \cap B = \{0,2,3,5\}$, que possui **4 elementos**.

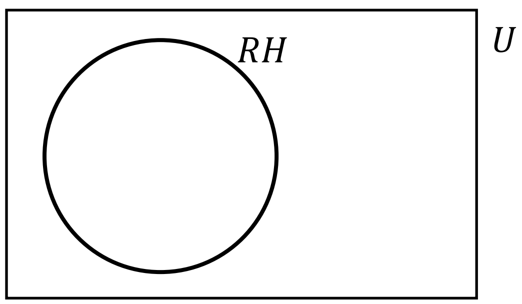
E) Os conjuntos A e B são disjuntos

Incorreta! Dois conjuntos são disjuntos **se não possuem nenhum elemento em comum**. Neste caso, podemos ver que A e B possuem vários elementos em comum, como 0, 2, 3 e 5.

Gabarito: LETRA B.

Complementar

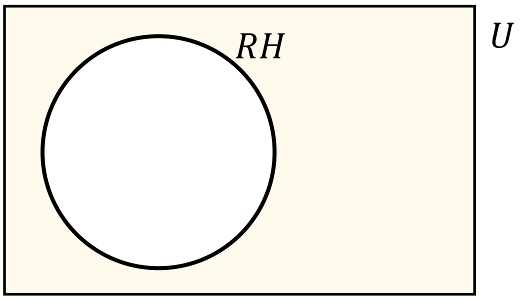
Quando falamos de um determinado conjunto, normalmente **estamos destacando determinado grupo dentro de um universo maior**. Por exemplo, podemos formar um conjunto dos funcionários especializados em RH de uma empresa. Esse grupo de funcionários foi retirado de um conjunto maior: **o conjunto formado por todos os funcionários da empresa**. Acompanhe o diagrama abaixo.



Observe que o conjunto formado por aqueles especializados em RH está contido dentro de um conjunto U. **Esse conjunto maior é frequentemente chamado de conjunto universo** e, nesse exemplo, poderia representar **o conjunto de todos os funcionários da empresa**.

Quer um outro exemplo? Imagine um conjunto formado por todas as vogais: $V = \{a, e, i, o, u\}$. Em um problema que estamos trabalhando com esse conjunto, qual seria o conjunto universo? O conjunto universo nessa situação seria o conjunto formado por todas as letras do alfabeto: $U = \{a, b, c, d, e, f, \dots, x, y, z\}$.

Quando estamos falando de conjunto universo, um novo conceito surge: **o conjunto complementar**. Lembre-se do conjunto que inventamos com os funcionários de uma empresa especializados em RH. *Qual o complementar desse conjunto?* Seria o conjunto formado por **todos os outros funcionários da empresa que não são especializados em RH!** Vamos mostrar no diagrama.



O complementar do conjunto RH é representado pela **parte pintada em amarelo**. *E no nosso exemplo das letras?* Qual o complementar do conjunto formado apenas pelas vogais? Ora, é **o conjunto formado por todas as outras letras que não são vogais, isto é, o conjunto das consoantes**! Para determinar o complementar de qualquer conjunto, **é de fundamental importância conseguir identificar qual é o conjunto universo**.

A notação utilizada para representar o complementar de um conjunto X é $\boldsymbol{X^C}$ **ou** $\boldsymbol{\overline{X}}$. Representamos o conjunto complementar com esse "expoente" C ou uma barra em cima. Ademais, podemos definir o conjunto complementar utilizando o que acabamos de ver **sobre conjunto diferença**.

TOME NOTA!

$$\boxed{\overline{X} = X^C = U - X}$$

Veja que utilizando a definição acima, temos que o conjunto complementar X^C é formado por **tudo que está no conjunto universo, mas não está em X**. Vamos fazer algumas questões para aplicar o que acabamos de ver?

(CREFONO/2023) Os alienígenas estão estudando a população da Terra e, para isso, estão analisando alguns conjuntos de dados. Considere os conjuntos A, B e C, em que:

- A representa os seres humanos que já avistaram um OVNI;
- B representa os seres humanos que acreditam em vida extraterrestre; e
- C representa os seres humanos que afirmam ter sido abduzidos por alienígenas.

Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

O complemento de A representa os seres humanos que nunca avistaram um OVNI.

Comentários:

O complemento de um conjunto A é o conjunto formado por todos os elementos que não pertencem a A. Como A representa os seres humanos que já avistaram um OVNI, o complemento de A representa os seres humanos que **não avistaram um OVNI**. Portanto, o item está certo.

Gabarito: CERTO.

(CRAS/2023) Sendo $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 7, 10\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 5, 10, 11\}$, então o complementar de Y em X é:

A) $\{2, 3, 5, 10\}$.
B) Ø.
C) $\{-3, -2, -1\}$.
D) $\{11\}$.
E) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 7\}$.

Comentários:

O complementar de Y em X (C_X^Y) é o conjunto formado pelos **elementos que pertencem a X mas não pertencem a Y**. Para encontrar esse conjunto, temos que eliminar de X os elementos que são comuns a Y. Assim:

$$C_X^Y = X - Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, 7, \mathbf{10}\} - \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, \mathbf{10}, 11\}$$

Note que **os elementos comuns são {2,3,5,10}**. Logo, sobram os elementos {-3,-2,-1,0,1,7}, que formam o complementar de Y em X.

$$\boxed{\boldsymbol{X - Y \ = \ \{-3, -2, -1, 0, 1, 7\}}}$$

Gabarito: LETRA E.

Leis de De Morgan

Pessoal, as leis de De Morgan são dois teoremas que **relacionam as operações de união e intersecção de conjuntos com a complementação**. Elas foram formuladas pelo matemático britânico Augustus De Morgan no século 19 e podem ser enunciadas assim:

- O complemento da união de dois conjuntos é igual à intersecção dos complementos desses conjuntos.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

- O complemento da intersecção de dois conjuntos é igual à união dos complementos desses conjuntos.

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Essas leis nos permitem manipular expressões envolvendo conjuntos de maneiras diferentes e facilitam o entendimento de algumas propriedades dos conjuntos. Vamos ver alguns exemplos para ilustrar como elas funcionam.

Suponha que **A seja o conjunto dos números pares menores que 10** e que **B seja o conjunto dos números múltiplos de 3 menores que 10.** Temos que:

- $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $B = \{0, 3, 6, 9\}$
- $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Então, a união de A e B é o conjunto que contém todos os elementos de A ou de B, ou seja:

$$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

O complemento de AUB é o conjunto que contém todos os elementos de U que não estão em AUB, ou seja:

$$(A \cup B)^c = \{1, 5, 7\}$$

Por outro lado, **o complemento de A é o conjunto que contém todos os elementos que não estão em A**:

$$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

E **o complemento de B é o conjunto que contém todos os elementos que não estão em B**:

$$B^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

A **intersecção de A^c e B^c é o conjunto que contém todos os elementos que estão em A^c e em B^c**, ou seja:

$$A^c \cap B^c = \{1, 5, 7\}$$

Observe que **esse conjunto é exatamente o mesmo que o complemento de A ∪ B**. Isso mostra que a primeira lei de De Morgan é válida nesse caso. Podemos fazer um raciocínio análogo para mostrar a validade da segunda lei! Agora, vamos ver como o tema aparece em prova!

HORA DE PRATICAR!

(PM-SP/2018) De acordo com as leis de De Morgan, o complementar da união é igual a intersecção dos complementares. Assim, dado um conjunto X, seja X^C o seu complementar em relação ao conjunto universo. Considerando $V = \{a, e, i, o, u\}$ o conjunto universo, sejam os subconjuntos $A = \{a, e\}$ e $B = \{o, u\}$. O conjunto $A^C \cap B^C$ é igual ao conjunto

A) $\{i\}$

B) $\{o\}$

C) $\{o, i\}$

D) $\{a, i\}$

Comentários:

O complementar de A é tudo que pertence ao universo de A, mas **não pertence a A**.

$$A^C = V - A$$

Como $V = \{a, e, i, o, u\}$ e $A = \{a, e\}$, ficamos:

$$A^C = \{i, o, u\}$$

Por sua vez:

$$B^C = V - B$$

Como $V = \{a, e, i, o, u\}$ e $\boldsymbol{B = \{o, u\}}$, ficamos:

$$B^C = \{a, e, i\}$$

Queremos a intersecção entre A^C e B^C:

$$\boxed{\boldsymbol{A^C \cap B^C = \{i\}}}$$

Gabarito: LETRA A.

Princípio da Inclusão-Exclusão

Pessoal, muitas vezes vamos precisar **determinar o número de elementos de um conjunto**. Essa tarefa de contar **pode ficar um pouco complicada quando temos elementos que pertencem a mais de um conjunto**, pois, nesses casos, **devemos eliminar as repetições** para não contar o mesmo elemento duas vezes.

Nesse sentido, surge o Princípio da Inclusão-Exclusão (PIE). Esse princípio possibilita uma contagem exata da quantidade de elementos **de um conjunto formado pela união de vários outros, mesmo que contenham intersecções**.

➢ 2 Conjuntos

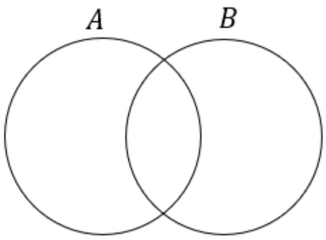
Imagine **dois conjuntos A e B com elementos em comum**. Se $n(A)$ é o número de elementos de A e $n(B)$ é o número de elementos de B, quanto vale $n(A \cup B)$?

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}}$$

Vamos tentar entender o caminho das pedras para chegar na relação acima. Considere os conjuntos:

- $A = \{1, 2, 3\} \quad \Longrightarrow \quad n(A) = 3$
- $B = \{3, 4, 5\} \quad \Longrightarrow \quad n(B) = 3$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \Longrightarrow \quad n(A \cup B) = 5$
- $A \cap B = \{3\} \quad \Longrightarrow \quad n(A \cap B) = 1$



Observe que **apesar da união entre A e B ser uma espécie de fusão entre os dois conjuntos**, o número de elementos na união, na maioria dos casos, **não é a soma direta do número de elementos de A com o número de elementos de B**.

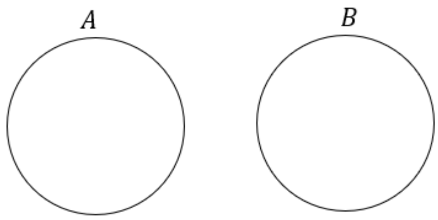
Perceba que **o elemento 3 aparece tanto em A como em B** e ao somar o número de elementos dos dois conjuntos **devemos considerar que estamos somando o mesmo elemento duas vezes!** É por isso esse motivo que devemos subtrair a quantidade de elementos que estão na intersecção. Já para **conjuntos disjuntos** temos que:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}}$$

pois:

$$\boldsymbol{n(A \cap B) = 0.}$$



HORA DE PRATICAR!

(PREF. CAMPOS DOS GOYTACAZES/2024) Certo congresso acadêmico organizado na universidade federal de determinado Estado contou com a participação de 160 pesquisadores e foi realizado em dois dias. O primeiro dia do congresso teve a participação de 120 pesquisadores e, no segundo, a participação foi de 100 pesquisadores. Considerando estas informações, quantos pesquisadores participaram dos dois dias do congresso?

A) 30.

B) 45.

C) 60.

D) 75.

Comentários:

Para resolver esta questão, podemos usar o **princípio da inclusão-exclusão**, que diz que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

No caso, o conjunto A é formado pelos pesquisadores que participaram do primeiro dia do congresso, e o conjunto B é formado pelos que participaram do segundo dia. **O número de elementos da união entre A e B é igual ao número total de pesquisadores, ou seja, 160**. Substituindo os dados na fórmula, temos:

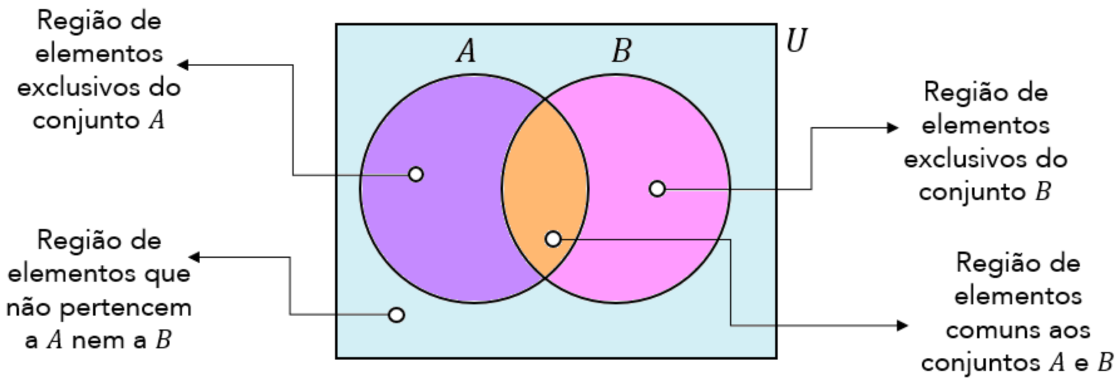
$$160 = 120 + 100 - n(A \cap B)$$

Simplificando, obtemos:

$$n(A \cap B) = 60$$

Gabarito: LETRA C.

A verdade é que **não precisamos decorar fórmulas** para responder questões que envolva esse princípio. Utilizando **um pouco de lógica e diagramas de Venn**, podemos encontrar a quantidade de elemento de cada conjunto envolvido em um problema típico de Princípio da Inclusão-Exclusão. Antes disso, quero deixar claro para vocês **o significado de cada uma das regiões** no seguinte diagrama:



HORA DE PRATICAR!

(PREF. AMERICANA/2023) Para uma vaga de emprego foram entrevistados 820 candidatos, dos quais 450 são carpinteiros, 250 são pedreiros, 320 não são carpinteiros nem pedreiros. Dos candidatos entrevistados, são carpinteiro e pedreiro, aproximadamente:

A) 13,05%.

B) 19,15%.

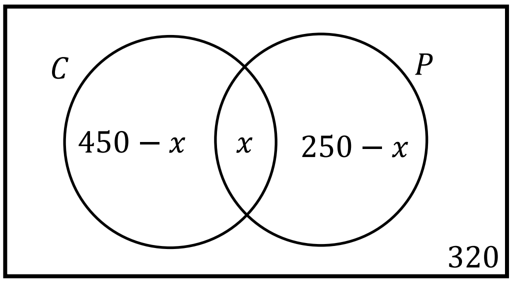
C) 24,39%.

D) 25,50%.

E) 32,95%.

Comentários:

Vamos organizar as informações do enunciado em um diagrama.



No diagrama desenhado, "C" representa o conjunto dos carpinteiros e "P", o dos pedreiros. Tem-se ainda:

- "x" é a quantidade de candidatos que **são carpinteiro e pedreiro**;
- "$450 - x$" é a quantidade de candidatos que são **apenas** carpinteiros;
- "$250 - x$" é a quantidade de candidatos que são **apenas** pedreiros;
- "320" é a quantidade de candidatos que **não são carpinteiros nem pedreiros**.

