Aula 00

TCE-ES - Matemática Financeira

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

30 de Setembro de 2024

Índice

AVISO IMPORTANTE!

Olá, Alunos (as)!

Passando para informá-los a respeito da **disposição das questões** dentro do nosso material didático. Informamos que a escolha das bancas, dentro dos nossos Livros Digitais, é feita de maneira estratégica e pedagógica pelos nossos professores a fim de proporcionar a melhor didática e o melhor direcionamento daquilo que mais se aproxima do formato de cobrança da banca do seu concurso.

Assim, o formato de questões divididas por tópico facilitará o seu processo de estudo, deixando mais alinhado às disposições constantes no edital.

No mais, continuaremos à disposição de todos no Fórum de dúvidas!

Atenciosamente,

Equipe Exatas

Estratégia Concursos

Apresentação do Curso

Olá, pessoal! Tudo bem?

É com grande satisfação que damos início ao nosso curso!

Os professores **Eduardo Mocellin, Francisco Rebouças, Luana Brandão, Djefferson Maranhão** e **Vinicius Veleda** ficarão responsáveis pelo **Livro Digital**.

Antes de continuarmos, vamos apresentar os professores do material escrito:

Eduardo Mocellin: Fala, pessoal! Meu nome é Eduardo Mocellin, sou professor de Matemática e de Raciocínio Lógico do Estratégia Concursos e engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Sinto-me feliz em poder contribuir com a sua aprovação! Não deixe de me seguir no Instagram: **@edu.mocellin**

Francisco Rebouças: Fala, alunos! Aqui é o Francisco Rebouças, professor de Matemática do Estratégia Concursos. Sou Engenheiro Aeroespacial formado pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Saiba que será uma honra fazer parte da sua jornada rumo à aprovação e que estaremos sempre aqui para auxiliá-los com o que precisarem. Um grande abraço e nos vemos nas aulas!

Luana Brandão: Oi, pessoal! O meu nome é Luana Brandão e sou professora de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduada, Mestre e Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense. Passei nos concursos de Auditor Fiscal (2009/2010) e Analista Tributário (2009) da Receita Federal e de Auditor Fiscal do Estado do Rio de Janeiro (2010). Sou Auditora Fiscal do Estado do RJ desde 2010. Vamos juntos nesse caminho até a aprovação? **@professoraluanabrandao**

Djefferson Maranhão: Olá, amigos do Estratégia Concursos, tudo bem? Meu nome