A soma dos valores dessas regiões **deve totalizar a quantidade de candidatos entrevistados**. Logo:

$$x + (450 - x) + (250 - x) + 320 = 820$$

$$1020 - x = 820$$

$$x = 200$$

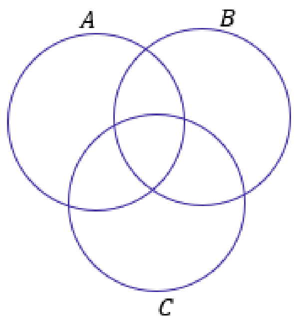
A questão quer esse resultado e**m porcentagem**. Logo:

$$x\% = \frac{200}{820} \cdot 100 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{x\% = 24,39\%}}$$

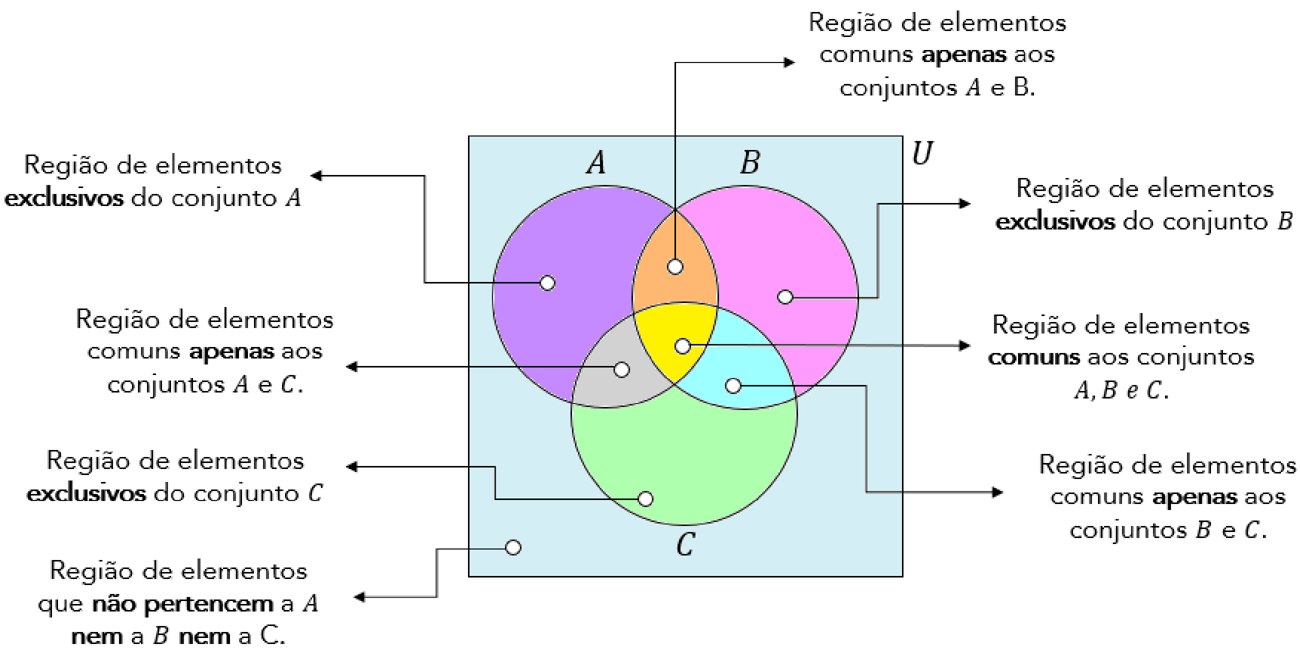
Gabarito: LETRA C.

➢ 3 Conjuntos

Imagine que você tem 3 conjuntos, **cada conjunto possui elementos em comum com os outros dois**. A situação **mais completa** que podemos imaginar está representada pelo diagrama abaixo.



Vamos fazer **uma leitura** de cada uma das regiões da figura acima?



Observe que **o número de regiões com três conjuntos aumenta bastante** em relação à análise anteriormente feita com dois. Agora, considere que **você conhece a quantidade** de elementos de cada um dos conjuntos cima, isto é, $\boldsymbol{n(A)}$**,** $\boldsymbol{n(B)}$ **e** $\boldsymbol{n(C)}$**.**

Como você faria para encontrar $\boldsymbol{n(A \cup B \cup C)}$ *? Será que é só somar as três quantidades?* **A resposta para essa pergunta é não!** Precisamos ter atenção aos **elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**.

Segundo o Princípio da Inclusão- Exclusão, a fórmula geral que permite calcular a quantidade de elementos de um **conjunto formado pela união de outros três** é dada por:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Vamos tentar entender com ela surge? Note que para achar a quantidade de elementos do conjunto união, primeiro **somamos individualmente as quantidades de cada um dos conjuntos**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C)}$$

No entanto, nós vimos que, ao fazer isso, **não estamos considerando os elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**. Essa soma dará, certamente, uma quantidade de elementos maior do que a quantidade real. *Mas, então, o que fazer?* **É preciso subtrair as quantidades dos elementos que estão nas intersecções, evitando assim a dupla contagem**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)}$$

Perceba que a fórmula ainda não está completa. Imagine um elemento que é **comum a todos os 3 conjuntos**, isto é, pertence a $A \cap B \cap C$. Esse elemento pertence tanto a A, quanto a B e a C. Quando fizemos a soma $n(A) + n(B) + n(C)$, **contamos ele três vezes**!

Quando fizemos a subtração $-n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$ estamos **tirando ele três vezes**! **Resultado: não estamos contando os elementos de $A \cap B \cap C$**. Por esse motivo, **adicionamos** $\boldsymbol{n(A \cap B \cap C)}$**.** Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Eu sei que a fórmula **pode parecer um pouco complicada**, mas garanto que com **um pouco de paciência e resolução de exercícios**, ela se tornará **mais amigável e bastante intuitiva**! Além disso, também ensinarei um jeito que vocês poderão utilizar **caso não lembrem da fórmula**. Algumas vezes, no entanto, **a questão pode exigir a aplicação direta dela**. Confira o exercício abaixo.

HORA DE PRATICAR!

(ITAIPU/2024) A divisão de saúde da usina de Itaipu entrevistou 79 servidores a respeito dos seus hábitos esportivos. Nessa pesquisa, verificou-se que:

- 35 jogam futebol;
- 35 praticam natação;
- 30 jogam tênis;
- 11 praticam futebol e natação;
- 8 praticam natação e tênis;
- 6 praticam tênis e futebol;
- todos os entrevistados praticam algum esporte.

Na situação apresentada, o número de entrevistados que praticam todos os esportes é igual a
A) 1.
B) 3.
C) 4.
D) 6.
E) 11.

Comentários:
Para resolver essa questão, podemos usar o princípio da inclusão-exclusão!

$$\boxed{\boldsymbol{n(F \cup N \cup T) = n(F) + n(N) + n(T) - n(F \cap N) - n(F \cap T) - n(N \cap T) + n(F \cap N \cap T)}}$$

- "F" representa o conjunto daqueles que jogam futebol;
- "N" representa o conjunto daqueles que praticam natação;
- "T" representa o conjunto daqueles que jogam tênis;

De acordo com o enunciado, podemos retirar as seguintes informações:

- 35 jogam **futebol:**

$$n(F) = 35$$

- 35 praticam **natação**:

$$n(N) = 35$$

- 30 jogam **tênis**:

$$n(T) = 30$$

- 11 praticam **futebol e natação**;

$$n(F \cap N) = 11$$

- 8 praticam **natação e tênis**;

$$n(N \cap T) = 8$$

- 6 praticam **tênis e futebol**:

$$n(F \cap T) = 6$$

- todos os entrevistados (79) praticam algum esporte.

$$\boldsymbol{n(F \cup N \cup T) = 79}$$

Pronto! Podemos substituir essas quantidades na fórmula:

$$79 = 35 + 35 + 30 - 11 - 6 - 8 + n(F \cap N \cap T)$$

Simplificando:

$$79 = 75 + n(F \cap N \cap T)$$

$$\boxed{\boldsymbol{n(F \cap N \cap T) = 4}}$$

Gabarito: LETRA C.

Em algumas questões **não precisaremos aplicar diretamente a fórmula acima**. Será necessário um trabalho mais braçal da nossa parte, para chegar à resposta. Muitas vezes a questão pede valores específicos que vão surgir de uma maneira mais fácil **se a gente for completando o diagrama de Venn** com as quantidades.

Por favor, **dê mais olhada naquele "mapa" que mostrei logo no início desse tópico**, destacando as regiões e o seu significado.

Para contar elementos em um diagrama de Venn, o primeiro passo é sempre inserir a quantidade de elementos que possui a intersecção dos três conjuntos! Depois, partimos para as intersecções duplas e, por fim, analisamos a quantidade de elementos exclusivos de cada conjunto. Vamos ver na prática como fazemos isso?

HORA DE PRATICAR!

(UNICAMP/2024) Num congresso, o número de pessoas que falam inglês é o dobro do número de pessoas que falam espanhol e é o triplo do número de pessoas que falam alemão. Há 3 pessoas que falam inglês e espanhol, 4 pessoas que falam inglês e alemão e 6 pessoas que falam espanhol e alemão. Não há ninguém que fale as três línguas. Há 447 pessoas que falam apenas uma dessas três línguas. Nessas condições, o número de pessoas que falam apenas inglês é igual a:

A) 294

B) 280

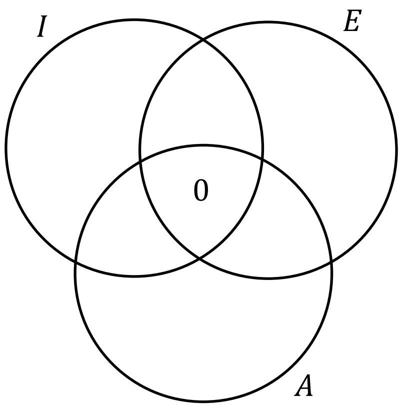
C) 273

D) 260

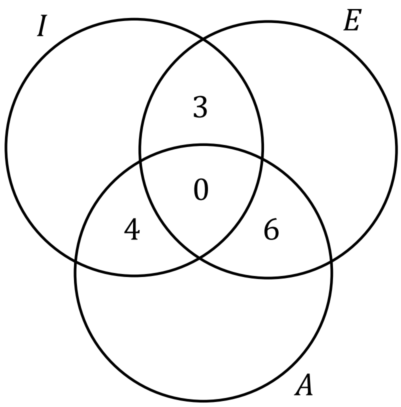
E) 251

Comentários:

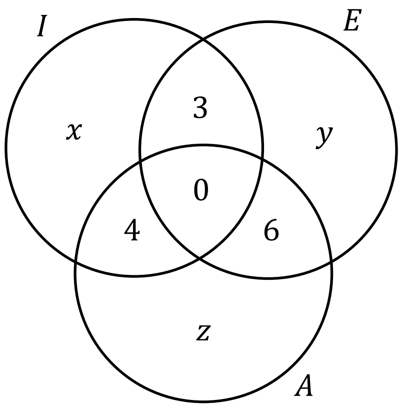
Vamos organizar as informações do enunciado em um diagrama. A primeira coisa que fazemos é colocar a **intersecção entre os três conjuntos**. Sendo assim, note que o enunciado diz que não há ninguém que fale as três línguas. Logo, essa intersecção é zero.



O enunciado também diz as intersecções dois a dois: **Há 3 pessoas que falam inglês e espanhol, 4 pessoas que falam inglês e alemão e 6 pessoas que falam espanhol e alemão**. No diagrama, ficamos:



Sobre as quantidades de pessoas que falam apenas inglês, apenas espanhol ou apenas alemão, o enunciado não fala nada. Por esse motivo, **vamos chamar essas quantidades de "x", "y" e "z",** respectivamente.



Ora, o enunciado afirma **447 pessoas falam apenas uma dessas três línguas**. Logo:

$$x + y + z = 447 \qquad (1)$$

Por sua vez, temos que **o número de pessoas que falam inglês é o dobro do número de pessoas que falam espanhol**. Logo:

$$(x + 3 + 0 + 4) = 2 \cdot (3 + y + 0 + 6)$$

$$x + 7 = 2y + 18$$

$$x = 2y + 11 \qquad (2)$$

Por fim, sabemos também que **o número de pessoas que falam inglês é o triplo do número de pessoas que falam alemão**. Logo:

$$(x + 3 + 0 + 4) = 3 \cdot (z + 0 + 4 + 6)$$

$$x + 7 = 3z + 30$$

$$x = 3z + 23 \qquad (3)$$

Vamos isolar "y" em (2) e "z" em (3):

$$y = \frac{x - 11}{2} \qquad\qquad z = \frac{x - 23}{3}$$

Substituindo em (1):

$$x + \frac{(x - 11)}{2} + \frac{(x - 23)}{3} = 447$$

Multiplicando os dois membros da equação pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores, que é 6, obtemos:

$$6x + 3(x - 11) + 2(x - 23) = 2682$$

Simplificando e colocando em ordem, temos:

- $$11x - 79 = 2682$$

Isolando x, obtemos:

$$x = \frac{(2682 + 79)}{11}$$

$$x = \frac{2761}{11}$$

$$\boxed{x = 251}$$

"x" é exatamente o valor procurado pela questão, pois é a quantidade de pessoas que falam apenas inglês.

Gabarito: LETRA E.

Questões Comentadas

União, Intersecção, Complementar e Diferença

1. (VUNESP/ESFCEX/2021) Uma condição necessária para a existência do complementar do conjunto B em um universo A é

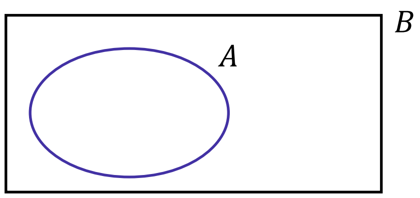
A) $B \subset A$.
B) $A \subset B$.
C) $A \neq B$.
D) $B \ = \ A$.
E) $A = \emptyset$.

Comentários:

Se o conjunto B faz parte de um universo A, então **B é um subconjunto de A**. Essa condição é fundamental para que possamos definir o complementar de A em B. Dito de outra forma, **B deve estar contido em A**.

$$B \subset A$$

Em **diagramas**:

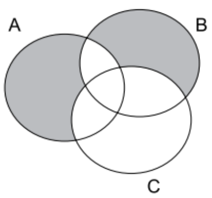


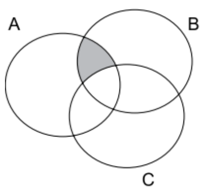
Gabarito: LETRA A.

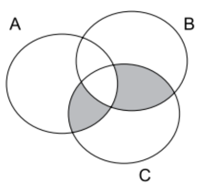
2. (VUNESP/ISS-GRU/2019) Considere as operações entre conjuntos:

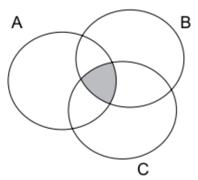
$$\boldsymbol{A \cap B - C}$$

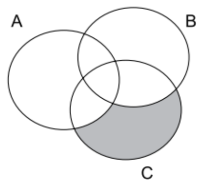
A alternativa cuja parte sombreada corresponde ao resultado dessas operações é:

A) 

B) 

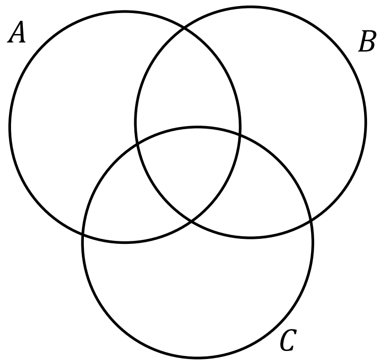
C) 

D) 

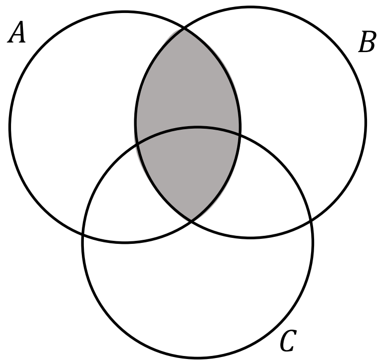
E) 

Comentários:

Observe que queremos a região definida entre **três conjuntos**.

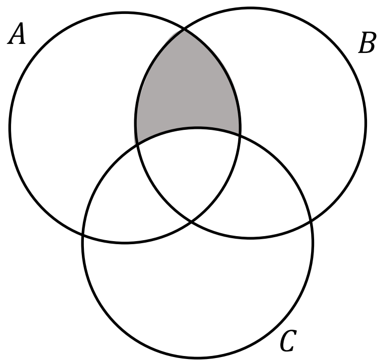


O primeiro passo é **identificar $\boldsymbol{A \cap B}$**.



Agora, queremos $A \cap B - C$. Lembre-se da definição!

$A \cap B - C$ é tudo aquilo que **pertence a $\mathbf{A \cap B}$ mas <u>não</u> pertence a C**.



Gabarito: LETRA B.

3. (VUNESP/ISS-GRU/2019) Considere os conjuntos:

$\boldsymbol{F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$
$\boldsymbol{G = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}}$
$\boldsymbol{H = \{1, 2, 3, 10, 11, 12\}}$

$\boldsymbol{J = \{3,4,5,6,7,8\}}$

Sabe-se que $\boldsymbol{K = (G \cup H) \cap (F \cap J)}$. O conjunto é igual a
A) $K = \{1,2,4,5,6\}$
B) $K = \{4,5,6\}$
C) $K = \{1,2,4,5,6,10\}$
D) $K = \{3,4,6\}$
E) $K = \{4,6\}$

Comentários:
Vamos lá!

1) Identificar $G \cup H$:

$$G \cup H = \{1,2,3,4,6,8,10,11,12\}$$

2) Identificar $F \cap J$:

$$F \cap J = \{3,4,5,6\}$$

3) Por fim, vamos fazer a **intersecção** entre esses dois conjuntos que obtivemos.

$$\boxed{K = (G \cup H) \cap (F \cap J) = \{3,4,6\}}$$

Gabarito: LETRA D.

4. (VUNESP/PM-SP/2018) De acordo com as leis de De Morgan, o complementar da união é igual a intersecção dos complementares. Assim, dado um conjunto X, seja $\boldsymbol{X^C}$ o seu complementar em relação ao conjunto universo. Considerando $\boldsymbol{V = \{a,e,i,o,u\}}$ o conjunto universo, sejam os subconjuntos $\boldsymbol{A = \{a,e\}}$ e $\boldsymbol{B = \{o,u\}}$. O conjunto $\boldsymbol{A^C \cap B^C}$ é igual ao conjunto
A) $\{i\}$
B) $\{o\}$
C) $\{o,i\}$
D) $\{a,i\}$

Comentários:
Lembre-se que **o complementar de A** é tudo que pertence ao universo de A, mas **não pertence a A**.

$$A^C = V - A$$

Como $V = \{a,e,i,o,u\}$ e $\boldsymbol{A = \{a,e\}}$, ficamos:

$$A^C = \{i,o,u\}$$

Por sua vez:

$$B^C = V - B$$

Como $V = \{a, e, i, o, u\}$ e $\boldsymbol{B = \{o, u\}}$, ficamos:

$$B^C = \{a, e, i\}$$

Queremos a intersecção entre A^C e B^C:

$$\boxed{\boldsymbol{A^C \cap B^C = \{i\}}}$$

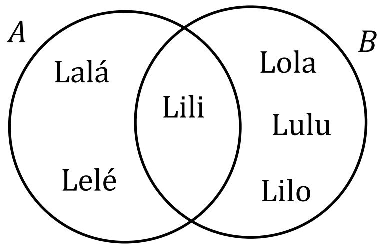
Gabarito: LETRA A.

5. (VUNESP/PC-SP/2014) Lalá, Lelé e Lili, apenas elas, participam de um grupo A. Lili, Lola, Lulu e Lilo participam de um grupo B, com apenas 4 elementos. Certo dia, um grupo C foi montado com apenas Lalá e Lelé para realizar uma tarefa. Pode-se afirmar corretamente que esse grupo C corresponde ao conjunto

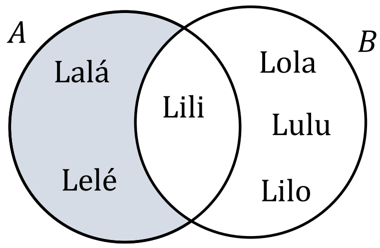
A) reunião de A e B.
B) diferença entre A e B.
C) interseção de A e B.
D) complementar de A em relação a B.
E) das partes de A.

Comentários:

Vamos fazer um diagrama! Fica melhor visualizar.



Observe que o grupo C corresponde **apenas a Lalá e Lelé**, ou seja:



Ora! São **os elementos de A que não estão em B!** Em outras palavras, é **a diferença entre A e B**.

$$C = A - B$$

Gabarito: LETRA B.

QUESTÕES COMENTADAS - VUNESP

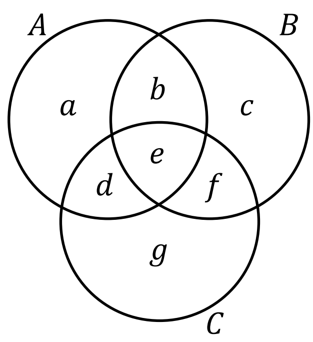
Princípio da Inclusão-Exclusão

1. (VUNESP/TJ-SP/2019) São três os conjuntos. A totalidade de elementos que estão nesses três conjuntos é 42. A totalidade de elementos que estão em dois, e apenas dois desses conjuntos, é 42. A totalidade de elementos que estão em um, e apenas um desses conjuntos é 42. Sabendo que em todas as seções e interseções desses três conjuntos há pelo menos um elemento, e que não há seção e nem mesmo interseção com um mesmo número de elementos, então o maior número possível para o total de elementos de um desses três conjuntos é

A) 132.
B) 120.
C) 110.
D) 124.
E) 118.

Comentários:

Primeiro vamos esquematizar esses conjuntos.



Chamamos as quantidades em cada uma das regiões do diagrama de uma letra do alfabeto. Agora, vamos analisar as informações do enunciado.

- **A totalidade de elementos que estão nesses três conjuntos é 42.**

$$e = 42 \quad (1)$$

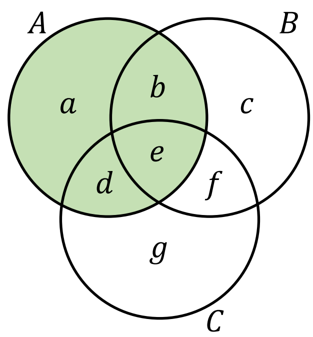
- **A totalidade de elementos que estão em dois, e apenas dois desses conjuntos, é 42.**

$$b + d + f = 42 \quad (2)$$

- **A totalidade de elementos que estão em um, e apenas um desses conjuntos é 42.**

$$a + c + g = 42 \quad (3)$$

Queremos saber **a maior quantidade possível de elementos de um desses três conjuntos**. Note que o problema é bem simétrico, logo não importa qual deles vamos pegar para realizar essa conta.



Escolhendo o conjunto destacado acima, podemos escrever:

$$n(A) = a + b + d + e$$

Sabemos que $e = 42$, podemos substituir.

$$n(A) = a + b + d + 42$$

Da equação (2),

$$b + d = 42 - f$$

Substituindo em $n(A)$,

$$n(A) = a + (42 - f) + 42 \quad \rightarrow \quad n(A) = 84 + a - f$$

Da equação (3),

$$a = 42 - c - g$$

Substituindo em $n(A)$,

$$n(A) = 84 + (42 - c - g) - f \quad \rightarrow \quad n(A) = 126 - c - g - f$$

Observe que para **n(A) ser máximo**, **"c", "g" e "f" devem ser <u>os menores possíveis</u>**. Para chegar nos valores desses parâmetros, devemos ter em mente duas informações:

- em todas as seções e interseções desses três conjuntos **há pelo menos um elemento**;
- não há seção e nem mesmo interseção **com um mesmo número de elementos.**

Assim, os menores valores possíveis que "c", "g" e "f" podem assumir são:

$$c = 1, g = 2 \text{ e } f = 3$$

Substituindo,

$$n(A) = 126 - 1 - 2 - 3 \qquad \rightarrow \qquad n(A) = 120$$

Professor, não poderíamos ter $g = 1, c = 3$ *e* $f = 2$*?*

Podemos sim, moçada! No entanto, como o problema é simétrico, não faz diferença a letra que vamos chamar cada um dos valores. Precisamos apenas perceber que **"1", "2" e "3" são os menores valores possíveis que "c", "g" e "f" podem assumir.** Agora saber qual deles é qual é indiferente, pois o resultado será sempre o mesmo. Faça o teste!

Gabarito: LETRA B.

2. (VUNESP/TJ-SP/2018) Em um grupo de 100 esportistas que praticam apenas os esportes A, B ou C, sabe-se que apenas 12 deles praticam os três esportes. Em se tratando dos esportistas que praticam somente dois desses esportes, sabe-se que o número dos que praticam os esportes A e B é 2 unidades menor que o número dos que praticam os esportes A e C, e o número dos esportistas que praticam B e C excede em 2 unidades o número de esportistas que praticam os esportes A e C. Sabe-se, ainda, que exatamente 26, 14 e 12 esportistas praticam, respectivamente, apenas os esportes A, B e C. Dessa forma, o número total de esportistas que praticam o esporte A é

A) 56.
B) 54.
C) 62.
D) 58.
E) 60.

Comentários:

Temos os esportes A, B ou C. Vamos analisar as informações do enunciado.

- 12 deles praticam os três esportes,

$$n(A \cap B \cap C) = 12 \qquad (1)$$

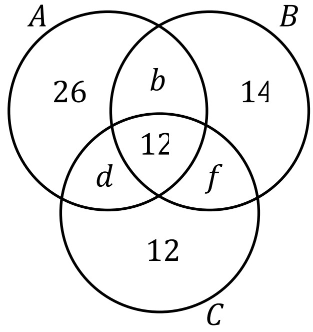
- o número dos que praticam os esportes A e B é 2 unidades menor que o número dos que praticam os esportes A e C,

$$n(A \cap B) = n(A \cap C) - 2 \qquad (2)$$

- o número dos esportistas que praticam B e C excede em 2 unidades o número de esportistas que praticam os esportes A e C,

$$n(B \cap C) = n(A \cap C) + 2 \qquad (3)$$

- Sabe-se, ainda, que exatamente 26, 14 e 12 esportistas praticam, respectivamente, apenas os esportes A, B e C, Com essa informação, é interessante desenharmos os diagramas.



Como temos 100 esportistas, **a soma das quantidades em todas as regiões acima deve totalizar esses 100**.

$$26 + b + 12 + d + 12 + f + 14 = 100$$

$$64 + b + d + f = 100$$

$$b + d + f = 36 \quad (4)$$

Note que:

$$n(A \cap B) = b + 12$$

$$n(A \cap C) = d + 12$$

$$n(B \cap C) = f + 12$$

Substituindo em (2) e em (3):

$$b + 12 = d + 12 - 2 \quad \rightarrow \quad b = d - 2 \quad (5)$$

$$f + 12 = d + 12 + 2 \quad \rightarrow \quad f = d + 2 \quad (6)$$

Podemos usar (5) e (6) em (4),

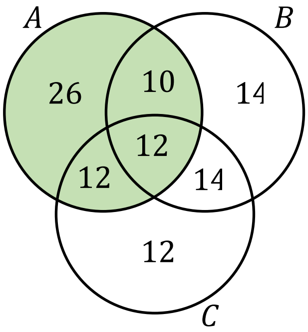
$$(d - 2) + d + (d + 2) = 36 \quad \rightarrow \quad 3d = 36 \quad \rightarrow \quad d = 12$$

Vamos usar o resultado que encontramos em (5) e em (4),

$$b = 12 - 2 \quad \rightarrow \quad b = 10$$

$$f = 12 + 2 \quad \rightarrow \quad f = 14$$

Preenchendo o diagrama com esses valores, ficamos com



Como queremos **a quantidade de elementos de A**, basta somarmos os valores na região destacada acima.

$$n(A) = 26 + 10 + 12 + 12 \quad \rightarrow \quad n(A) = 60$$

Gabarito: LETRA E.

3. (VUNESP/TJM-SP/2021) Em um grupo de 109 atletas, 48 são homens. Cada um desses atletas pratica handebol ou natação, mas somente um esporte por atleta. Entre os homens, 22 jogam handebol e, no total, 50 atletas praticam natação. O número de mulheres que jogam handebol é

A) 34.
B) 37.
C) 40.
D) 43.
E) 46.

Comentários:

Temos um grupo de 109 atletas. Se 48 são homens, então o número de mulheres é:

$$Mulheres = 109 - 48 \quad \rightarrow \quad Mulheres = 61$$

Dos 48 homens, 22 jogam handebol. Como **cada atleta só pratica um esporte**, a diferença desses números fornece a quantidade de homens que praticam natação.

$$Homens\ (Natação) = 48 - 22 \quad \rightarrow \quad Homens\ (Natação) = 26$$

Depois, o enunciado falou que 50 atletas praticam natação. Como **26 desses 50 são homens**, a diferença será a quantidade de mulheres que praticam natação.

$$Mulheres\ (Natação) = 50 - 26 \quad \rightarrow \quad Mulheres\ (Natação) = 24$$

Das **61 mulheres, 24 praticam natação**. Logo, a diferença entre esses dois números é a quantidade de mulheres que jogam handebol.

$$Mulheres\ (Handebol) = 61 - 24 \quad \rightarrow \quad Mulheres\ (Handebol) = 37$$

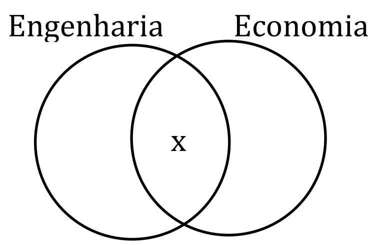
Gabarito: LETRA B.

4. (VUNESP/TJM-SP/2021) Uma palestra teve a participação de 113 professores com licenciatura. Desses professores 46 também são formados em engenharia e 53 também são formados em economia. No total, 21 professores têm apenas licenciatura. O número de professores que também são formados em economia e engenharia é

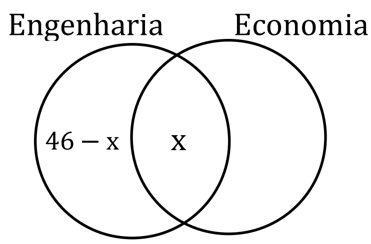
A) 5.
B) 6.
C) 7.
D) 8.
E) 9.

Comentários:

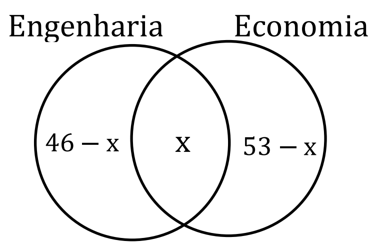
Lembre-se de começar pela intersecção. Perceba que o número de professores que são formados **em economia e engenharia** é exatamente o que a questão quer. Assim, vamos chamar esse valor de x.



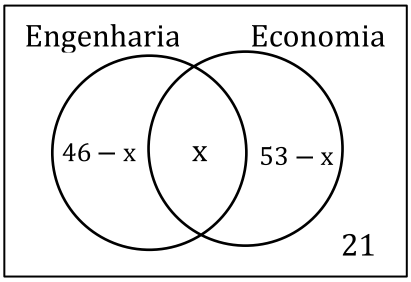
- **Desses professores 46 também são formados em engenharia,**



- **53 também são formados em economia.**



- 21 professores têm apenas licenciatura.



Como **no total tivemos 113 professores**, quando somarmos as quantidades nas regiões do diagrama acima, devemos chegar nesse número.

$$(46 - x) + x + (53 - x) + 21 = 113$$

$$120 - x = 113$$

$$x = 7$$

Gabarito: LETRA B.

5. (VUNESP/TJ-SP/2017) Carlos é o único atleta que tem patrocínio de 3 empresas: A, B e C. Em se tratando de atletas que recebem patrocínios de apenas 2 dessas empresas, temos: Leandro e Hamilton, das empresas A e B; Marta e Silas, das empresas A e C; e Amanda, Renata e Sérgio, das empresas B e C. Se esses atletas fazem parte de um grupo contendo, ao todo, 18 atletas que recebem patrocínio das empresas A, B ou C, e cada empresa tem, pelo menos, 1 atleta recebendo patrocínio somente dela, então é correto afirmar que os números mínimo e máximo de atletas que a empresa B pode patrocinar são, respectivamente,

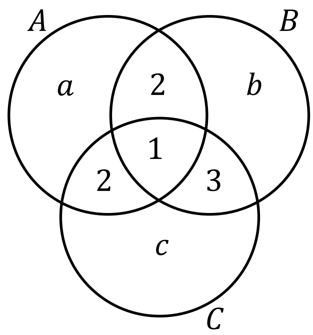
A) 5 e 10.
B) 8 e 16.
C) 7 e 14.
D) 4 e 8.
E) 6 e 12.

Comentários:

- Carlos é o único atleta que tem patrocínio de 3 empresas: A, B e C.

$$n(A \cap B \cap C) = 1$$

- Leandro e Hamilton, das empresas A e B; Marta e Silas, das empresas A e C; e Amanda, Renata e Sérgio, das empresas B e C.



Como temos **18 atletas ao total**, podemos fazer:

$$a + 2 + 1 + 2 + c + 3 + b = 18$$

$$a + b + c + 8 = 18 \quad \rightarrow \quad a + b + c = 10 \quad (1)$$

Queremos saber **o número máximo e mínimo que a empresa B pode patrocinar**.

$$n(B) = b + 1 + 2 + 3 \quad \rightarrow \quad n(B) = b + 6 \quad (2)$$

De (1), escrevemos:

$$b = 10 - a - c$$

Substituindo em (2),

$$n(B) = (10 - a - c) + 6 \quad \rightarrow \quad n(B) = 16 - a - c$$

Para n(B) ser máximo, "a" e "c" devem ser mínimos. O motivo disso é que **quanto maiores forem "a" e "c", mais vamos estar subtraindo do "16"**. Como consequência, $n(B)$ será menor. Por esse motivo, devemos ter "a" e "c" como os menores possíveis, de forma a subtrair o mínimo, maximizando $n(B)$.

Como **cada empresa tem, pelo menos, 1 atleta recebendo patrocínio somente dela**, o valor mínimo que "a" e "c" pode assumir é 1. Logo,

$$a = c = 1$$

Ficamos com,

$$n(B)_{máx} = 16 - 1 - 1 \quad \rightarrow \quad n(B)_{máx} = 14$$

Com isso, já poderíamos marcar a letra C.

Para determinar o valor mínimo de $n(B)$, vamos olhar para a expressão (2) novamente:

$$n(B) = b + 6$$

Para $n(B)$ ser mínimo, "b" deve ser mínimo. Com "b" mínimo, vamos estar somando a menor quantia possível com o "6". Como cada empresa tem, pelo menos, 1 atleta recebendo patrocínio somente dela, o **menor "b" possível é 1 também**.

$$b = 1$$

Assim,

$$n(B)_{mín} = 1 + 6 \quad \rightarrow \quad n(B)_{mín} = 7$$

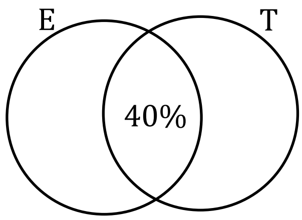
Gabarito: LETRA C.

6. (VUNESP/TJ-SP/2015) Uma pesquisa com uma amostra de jovens entre 18 e 25 anos de uma comunidade revelou que 70% deles estudam e que 50% deles trabalham. A pesquisa mostrou ainda que 40% desses jovens trabalham e estudam. É correto afirmar que o percentual de jovens entre 18 e 25 anos dessa comunidade que não estudam e não trabalham é de

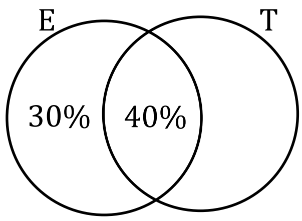
A) 60%
B) 50%
C) 40%
D) 30%
E) 20%

Comentários:

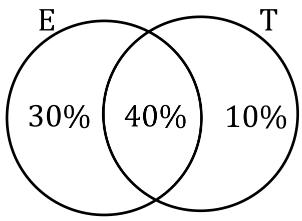
Vamos usar diagramas de Venn. O primeiro passo é **sempre começar com a intersecção**. Note que 40% desses jovens trabalham (T) e estudam (E). Assim,



Sabemos que **70% deles estudam**. Como já contabilizamos dos que estudam na intersecção, ficamos com:



Sabemos ainda que **50% deles trabalham**. Já contabilizamos 40% na intersecção. Logo,



A quantidade de jovens que **estudam ou trabalham** é dada pela soma das porcentagens das regiões do diagrama que esquematizamos acima.

$$n(E \cup T) = 30\% + 40\% + 10\% \quad \rightarrow \quad n(E \cup T) = 80\%$$

Como 80% dos jovens estudam ou trabalham, **os restantes 20% não fazem nenhum dos dois**.

Gabarito: LETRA E.

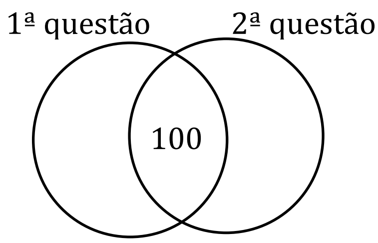
7. (VUNESP/TJ-SP/2015) Uma avaliação com apenas duas questões foi respondida por um grupo composto por X pessoas. Sabendo-se que exatamente 160 pessoas desse grupo acertaram a primeira questão, que exatamente 100 pessoas acertaram as duas questões, que exatamente 250 pessoas acertaram apenas uma das duas questões, e que exatamente 180 pessoas erraram a segunda questão, é possível afirmar, corretamente, que X é igual a

A) 520.
B) 420.
C) 370.
D) 470.
E) 610.

Comentários:

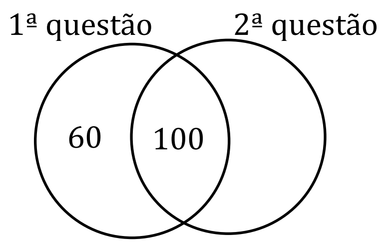
Vamos esquematizar o diagrama, sempre lembrando de começar pela intersecção!

- 100 pessoas acertaram as duas questões.



- 160 pessoas acertaram a primeira questão.

Como já contabilizamos 100 na intersecção, podemos concluir que **60 pessoas acertaram apenas a primeira questão**.

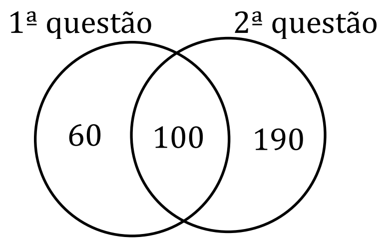


- exatamente 250 pessoas acertaram apenas uma das duas questões.

Dessas 250 pessoas, já determinamos que 60 acertaram apenas a primeira questão. Com isso,

$$250 - 60 = 190$$

190 pessoas acertaram apenas a segunda questão.



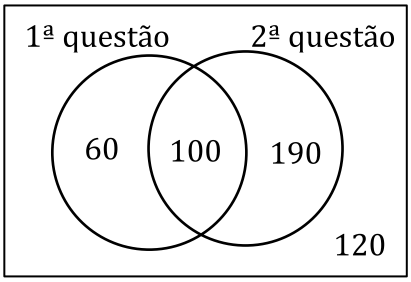
Ademais, como 180 pessoas erraram a segunda questão. Ora, você concorda comigo que **se 180 pessoas erraram a segunda questão, então elas podem ter acertado apenas a primeira ou ter errado as duas**!

$$Pessoas\ que\ acertaram\ apenas\ a\ primeira + erraram\ as\ duas = 180$$

Do nosso diagrama, vemos que **60 pessoas acertaram apenas a primeira**, logo

$$60 + erraram\ as\ duas = 180 \quad \rightarrow \quad erraram\ as\ duas = 120$$

Logo, **120 pessoas erraram as duas questões**! Vamos representar isso em diagramas de Venn.



Para determinar a quantidade de estudantes desse grupo, devemos somar todas as quantidades nas regiões.

$$X = 60 + 100 + 190 + 120 \quad \rightarrow \quad X = 470$$

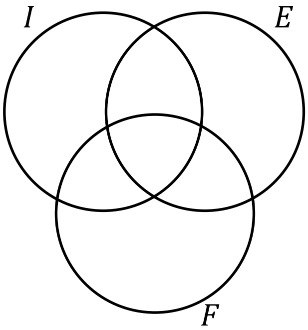
Gabarito: LETRA D.

8. (VUNESP/CODEN/2021) Em um grupo de pessoas há quem fale apenas inglês e francês, há quem fale apenas francês e espanhol e há quem fale apenas espanhol e inglês. Não há quem fale as três línguas. Das 20 pessoas que falam inglês, 8 falam apenas inglês. Das 19 pessoas que falam francês, 6 delas falam apenas francês. São 32 pessoas que falam espanhol. Com essas informações, a diferença entre o número daqueles que não falam francês e o número daqueles que não falam espanhol é

A) 15.
B) 13.
C) 12.
D) 9.
E) 8.

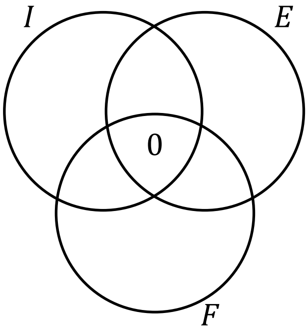
Comentários:

Vamos considerar um conjunto daqueles que falam inglês (I), um outro formado por aquele que falam francês (F) e um último formado por aqueles que falam espanhol (E).



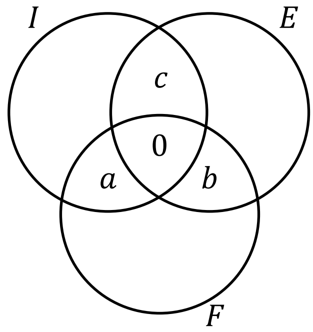
Agora, vamos analisar o que foi dito pelo enunciado.

- **Nenhum fala as três línguas**.

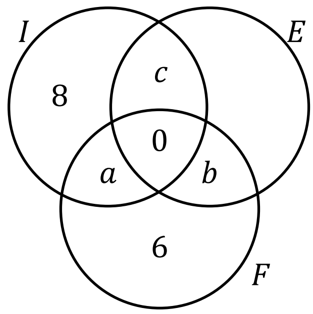


- Há quem fale apenas inglês e francês, há quem fale apenas francês e espanhol e há quem fale apenas espanhol e inglês.

Como o enunciado não explicitou esses valores, vamos chamá-los de "a", "b" e "c" e colocá-los no diagrama.



- **8 delas falam apenas inglês** e **6 falam apenas francês**.



- Além disso, temos que **20 pessoas falam inglês**.

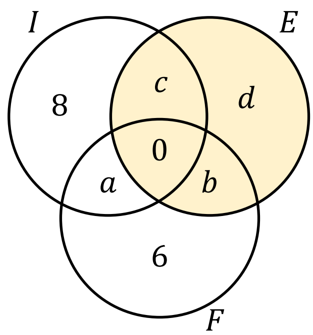
$$8 + a + c = 20 \quad \rightarrow \quad a + c = 12 \quad (1)$$

- **19 pessoas falam francês**.

$$a + b + 6 = 19 \quad \rightarrow \quad a + b = 13 \quad (2)$$

- São **32 pessoas que falam espanhol**.

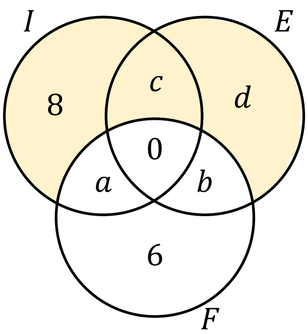
Aqui, a questão não deixa claro quantos falam apenas espanhol, vamos chamar essa quantidade de "d".



Toda **a região destacada deve totalizar 32 pessoas**.

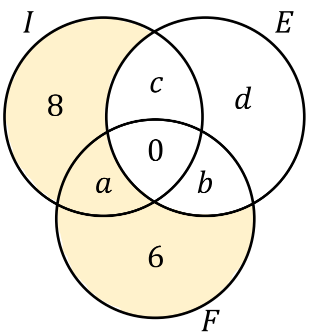
$$c + d + 0 + b = 32 \qquad \rightarrow \qquad b + c + d = 32 \quad (3)$$

Agora, vamos calcular o número de pessoas que não falam francês.



$$Não\ falam\ francês = 8 + c + d$$

E o número de pessoas que não falam espanhol:



$$Não\ falam\ espanhol = 8 + a + 6 \qquad \rightarrow \qquad Não\ falam\ espanhol = 14 + a$$

Chamando de "dif" **a diferença entre essas duas quantidades** é de:

$$dif = (8 + c + d) - (14 + a)$$

$$dif = c + d - a - 6 \qquad (4)$$

De (2), sabemos que $a + b = 13$. Com isso,

$$a = 13 - b \quad (5)$$

De (3), sabemos que $b + c + d = 32$. Logo,

$$c + d = 32 - b \quad (6)$$

Substituindo (5) e (6) em (4)

$$dif = (32 - b) - (13 - b) - 6 \quad \rightarrow \quad dif = 32 - \cancel{b} - 13 + \cancel{b} - 6 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{dif = 13}$$

Gabarito: LETRA B.

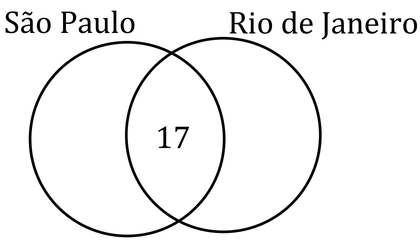
9. (VUNESP/PM-SP/2020) Em um grupo de pessoas, 54 delas disseram já terem visitado a cidade de São Paulo e 71 delas disseram já terem visitado a cidade do Rio de Janeiro. Sabendo que, desse grupo, 17 pessoas já visitaram essas duas cidades e que todos já visitaram ao menos uma dessas duas cidades, o número de pessoas que formam esse grupo é

A) 142.
B) 126.
C) 118.
D) 108.

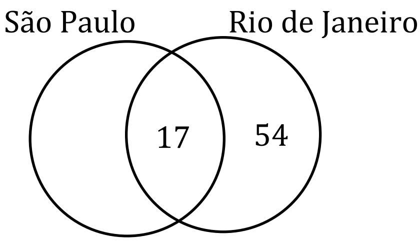
Comentários:

Vamos desenhar os diagramas, começando pela intersecção.

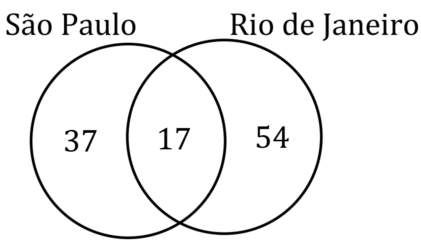
- Como **17 pessoas já visitaram essas duas cidades**:



- **71 delas disseram já terem visitado a cidade do Rio de Janeiro**. Como já contabilizamos que 17 visitaram as duas, temos que $71 - 17 = 54$ pessoas visitaram **apenas** o Rio de Janeiro.



- **54 delas já disseram ter visitado a cidade de São Paulo**. Como já contabilizamos que 17 visitaram as duas cidades, temos que $54 - 17 = 37$ pessoas visitaram **apenas** São Paulo.



Não temos pessoas fora desse grupo, pois o enunciado deixa claro que todas as pessoas envolvidas visitaram pelo menos uma dessas cidades. Assim, o número de pessoas no grupo é dado pela **soma das quantidades em cada uma das regiões acima**.

$$Total = 37 + 17 + 54 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Total = 108}$$

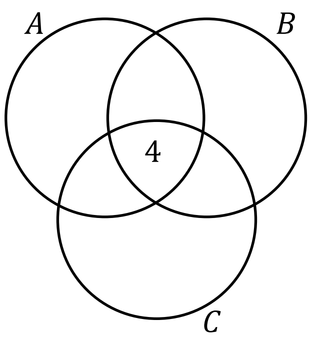
Gabarito: LETRA D.

10. (VUNESP/HC-UFU/2020) Em certo grupo com 29 profissionais formados nas áreas A, B ou C, 4 pessoas têm formação nessas três áreas. Em se tratando de formação em apenas duas dessas áreas, 5 pessoas são formadas em A e B, 7 pessoas, em B e C, e 4 pessoas são formadas nas áreas A e C. Sabendo-se que 15 pessoas são formadas na área A, é correto afirmar que são formados somente na área B ou somente na área C

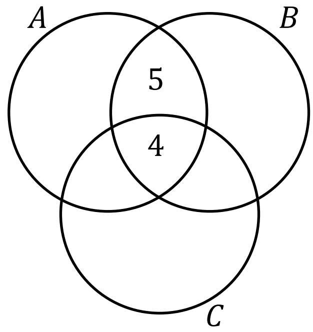
A) 7 pessoas.
B) 8 pessoas.
C) 9 pessoas.
D) 10 pessoas.
E) 11 pessoas.

Comentários:

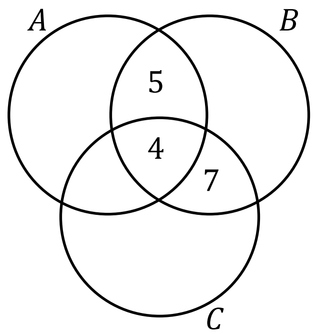
Mais uma vez, vamos recorrer aos diagramas. Como 4 pessoas têm formação nas três áreas:



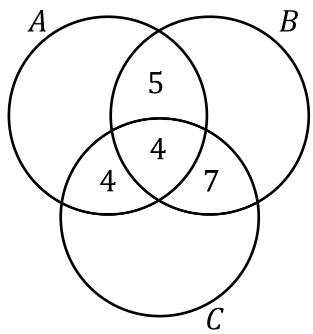
- **Em se tratando de formação em <u>apenas duas dessas áreas</u>, 5 pessoas são formadas em A e B**.



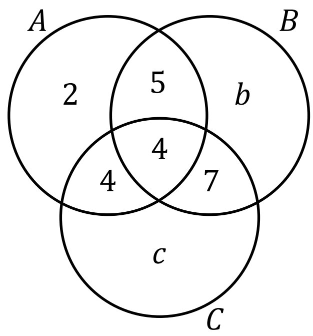
- **Em se tratando de formação em apenas duas dessas áreas, 7 pessoas são formadas em B e C.**



- **Em se tratando de formação em apenas duas dessas áreas, 4 pessoas são formadas em A e C.**



- Se 15 pessoas são formadas na área A e já contabilizamos 13 em A no diagrama, então podemos concluir que **2 pessoas são formadas apenas na área A**.



O enunciado quer saber quantos são formados apenas na área B ou apenas na área C. Na prática, ele quer a soma "$b + c$". Como sabemos que **o total de profissionais envolvido no grupo é 29**, a soma de todas as regiões do diagrama que esquematizamos acima deve totalizar esse valor.

$$2 + 5 + 4 + 4 + b + 7 + c = 29 \quad \rightarrow \quad b + c + 22 = 29 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b + c = 7}$$

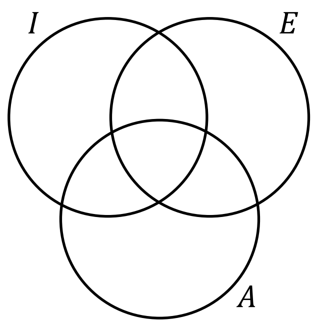
Gabarito: LETRA A.

11. (VUNESP/UNICAMP/2019) Numa escola de línguas, ensina-se inglês, espanhol e alemão. Sabe-se que o número de alunos que estuda alemão é 65, e que os alunos que estudam as três línguas são em número de 37. O número de alunos que fazem somente os cursos de inglês e espanhol é o dobro do número dos que fazem somente alemão. Há exatamente 3 alunos que estudam somente inglês e alemão, e o número de alunos que fazem apenas uma língua é 41. Não há quem esteja fazendo os cursos de espanhol e alemão e que não esteja fazendo também o curso de inglês. O número total de alunos da escola é

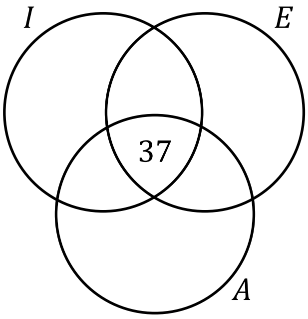
A) 115.
B) 118.
C) 120.
D) 121.
E) 131.

Comentários:

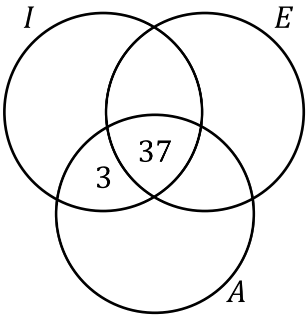
Seja I o conjunto de alunos que estudam inglês, "E" o conjunto dos que estudam espanhol e "A", os que estudam alemão.



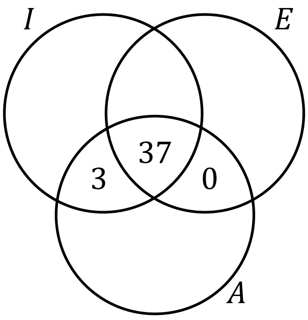
Como **37 alunos estudam as três línguas**,



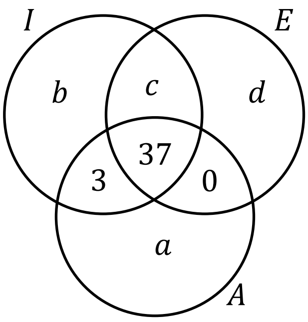
- 3 alunos estudam **somente** inglês e alemão.



- **Não há** quem esteja fazendo os cursos de espanhol e alemão e que não esteja fazendo também o curso de inglês.



Sobre as outras regiões, não temos informações diretas. Vamos chamar a quantidade de elementos em cada uma delas de "a", "b", "c" e "d".



Vamos verificar as outras informações.

- O número de alunos que estuda alemão é 65.

$$a + 37 + 3 + 0 = 65 \quad \rightarrow \quad a + 40 = 65 \quad \rightarrow \quad a = 25$$

- O número de alunos que fazem somente os cursos de inglês e espanhol **é o dobro** do número dos que fazem somente alemão (note que 25 pessoas fazem somente alemão).

$$c = 2 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad c = 50$$

- O número de alunos que fazem **apenas uma língua** é 41.

$$b + d + a = 41 \quad \rightarrow \quad a + d + 25 = 41 \quad \rightarrow \quad b + d = 16$$

O número total de alunos é dado pela **soma das quantidades em cada uma das regiões**. Assim,

$$Total = a + b + c + d + 37 + 3 + 0$$

Substituindo $a = 25$, $c = 50$ e $b + d = 16$, ficamos com:

$$Total = 25 + 50 + 16 + 37 + 3 + 0$$

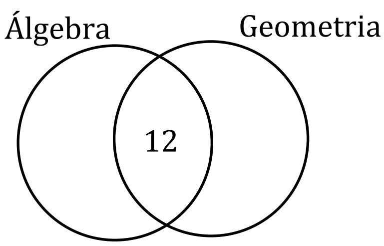
$$Total = 131$$

Gabarito: LETRA E.

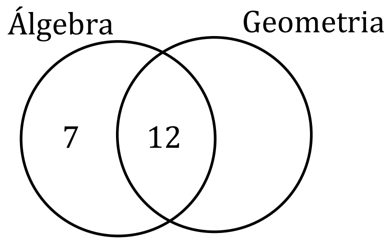
12. (VUNESP/PREF. CAMPINAS/2019) Uma prova de Matemática continha apenas duas questões, uma de álgebra e outra de geometria. Sabe-se que 12 alunos acertaram as duas questões e que 24 alunos acertaram apenas uma das duas questões. Sabendo que 19 alunos acertaram a questão de álgebra e que 15 erraram a de geometria, é correto afirmar que o número de alunos que fizeram essa prova foi
A) 45.
B) 43.
C) 46.
D) 44.
E) 47.

Comentários:
Vamos colocar as informações em um diagrama de Venn.

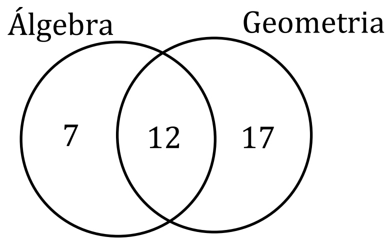
- 12 alunos acertaram as duas questões.



- 19 alunos acertaram a questão de álgebra. Como já contabilizamos 12 na intersecção, podemos concluir que $19 - 12 =$ **7 alunos acertaram <u>apenas</u> essa questão**.



- 24 alunos acertaram apenas uma questão. Como já sabemos que 7 desses 24 acertaram a questão de álgebra, então $24 - 7 =$ **17 acertaram <u>apenas</u> a de geometria**.



- Ademais, **15 erraram a de geometria**. Você concorda comigo para quem errou a de geometria há duas possibilidades: **ou acertou apenas a de álgebra ou errou foi as duas questões**!! Assim,

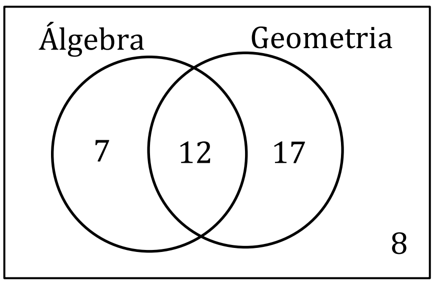
$$Acertou\ apenas\ Algébra + Errou\ as\ duas = 15$$

Como sabemos que 7 pessoas acertaram apenas álgebra, ficamos com:

$$7 + Errou\ as\ duas = 15$$

$$Errou\ as\ duas = 8$$

Logo, 8 pessoas erraram as duas questões. No diagrama,



O total de alunos é dado pela soma das quantidades em cada uma das regiões do diagrama acima.

$$\text{Total de Alunos} = 7 + 12 + 17 + 8$$

$$\text{Total de Alunos} = 44$$

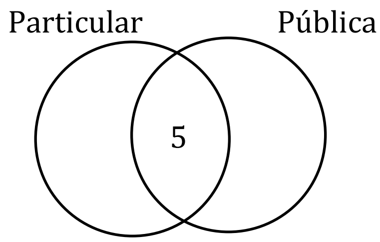
Gabarito: LETRA D.

13. (VUNESP/PM-SP/2019) Em um grupo de 40 professores, 5 deles trabalham em escolas particulares e também trabalham em escolas públicas. Sabendo-se que 25 desses professores trabalham em escolas particulares, o número de professores que trabalham em escolas públicas é

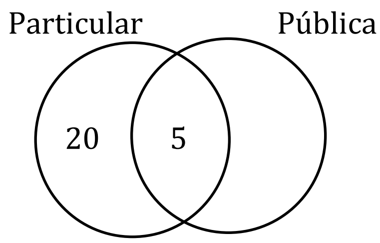
A) 17.
B) 18.
C) 19.
D) 20.

Comentários:

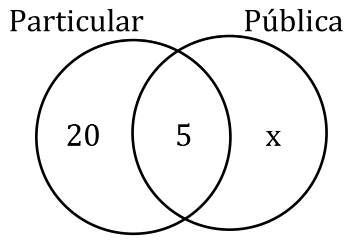
Utilizaremos os diagramas de Venn. Como **5 professores trabalham em escolas particulares e públicas**.



Ademais, 25 deles trabalham em escolas particulares. Como já contabilizamos 5 na intersecção, então temos que $25 - 5 =$ **20 trabalham apenas em escolas particulares**.



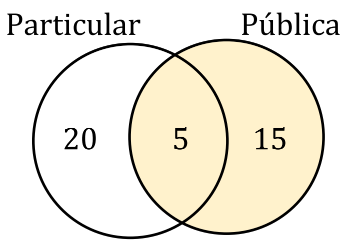
O enunciado quer saber **quantos professores trabalham na escola pública**. Perceba que temos uma região que ainda não sabemos a quantidade, vamos chamá-la de "x".



Como **o total de professores é 40**, a soma de todos os valores no nosso diagrama deve totalizar esse valor.

$$20 + 5 + x = 40 \quad \rightarrow \quad 25 + x = 40 \quad \rightarrow \quad x = 15$$

Os professores da rede pública podem ser representados pela seguinte parte do diagrama:



Assim,

$$\text{Pública} = 5 + 15 \quad \rightarrow \quad \text{Pública} = 20$$

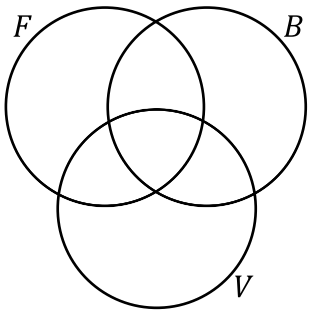
Gabarito: LETRA D.

14. (VUNESP/PREF. SJC/2019) Uma escola oferece cursos de futebol, basquete e voleibol. Estão inscritos 23 alunos no futebol, 24 alunos no basquetebol e 41 alunos no voleibol. Nenhum aluno está matriculado em exatamente dois desses cursos e 76 alunos estão matriculados em apenas um curso. O número de alunos matriculados nos três cursos é

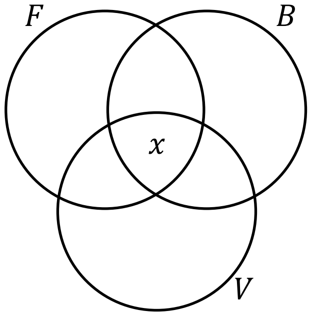
A) 7.
B) 6.
C) 5.
D) 4.

Comentários:

Diagramas de Venn!

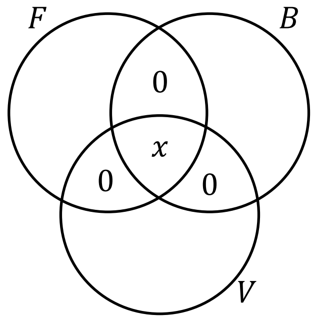


O enunciado quer saber exatamente **a intersecção dos três conjuntos**. Como ainda não sabemos, vamos simplesmente chamá-la de "x".

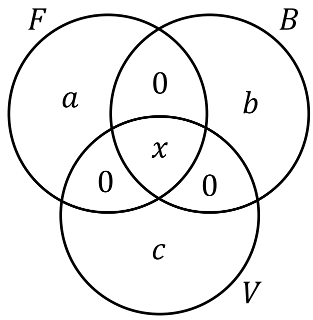


Agora, passemos a analisar as informações que a questão trouxe.

- Nenhum aluno está matriculado em exatamente dois desses cursos.



A questão não fornece informações para concluir diretamente sobre as outras regiões. Vamos chamar a quantidade de elementos em cada uma delas de "a", "b" e "c". No diagrama,



- Estão inscritos **23 alunos no futebol**.

$$a + x = 23 \quad (1)$$

- Estão inscritos **24 alunos no basquete**.

$$b + x = 24 \quad (2)$$

- Estão inscritos **41 alunos no voleibol**.

$$c + x = 41 \quad (3)$$

- 76 alunos estão matriculados em **apenas um curso**.

$$a + b + c = 76 \quad (4)$$

Usando (1), (2) e (3) em (4),

$$(23 - x) + (24 - x) + (41 - x) = 76$$

$$88 - 3x = 76 \quad \rightarrow \quad 3x = 12 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 4}$$

Logo, **4 alunos estão matriculados nos 3 cursos**.

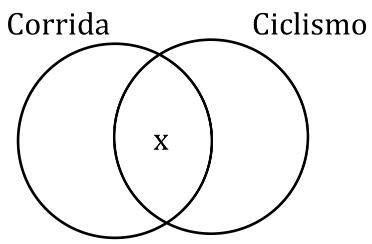
Gabarito: LETRA D.

15. (VUNESP/PAULIPREV/2018) Uma competição de natação conta com 241 nadadores. Desses nadadores, 84 já competiram em provas de corrida e 58 já competiram em provas de ciclismo. Para 101 desses nadadores é a primeira competição, de qualquer tipo de que participam. O número desses nadadores que já competiram nas três modalidades citadas é

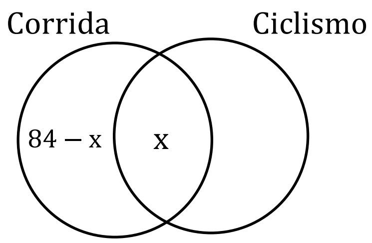
A) 2.
B) 4.
C) 8.
D) 16.

Comentários:

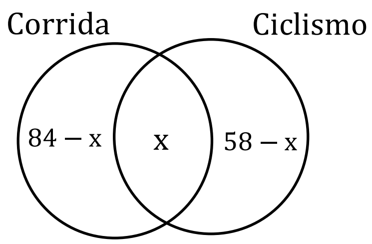
Nesse tipo de exercício, os diagramas de Venn sempre são uma boa saída. Não sabemos quantos nadadores já correram e também competiram em provas de ciclismo. Vamos chamar essa quantidade de "x".



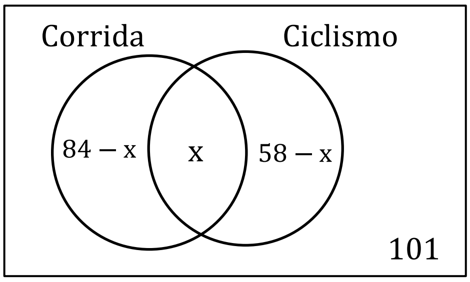
Como 84 já competiram em provas de corrida e temos "x" na intersecção, então $84 - x$ **nadadores apenas competiram em provas de corrida**.



Ademais, 58 nadadores já competiram em provas de ciclismo. Se já contabilizamos "x" deles na intersecção, então temos que $58 - x$ **competiram apenas em provas de ciclismo**.



A questão fala de uma competição de natação e aponta que para 101 nadadores é a sua primeira competição. Logo, esses 101 nadadores não podem ter participado de outra (nem de corrida, nem de ciclismo). Com isso,



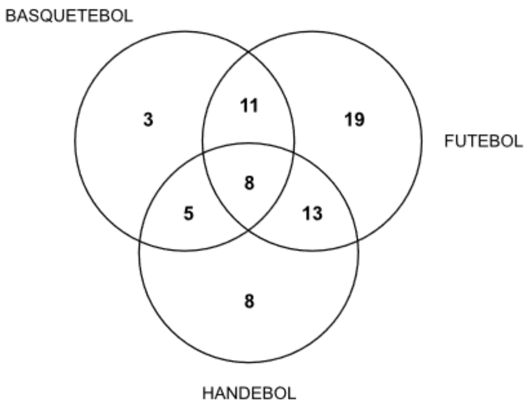
A soma das quantidades nas regiões do diagrama acima **deve totalizar os 241 nadadores envolvidos**.

$$(84 - x) + x + (58 - x) + 101 = 241 \quad \rightarrow \quad 243 - x = 241 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 2}$$

Logo, temos **dois nadadores que já competiram em corridas e no ciclismo**.

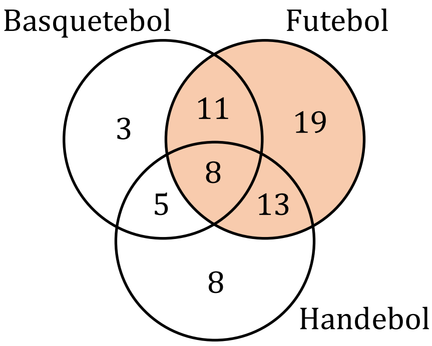
Gabarito: LETRA A.

16. (VUNESP/IPSM-SJC/2018) O diagrama mostra a distribuição dos praticantes de futebol, basquetebol e handebol de um clube. As intersecções significam que há praticantes de mais de um desses esportes.



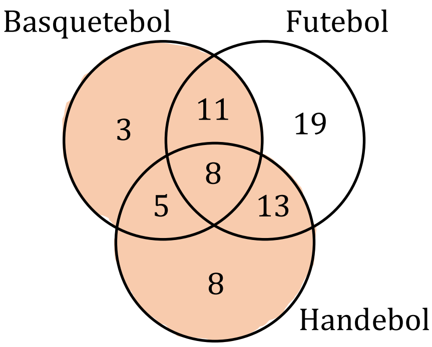
Nessa distribuição, é correto afirmar que o total de praticantes de futebol supera o total de praticantes dos outros dois esportes em um número igual a
A) 3.
B) 4.
C) 5.
D) 6.
E) 8.

Comentários:
Para determinarmos o total de praticantes de futebol, devemos somar todos os números que estão no interior do conjunto "FUTEBOL".



$$Total\ de\ Praticantes\ de\ Futebol = 11 + 8 + 13 + 19 = 51$$

O total de praticantes dos outros dois esportes é dado pela soma das seguintes regiões:



Note que apenas excluímos a região daqueles que **praticam <u>apenas</u> futebol**. Todo as outras regiões possuem praticantes dos outros esportes. **Também não há problema do praticante do outro esporte praticar também futebol**, ok?! Assim,

$$Total\ de\ Praticantes\ dos\ Outros\ Esportes = 3 + 11 + 5 + 8 + 13 + 8 = 48$$

Logo, a diferença entre as duas quantidades encontradas é de:

$$\mathbf{51 - 48 = 3}$$

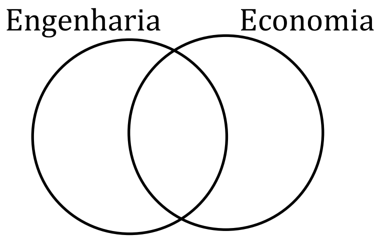
Gabarito: LETRA A.

17. (VUNESP/PM-SP/2018) Em um grupo de 60 funcionários de certo departamento, há 30 com formação em engenharia, 27 com formação em economia e 18 com formação em engenharia e economia. O número de pessoas desse grupo que não tem formação em engenharia nem em economia é

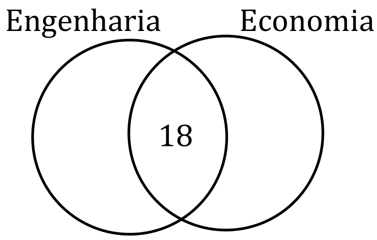
A) 21.
B) 19.
C) 18.
D) 15.

Comentários:

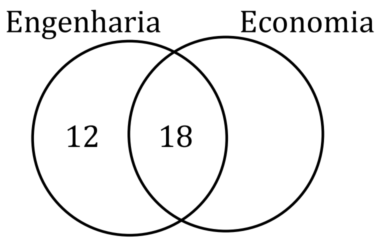
Para resolver esse exercício, utilizaremos diagramas de Venn.



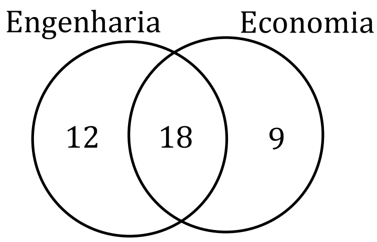
- 18 funcionários têm formação em **engenharia** **<u>e</u>** **economia**.



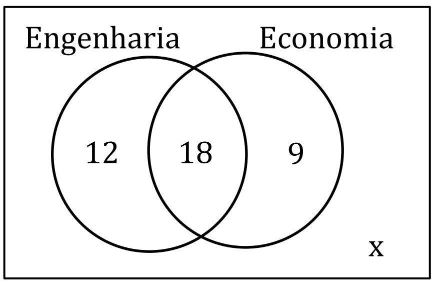
- Há 30 funcionários com formação em engenharia. Já contabilizamos 18 na intersecção, então $30 - 18 =$ **12 funcionários possuem formação <u>apenas</u> em engenharia**.



- Ademais, 27 funcionários possuem formação em economia. Como contabilizamos 18 deles na intersecção, então $27 - 18 =$ **9 funcionários possuem formação <u>apenas</u> em economia**.



Queremos determinar uma quantidade "x" de funcionários que **não possui nenhuma das duas formações**.



O somatório de todas as quantidades nas regiões do diagrama cima **deve totalizar os 60 funcionários**. Assim,

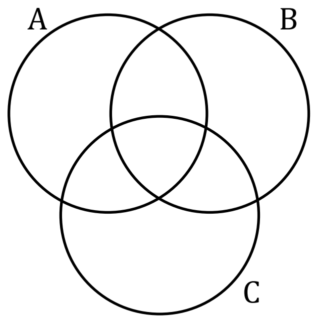
$$12 + 18 + 9 + x = 60 \quad \rightarrow \quad 39 + x = 60 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 21}$$

Gabarito: LETRA A.

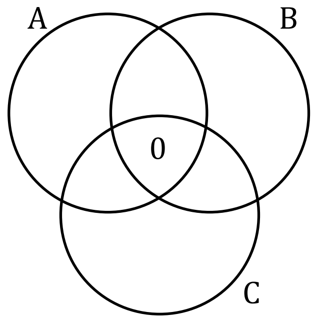
18. (VUNESP/TCE-SP/2017) Considerando os conjuntos A, B e C e suas intersecções, não existem elementos na intersecção dos 3 conjuntos. O número de elementos dos conjuntos A, B e C são respectivamente 35, 32 e 33. O total de elementos que pertencem a apenas um desses conjuntos é igual a 46. O número total de elementos desses 3 conjuntos é

A) 59.
B) 64.
C) 87.
D) 73.
E) 54.

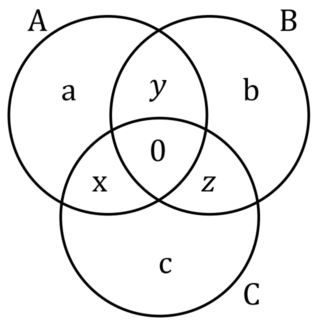
Comentários:
Vamos recorrer aos diagramas de Venn.



- Não existem elementos na intersecção dos três conjuntos.



Nas demais regiões, não temos informações diretas sobre as quantidades. Por isso, vamos pôr letras.



- O total de elementos que pertencem a apenas um desses conjuntos é igual a 46.

$$a + b + c = 46 \qquad (1)$$

- O número de elementos dos conjuntos A, B e C são respectivamente 35, 32 e 33.

$$a + x + y = 35 \qquad (2)$$

$$b + y + z = 32 \qquad (3)$$

$$c + x + z = 33 \qquad (4)$$

Somando (2), (3) e (4):

$$(a + b + c) + 2 \cdot (x + y + z) = 100 \qquad (5)$$

Podemos usar (1) em (5):

$$46 + 2 \cdot (x + y + z) = 100 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot (x + y + z) = 54 \quad \rightarrow \quad x + y + z = 27 \qquad (6)$$

O enunciado quer saber o total de elementos desses três conjuntos.

$$Total = (a + b + c) + (x + y + z) + 0$$

Usando (1) e (6) na expressão acima:

$$\text{Total} = 46 + 27 \quad \rightarrow \quad \textbf{Total} = \textbf{73}$$

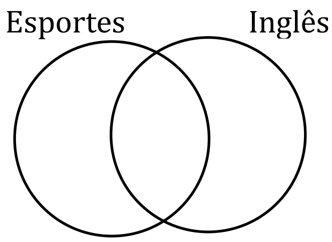
Gabarito: LETRA D.

19. (VUNESP/CM ITANHAÉM/2017) Em uma empresa, do total de funcionários, 40% praticam esportes, e 90% estudam inglês, sendo 340 a diferença entre o número de funcionários que fazem essas duas atividades. Nessa empresa, o número de funcionários que exercem as duas atividades é, no mínimo, igual a

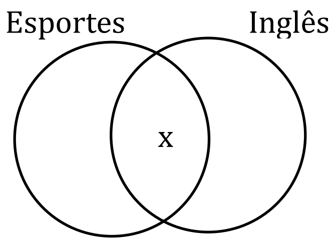
A) 102.
B) 136.
C) 204.
D) 272.

E) 340.

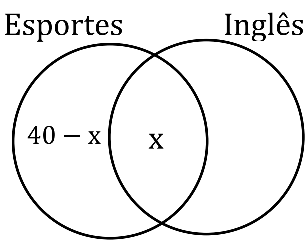
Comentários:
Vamos recorrer aos diagramas de Venn.



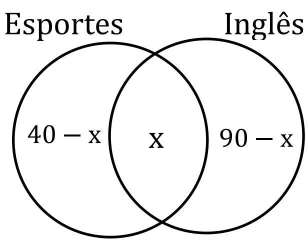
Não sabemos a porcentagem de funcionários que fazem as duas atividades. Por isso, vamos chamá-la de "x".



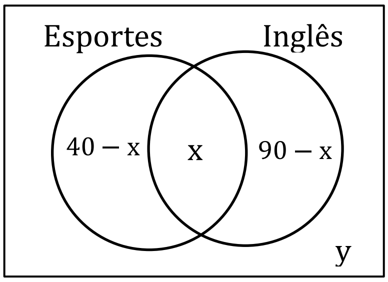
Se 40% praticam esportes e já contabilizamos "x%" na intersecção, então **(40-x)% apenas praticam esportes**.



Analogamente, 90% estudam inglês. No entanto, já contabilizamos "x%" na intersecção.



Vamos considerar que $y\%$ **não praticam esportes nem estudam inglês**.



A soma de todas essas regiões **deve totalizar 100% dos funcionários da empresa**.

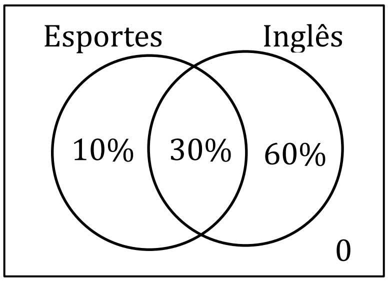
$$(40 - x) + x + (90 - x) + y = 100$$

$$130 - x + y = 100 \quad \rightarrow \quad x = 30 + y$$

Note que a questão pede **o número <u>mínimo</u> de funcionários que fazem as duas atividades**. Para **x ser mínimo**, temos que ter $y = 0$. Na prática, isso significa que todo funcionário deve estar engajado **<u>em pelo menos uma atividade</u>**. Assim,

$$x = 30 + 0 \quad \rightarrow \quad x = 30\%$$

Ou seja, **30% dos funcionários praticam as duas atividades**. Colocando essa informação no diagrama,



Sabemos que 340 é a diferença entre as quantidades de funcionários que fazem essas duas atividades. Assim, **seja T o total de funcionários**.

$$90\% \cdot T - 40\% \cdot T = 340 \quad \rightarrow \quad 50\% \cdot T = 340 \quad \rightarrow \quad T = 680$$

Concluímos que o total de funcionários dessa empresa é 680. Como **30% desse número pratica as duas atividades**, temos que:

$$30\% \cdot 680 = 204$$

204 pessoas praticam as duas atividades.

Gabarito: LETRA C.

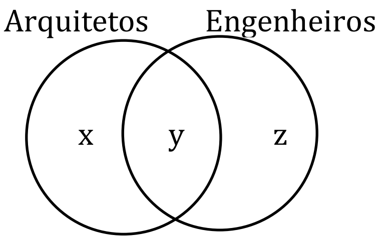
20. (VUNESP/TJM-SP/2017) Em uma reunião composta somente por arquitetos e engenheiros, o número daqueles que são apenas arquitetos supera, em 31 unidades, o número daqueles que são apenas engenheiros. O número daqueles que são arquitetos e engenheiros supera, em 63 unidades, o número

daqueles que são apenas arquitetos. Ao todo, estão presentes nessa reunião 476 pessoas. Dentre esses, o número daqueles que exercem apenas uma dessas profissões é igual a

A) 351.
B) 312.
C) 265.
D) 232.

Comentários:

Overdose de diagrama de Venn!



- O número daqueles que são apenas arquitetos supera, **em 31 unidades**, o número daqueles que são apenas engenheiros.

$$x = z + 31 \quad (1)$$

- O número daqueles que são arquitetos e engenheiros supera, **em 63 unidades**, o número daqueles que são apenas arquitetos.

$$y = x + 63 \quad (2)$$

- Ao todo, **estão presentes nessa reunião <u>476 pessoas</u>**.

$$x + y + z = 476 \quad (3)$$

(1), (2) e (3) formam um sistema de **três equações e três incógnitas**. Podemos resolvê-lo. Usando (1) em (2):

$$y = z + 31 + 63 \quad \rightarrow \quad y = z + 94 \quad (4)$$

Usando (1) e (4) em (3):

$$(z + 31) + (z + 94) + z = 476 \quad \rightarrow \quad 3z + 125 = 476 \quad \rightarrow \quad 3z = 351 \quad \rightarrow \quad z = 117$$

Vamos substituir esse valor em (1), para determinarmos x.

$$x = 117 + 31 \quad \rightarrow \quad x = 148$$

Queremos saber a quantidade de pessoas que exercem apenas uma profissão, assim, vamos somar "x" e "z".

$$x + z = 148 + 117 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x + z = 265}$$

Gabarito: LETRA C.

21. (VUNESP/MPE-SP/2016) Um curso de idiomas tem 59 alunos inscritos no curso de alemão, 63 inscritos no curso de italiano e 214 no curso de inglês. Desses alunos, 23 cursam as três línguas, e 43 alunos estudam

apenas um dos idiomas. O número de alunos que estão cursando exatamente dois idiomas dentre esses três é igual a

A) 100.

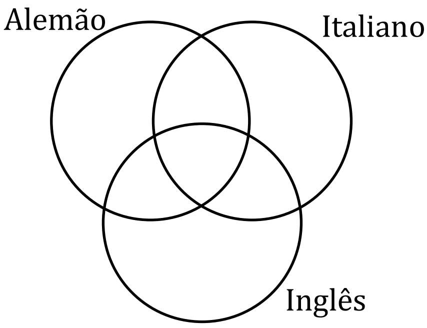
B) 103.

C) 112.

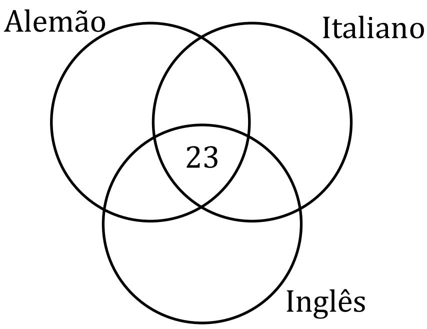
D) 106.

Comentários:

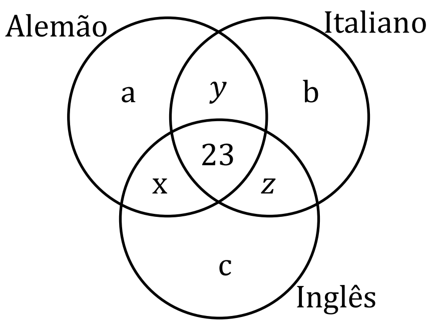
Vamos recorrer aos diagramas de Venn.



- 23 cursam as três línguas.



Nas demais regiões, não temos informações diretas sobre as quantidades. Por isso, vamos pôr letras.



- 43 alunos estudam **apenas um** dos idiomas.

$$a + b + c = 43 \quad (1)$$

- Um curso de idiomas tem **59 alunos inscritos no curso de alemão**, **63 inscritos no curso de italiano** e **214 no curso de inglês**.

$$a + x + y + 23 = 59 \quad \rightarrow \quad a + x + y = 36 \quad (2)$$

$$b + y + z + 23 = 63 \quad \rightarrow \quad b + y + z = 40 \quad (3)$$

$$c + x + z + 23 = 214 \quad \rightarrow \quad c + x + z = 191 \quad (4)$$

Somando (2), (3) e (4):

$$(a + b + c) + 2 \cdot (x + y + z) = 267 \quad (5)$$

Podemos usar (1) em (5):

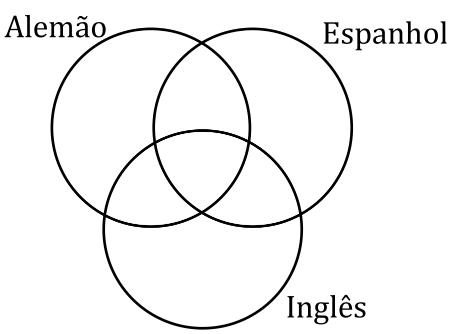
$$43 + 2 \cdot (x + y + z) = 267 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot (x + y + z) = 224 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x + y + z = 112}$$

Note que a soma "$x + y + z$" é a quantidade de alunos que estão cursando **exatamente dois desses cursos**.

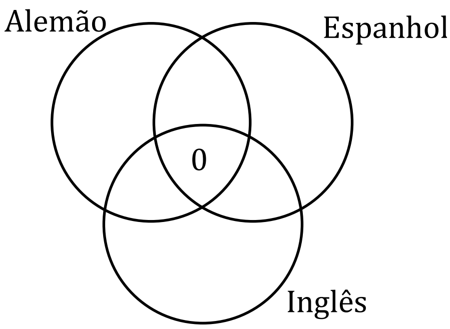
Gabarito: LETRA C.

22. (VUNESP/PREF. SJC/2015) Uma pesquisa feita em uma empresa com 400 funcionários indicou que 250 são fluentes na língua inglesa, 200 na língua espanhola e 190 na língua alemã. Todos os funcionários que falam espanhol também falam uma das outras duas línguas mencionadas e nenhum funcionário é fluente nessas três línguas. São fluentes em inglês e alemão 100 pessoas e 40 funcionários falam apenas em inglês. Nessa empresa, o número de funcionários que não domina nenhuma das três línguas pesquisadas é
A) 20.
B) 30.
C) 40.
D) 50.
E) 60.

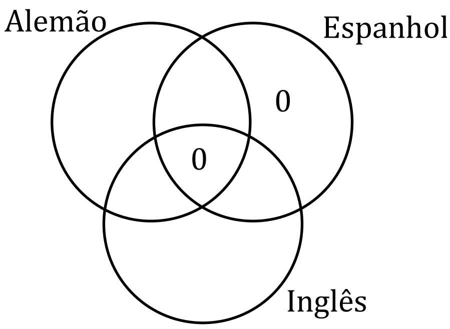
Comentários:
Você deve ter percebido que essas questões gostam de envolver idiomas (rsrs). Para resolvê-las, é sempre interessante usarmos diagramas de Venn.



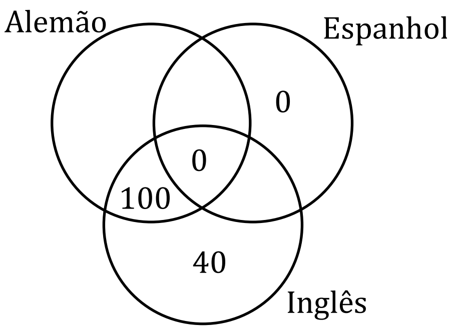
A primeira informação que devemos levar em conta é: **nenhum funcionário é fluente nessas três línguas**.



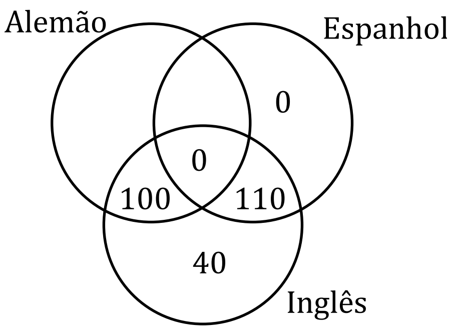
Ademais, todos os funcionários que falam espanhol também falam uma das outras duas línguas mencionadas. Em outras palavras, **não existe quem fale apenas espanhol**.



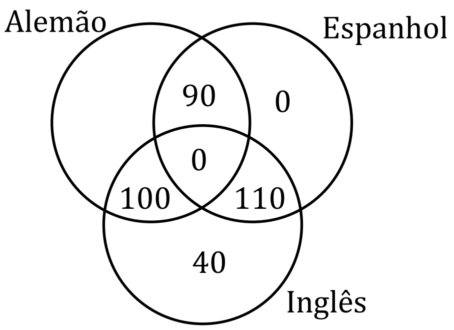
Temos também a informação de que **são fluentes em inglês e alemão 100 pessoas** e **40 funcionários falam apenas em inglês**.



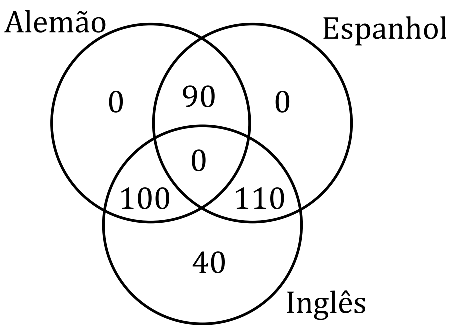
Temos **250 fluentes em inglês**. No diagrama acima, já contabilizamos 140. A região que falta preencher dentro do conjunto "Inglês" deve englobar os 110 restantes.



Temos **200 fluentes na língua espanhola**. Do diagrama, já contabilizamos 110. Os 90 restantes devem estar na região ainda não preenchida.



Por fim, **190 são fluentes na língua alemã**. Do diagrama, já contabilizamos os 190. Com isso, podemos dizer que não existe ninguém que seja fluente apenas em alemão.



O total de funcionários **que falam pelo menos um idioma** é dada pela soma das quantidades nas regiões do diagrama acima.

$$90 + 100 + 110 + 40 = 340$$

Assim, 340 funcionários falam pelo menos um idioma. Se a empresa tem 400 funcionários, então $400 - 340 =$ **60 funcionários não falam nenhum dos 3 idiomas**.

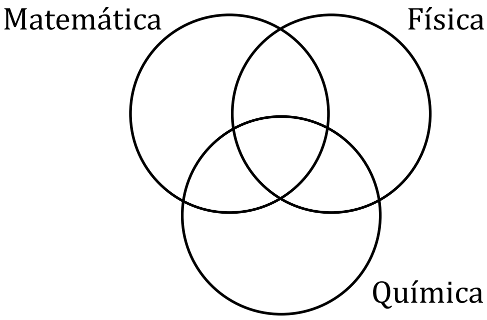
Gabarito: LETRA E.

23. (VUNESP/PC-SP/2014) Um cursinho oferece aulas de reforço em matemática, física e química. Dos alunos que se inscreveram para esse reforço, 33 optaram por apenas uma disciplina e 15 escolheram as três. O respectivo total de matrículas por disciplina foi 39, 55 e 72, o que permite concluir, corretamente, que o número de alunos matriculados em exatamente duas disciplinas é igual a

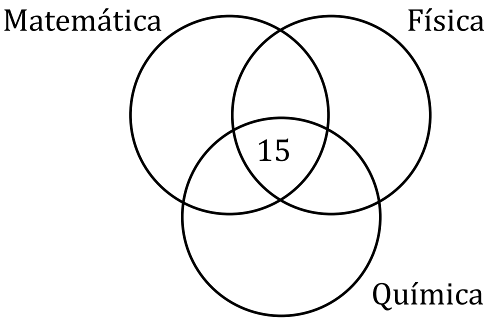
A) 55.
B) 44.
C) 22.
D) 33.
E) 11.

Comentários:

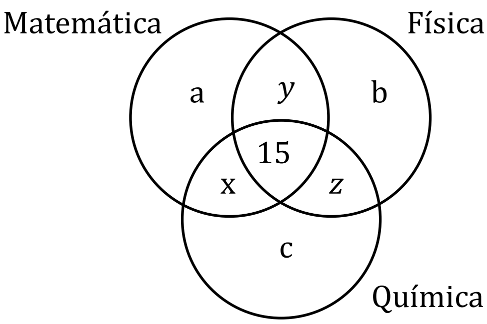
Vamos recorrer aos diagramas de Venn.



- 15 escolheram as três.



Nas demais regiões, não temos informações diretas sobre as quantidades. Por isso, vamos pôr letras.



- 33 optaram por apenas uma disciplina.

$$a + b + c = 33 \qquad (1)$$

- O respectivo total de matrículas por disciplina foi 39, 55 e 72.

$$a + x + y + 15 = 39 \quad \rightarrow \quad a + x + y = 24 \qquad (2)$$
$$b + y + z + 15 = 55 \quad \rightarrow \quad b + y + z = 40 \qquad (3)$$
$$c + x + z + 15 = 72 \quad \rightarrow \quad c + x + z = 57 \qquad (4)$$

Somando (2), (3) e (4):

$$(a+b+c)+2\cdot(x+y+z)=121 \quad (5)$$

Podemos usar (1) em (5):

$$33+2\cdot(x+y+z)=121 \quad \rightarrow \quad 2\cdot(x+y+z)=88 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x+y+z=44}$$

Note que a soma "$x+y+z$" é a quantidade de alunos **matriculados em exatamente duas disciplinas**.

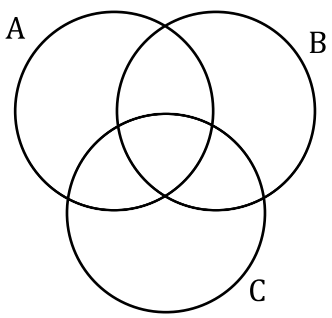
Gabarito: LETRA B.

24. (VUNESP/PC-SP/2014) Três conjuntos, A, B e C, têm um total de 40 elementos. Sabe-se que 7 elementos pertencem apenas ao conjunto A, 10 elementos, apenas ao conjunto B, 13 elementos, apenas ao conjunto C, e pelo menos um elemento pertence simultaneamente aos três conjuntos. Os demais elementos podem pertencer ou a dois desses conjuntos ou aos três conjuntos. Desse modo, a maior diferença possível da quantidade total de elementos de certo conjunto em relação à quantidade total de elementos de outro conjunto é

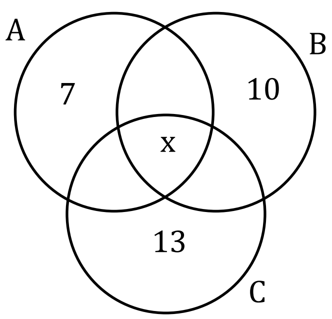
A) 4.
B) 17.
C) 6.
D) 15.
E) 27.

Comentários:

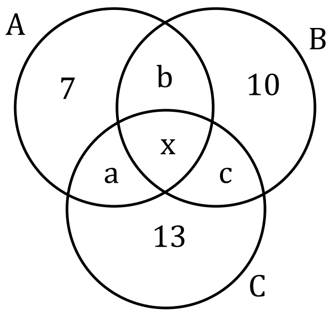
Vamos usar os diagramas de Venn.



A primeira informação que podemos utilizar é: 7 elementos pertencem **apenas** ao conjunto A, 10 elementos, **apenas** ao conjunto B, 13 elementos, **apenas** ao conjunto C, e **pelo menos um** elemento pertence simultaneamente aos três conjuntos. No diagrama,



Como **não sabemos o valor da intersecção dos três conjuntos**, vamos simplesmente chamá-la de "x". Para as demais regiões do diagrama, não temos informações diretas. Por esse motivo, vamos chamá-las de "a", "b" e "c".



Como **temos um total de 40 elementos**, a soma das quantidades discriminadas no diagrama acima deve totalizar esse valor.

$$7 + 10 + 13 + a + b + c + x = 40$$

$$30 + a + b + c + x = 40$$

$$a + b + c + x = 10 \quad (1)$$

Queremos **a <u>maior diferença</u> possível** entre as quantidades de elementos dos conjuntos. Note que,

$$n(A) = 7 + a + b + x$$

$$n(B) = 10 + b + c + x$$

$$n(C) = 13 + a + c + x$$

A maior diferença possível está "aparentando" ser dada por $n(C) - n(A)$. **O motivo disso é que "13" é o maior número, enquanto "7" é o menor.** Assim, maximizamos a diferença.

$$n(C) - n(A) = (13 + a + c + x) - (7 + a + b + x)$$

$$n(C) - n(A) = 6 + c - b$$

De (1), podemos escrever que:

$$c = 10 - a - b - x$$

Substituindo na expressão anterior,

$$n(C) - n(A) = 6 + (10 - a - b - x) - b$$

$$n(C) - n(A) = 16 - a - 2b - x$$

Ora, para maximizar $n(C) - n(A)$ **devemos diminuir ao máximo o que estamos subtraindo do "16"**. Como **nada foi falado sobre "a" ou "b"**, podemos simplesmente dizer que

$$a = b = 0$$

No entanto, o enunciado diz que **a intersecção dos três conjuntos tem pelo menos um elemento**. Com isso, **"x" deve ser, no mínimo, igual a 1**. Esse é o valor que usaremos para ele.

$$x = 1$$

Logo,

$$n(C) - n(A) = 16 - 0 - 2 \cdot 0 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n(C) - n(A) = 15}$$

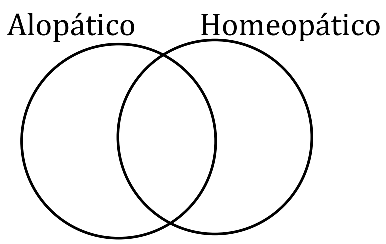
Gabarito: LETRA D.

25. (VUNESP/TJ-MT/2008) Em uma pesquisa de opinião feita com os frequentadores de um centro médico, constatou-se que 60% dos entrevistados faziam tratamento alopático, 35% faziam tratamento homeopático, e 15% utilizavam ambos simultaneamente. Pode-se concluir, então, que a porcentagem que indica os entrevistados que não utilizam nenhum desses tratamentos é

A) 40%
B) 35%
C) 30%
D) 25%
E) 20%

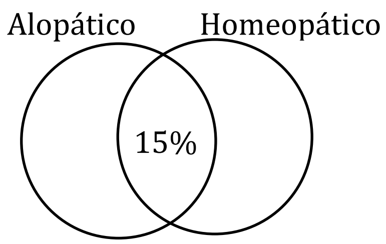
Comentários:

Mais uma vez, utilizaremos os diagramas de Venn.

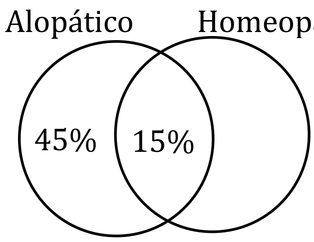


Nesse tipo de questão, buscamos **sempre começar com o valor da intersecção entre os dois conjuntos**.

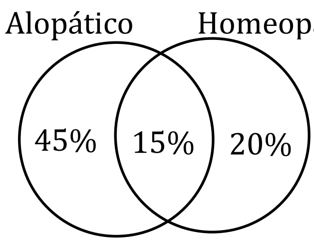
- O enunciado diz que **15% utilizam ambos os tratamentos**, simultaneamente,



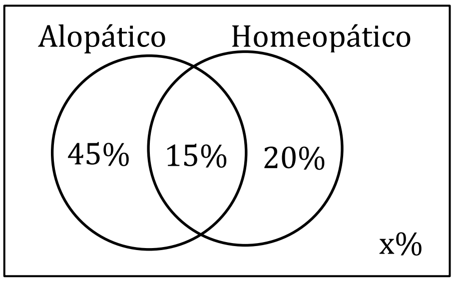
- Como 60% fazem tratamento alopático e já contabilizamos 15% na intersecção, então podemos dizer que $60\% - 15\% = \mathbf{45}\%$ **fazem <u>apenas</u> o tratamento alopático**.



- Ademais, 35% fazem tratamento homeopático. Como já contabilizamos 15% na intersecção, temos que $35\% - 15\% = \mathbf{20}\%$ **fazem <u>apenas</u> tratamento homeopático**.



O enunciado quer a porcentagem dos entrevistados que **não utiliza nenhum dos tratamentos**.



A soma de todas as regiões no diagrama acima **deve totalizar 100% dos entrevistados**. Logo,

$$45\% + 15\% + 20\% + x = 100\% \quad \rightarrow \quad x = 100\% - 80\% \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 20\%}$$

Gabarito: LETRA E.

LISTA DE QUESTÕES

União, Intersecção, Complementar e Diferença

1. (VUNESP/ESFCEX/2021) Uma condição necessária para a existência do complementar do conjunto B em um universo A é

A) $B \subset A$.

B) $A \subset B$.

C) $A \neq B$.

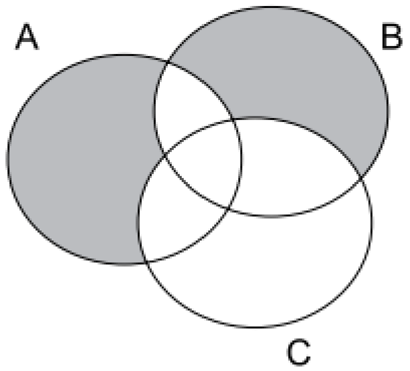
D) $B \ = \ A$.

E) $A = \emptyset$.

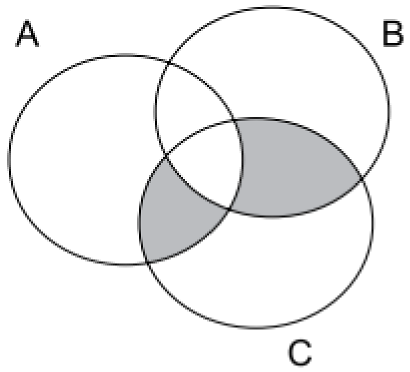
2. (VUNESP/ISS-GRU/2019) Considere as operações entre conjuntos:

$$A \cap B - C$$

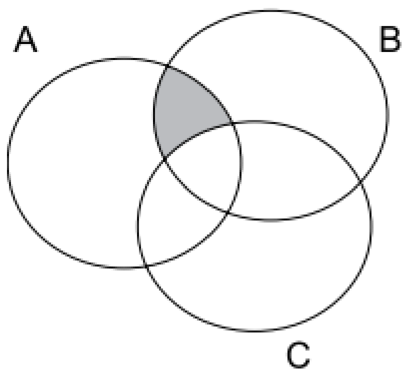
A alternativa cuja parte sombreada corresponde ao resultado dessas operações é:



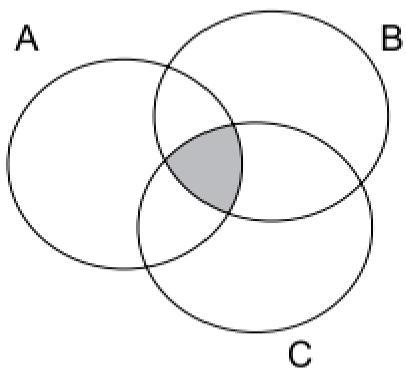
A)



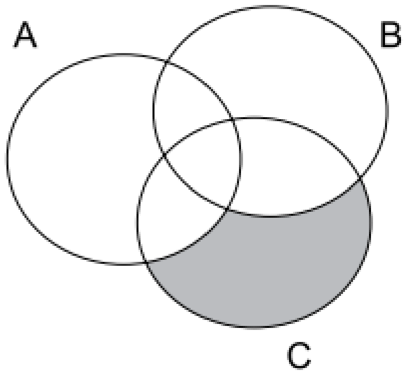
C)



B)



D)



E)

3. (VUNESP/ISS-GRU/2019) Considere os conjuntos:

$\boldsymbol{F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$
$\boldsymbol{G = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}}$
$\boldsymbol{H = \{1, 2, 3, 10, 11, 12\}}$
$\boldsymbol{J = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}}$

Sabe-se que $K = (G \cup H) \cap (F \cap J)$. O conjunto é igual a

A) $K = \{1,2,4,5,6\}$
B) $K = \{4,5,6\}$
C) $K = \{1,2,4,5,6,10\}$
D) $K = \{3,4,6\}$
E) $K = \{4,6\}$

4. (VUNESP/PM-SP/2018) De acordo com as leis de De Morgan, o complementar da união é igual a intersecção dos complementares. Assim, dado um conjunto X, seja X^C o seu complementar em relação ao conjunto universo. Considerando $V = \{a, e, i, o, u\}$ o conjunto universo, sejam os subconjuntos $A = \{a, e\}$ e $B = \{o, u\}$. O conjunto $A^C \cap B^C$ é igual ao conjunto

A) $\{ i \}$
B) $\{ o \}$
C) $\{ o, i \}$
D) $\{ a, i \}$

5. (VUNESP/PC-SP/2014) Lalá, Lelé e Lili, apenas elas, participam de um grupo A. Lili, Lola, Lulu e Lilo participam de um grupo B, com apenas 4 elementos. Certo dia, um grupo C foi montado com apenas Lalá e Lelé para realizar uma tarefa. Pode-se afirmar corretamente que esse grupo C corresponde ao conjunto

A) reunião de A e B.
B) diferença entre A e B.
C) interseção de A e B.
D) complementar de A em relação a B.
E) das partes de A.

GABARITO

1. LETRA A
2. LETRA B
3. LETRA D
4. LETRA A
5. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES - VUNESP

Princípio da Inclusão-Exclusão

1. (VUNESP/TJ-SP/2019) São três os conjuntos. A totalidade de elementos que estão nesses três conjuntos é 42. A totalidade de elementos que estão em dois, e apenas dois desses conjuntos, é 42. A totalidade de elementos que estão em um, e apenas um desses conjuntos é 42. Sabendo que em todas as seções e interseções desses três conjuntos há pelo menos um elemento, e que não há seção e nem mesmo interseção com um mesmo número de elementos, então o maior número possível para o total de elementos de um desses três conjuntos é

A) 132.
B) 120.
C) 110.
D) 124.
E) 118.

2. (VUNESP/TJ-SP/2018) Em um grupo de 100 esportistas que praticam apenas os esportes A, B ou C, sabe-se que apenas 12 deles praticam os três esportes. Em se tratando dos esportistas que praticam somente dois desses esportes, sabe-se que o número dos que praticam os esportes A e B é 2 unidades menor que o número dos que praticam os esportes A e C, e o número dos esportistas que praticam B e C excede em 2 unidades o número de esportistas que praticam os esportes A e C. Sabe-se, ainda, que exatamente 26, 14 e 12 esportistas praticam, respectivamente, apenas os esportes A, B e C. Dessa forma, o número total de esportistas que praticam o esporte A é

A) 56.
B) 54.
C) 62.
D) 58.
E) 60.

3. (VUNESP/TJM-SP/2021) Em um grupo de 109 atletas, 48 são homens. Cada um desses atletas pratica handebol ou natação, mas somente um esporte por atleta. Entre os homens, 22 jogam handebol e, no total, 50 atletas praticam natação. O número de mulheres que jogam handebol é

A) 34.
B) 37.
C) 40.
D) 43.
E) 46.

4. (VUNESP/TJM-SP/2021) Uma palestra teve a participação de 113 professores com licenciatura. Desses professores 46 também são formados em engenharia e 53 também são formados em economia. No total, 21 professores têm apenas licenciatura. O número de professores que também são formados em economia e engenharia é

A) 5.
B) 6.

C) 7.
D) 8.
E) 9.

5. (VUNESP/TJ-SP/2017) Carlos é o único atleta que tem patrocínio de 3 empresas: A, B e C. Em se tratando de atletas que recebem patrocínios de apenas 2 dessas empresas, temos: Leandro e Hamilton, das empresas A e B; Marta e Silas, das empresas A e C; e Amanda, Renata e Sérgio, das empresas B e C. Se esses atletas fazem parte de um grupo contendo, ao todo, 18 atletas que recebem patrocínio das empresas A, B ou C, e cada empresa tem, pelo menos, 1 atleta recebendo patrocínio somente dela, então é correto afirmar que os números mínimo e máximo de atletas que a empresa B pode patrocinar são, respectivamente,
A) 5 e 10.
B) 8 e 16.
C) 7 e 14.
D) 4 e 8.
E) 6 e 12.

6. (VUNESP/TJ-SP/2015) Uma pesquisa com uma amostra de jovens entre 18 e 25 anos de uma comunidade revelou que 70% deles estudam e que 50% deles trabalham. A pesquisa mostrou ainda que 40% desses jovens trabalham e estudam. É correto afirmar que o percentual de jovens entre 18 e 25 anos dessa comunidade que não estudam e não trabalham é de
A) 60%
B) 50%
C) 40%
D) 30%
E) 20%

7. (VUNESP/TJ-SP/2015) Uma avaliação com apenas duas questões foi respondida por um grupo composto por X pessoas. Sabendo-se que exatamente 160 pessoas desse grupo acertaram a primeira questão, que exatamente 100 pessoas acertaram as duas questões, que exatamente 250 pessoas acertaram apenas uma das duas questões, e que exatamente 180 pessoas erraram a segunda questão, é possível afirmar, corretamente, que X é igual a
A) 520.
B) 420.
C) 370.
D) 470.
E) 610.

8. (VUNESP/CODEN/2021) Em um grupo de pessoas há quem fale apenas inglês e francês, há quem fale apenas francês e espanhol e há quem fale apenas espanhol e inglês. Não há quem fale as três línguas. Das 20 pessoas que falam inglês, 8 falam apenas inglês. Das 19 pessoas que falam francês, 6 delas falam apenas francês. São 32 pessoas que falam espanhol. Com essas informações, a diferença entre o número daqueles que não falam francês e o número daqueles que não falam espanhol é
A) 15.
B) 13.

C) 12.
D) 9.
E) 8.

9. (VUNESP/PM-SP/2020) Em um grupo de pessoas, 54 delas disseram já terem visitado a cidade de São Paulo e 71 delas disseram já terem visitado a cidade do Rio de Janeiro. Sabendo que, desse grupo, 17 pessoas já visitaram essas duas cidades e que todos já visitaram ao menos uma dessas duas cidades, o número de pessoas que formam esse grupo é
A) 142.
B) 126.
C) 118.
D) 108.

10. (VUNESP/HC-UFU/2020) Em certo grupo com 29 profissionais formados nas áreas A, B ou C, 4 pessoas têm formação nessas três áreas. Em se tratando de formação em apenas duas dessas áreas, 5 pessoas são formadas em A e B, 7 pessoas, em B e C, e 4 pessoas são formadas nas áreas A e C. Sabendo-se que 15 pessoas são formadas na área A, é correto afirmar que são formados somente na área B ou somente na área C
A) 7 pessoas.
B) 8 pessoas.
C) 9 pessoas.
D) 10 pessoas.
E) 11 pessoas.

11. (VUNESP/UNICAMP/2019) Numa escola de línguas, ensina-se inglês, espanhol e alemão. Sabe-se que o número de alunos que estuda alemão é 65, e que os alunos que estudam as três línguas são em número de 37. O número de alunos que fazem somente os cursos de inglês e espanhol é o dobro do número dos que fazem somente alemão. Há exatamente 3 alunos que estudam somente inglês e alemão, e o número de alunos que fazem apenas uma língua é 41. Não há quem esteja fazendo os cursos de espanhol e alemão e que não esteja fazendo também o curso de inglês. O número total de alunos da escola é
A) 115.
B) 118.
C) 120.
D) 121.
E) 131.

12. (VUNESP/PREF. CAMPINAS/2019) Uma prova de Matemática continha apenas duas questões, uma de álgebra e outra de geometria. Sabe-se que 12 alunos acertaram as duas questões e que 24 alunos acertaram apenas uma das duas questões. Sabendo que 19 alunos acertaram a questão de álgebra e que 15 erraram a de geometria, é correto afirmar que o número de alunos que fizeram essa prova foi
A) 45.
B) 43.
C) 46.
D) 44.
E) 47.

13. (VUNESP/PM-SP/2019) Em um grupo de 40 professores, 5 deles trabalham em escolas particulares e também trabalham em escolas públicas. Sabendo-se que 25 desses professores trabalham em escolas particulares, o número de professores que trabalham em escolas públicas é

A) 17.
B) 18.
C) 19.
D) 20.

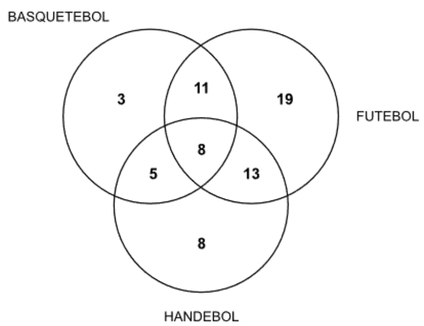
14. (VUNESP/PREF. SJC/2019) Uma escola oferece cursos de futebol, basquete e voleibol. Estão inscritos 23 alunos no futebol, 24 alunos no basquetebol e 41 alunos no voleibol. Nenhum aluno está matriculado em exatamente dois desses cursos e 76 alunos estão matriculados em apenas um curso. O número de alunos matriculados nos três cursos é

A) 7.
B) 6.
C) 5.
D) 4.
E) 3.

15. (VUNESP/PAULIPREV/2018) Uma competição de natação conta com 241 nadadores. Desses nadadores, 84 já competiram em provas de corrida e 58 já competiram em provas de ciclismo. Para 101 desses nadadores é a primeira competição, de qualquer tipo de que participam. O número desses nadadores que já competiram nas três modalidades citadas é

A) 2.
B) 4.
C) 8.
D) 16.
E) 32.

16. (VUNESP/IPSM-SJC/2018) O diagrama mostra a distribuição dos praticantes de futebol, basquetebol e handebol de um clube. As intersecções significam que há praticantes de mais de um desses esportes.



Nessa distribuição, é correto afirmar que o total de praticantes de futebol supera o total de praticantes dos outros dois esportes em um número igual a

A) 3.
B) 4.
C) 5.
D) 6.

E) 8.

17. (VUNESP/PM-SP/2018) Em um grupo de 60 funcionários de certo departamento, há 30 com formação em engenharia, 27 com formação em economia e 18 com formação em engenharia e economia. O número de pessoas desse grupo que não tem formação em engenharia nem em economia é
A) 21.
B) 19.
C) 18.
D) 15.

18. (VUNESP/TCE-SP/2017) Considerando os conjuntos A, B e C e suas intersecções, não existem elementos na intersecção dos 3 conjuntos. O número de elementos dos conjuntos A, B e C são respectivamente 35, 32 e 33. O total de elementos que pertencem a apenas um desses conjuntos é igual a 46. O número total de elementos desses 3 conjuntos é
A) 59.
B) 64.
C) 87.
D) 73.
E) 54.

19. (VUNESP/CM ITANHAÉM/2017) Em uma empresa, do total de funcionários, 40% praticam esportes, e 90% estudam inglês, sendo 340 a diferença entre o número de funcionários que fazem essas duas atividades. Nessa empresa, o número de funcionários que exercem as duas atividades é, no mínimo, igual a
A) 102.
B) 136.
C) 204.
D) 272.
E) 340.

20. (VUNESP/TJM-SP/2017) Em uma reunião composta somente por arquitetos e engenheiros, o número daqueles que são apenas arquitetos supera, em 31 unidades, o número daqueles que são apenas engenheiros. O número daqueles que são arquitetos e engenheiros supera, em 63 unidades, o número daqueles que são apenas arquitetos. Ao todo, estão presentes nessa reunião 476 pessoas. Dentre esses, o número daqueles que exercem apenas uma dessas profissões é igual a
A) 351.
B) 312.
C) 265.
D) 232.
E) 197.

21. (VUNESP/MPE-SP/2016) Um curso de idiomas tem 59 alunos inscritos no curso de alemão, 63 inscritos no curso de italiano e 214 no curso de inglês. Desses alunos, 23 cursam as três línguas, e 43 alunos estudam apenas um dos idiomas. O número de alunos que estão cursando exatamente dois idiomas dentre esses três é igual a
A) 100.
B) 103.

C) 112.
D) 106.
E) 109.

22. (VUNESP/PREF. SJC/2015) Uma pesquisa feita em uma empresa com 400 funcionários indicou que 250 são fluentes na língua inglesa, 200 na língua espanhola e 190 na língua alemã. Todos os funcionários que falam espanhol também falam uma das outras duas línguas mencionadas e nenhum funcionário é fluente nessas três línguas. São fluentes em inglês e alemão 100 pessoas e 40 funcionários falam apenas em inglês. Nessa empresa, o número de funcionários que não domina nenhuma das três línguas pesquisadas é
A) 20.
B) 30.
C) 40.
D) 50.
E) 60.

23. (VUNESP/PC-SP/2014) Um cursinho oferece aulas de reforço em matemática, física e química. Dos alunos que se inscreveram para esse reforço, 33 optaram por apenas uma disciplina e 15 escolheram as três. O respectivo total de matrículas por disciplina foi 39, 55 e 72, o que permite concluir, corretamente, que o número de alunos matriculados em exatamente duas disciplinas é igual a
A) 55.
B) 44.
C) 22.
D) 33.
E) 11.

24. (VUNESP/PC-SP/2014) Três conjuntos, A, B e C, têm um total de 40 elementos. Sabe-se que 7 elementos pertencem apenas ao conjunto A, 10 elementos, apenas ao conjunto B, 13 elementos, apenas ao conjunto C, e pelo menos um elemento pertence simultaneamente aos três conjuntos. Os demais elementos podem pertencer ou a dois desses conjuntos ou aos três conjuntos. Desse modo, a maior diferença possível da quantidade total de elementos de certo conjunto em relação à quantidade total de elementos de outro conjunto é
A) 4.
B) 17.
C) 6.
D) 15.
E) 27.

25. (VUNESP/TJ-MT/2008) Em uma pesquisa de opinião feita com os frequentadores de um centro médico, constatou-se que 60% dos entrevistados faziam tratamento alopático, 35% faziam tratamento homeopático, e 15% utilizavam ambos simultaneamente. Pode-se concluir, então, que a porcentagem que indica os entrevistados que não utilizam nenhum desses tratamentos é
A) 40%
B) 35%
C) 30%
D) 25%
E) 20%

GABARITO

1. LETRA B
2. LETRA E
3. LETRA B
4. LETRA B
5. LETRA C
6. LETRA E
7. LETRA D
8. LETRA B
9. LETRA D
10. LETRA A
11. LETRA E
12. LETRA D
13. LETRA D
14. LETRA D
15. LETRA A
16. LETRA A
17. LETRA A
18. LETRA D
19. LETRA C
20. LETRA C
21. LETRA C
22. LETRA E
23. LETRA A
24. LETRA D
25. LETRA E

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.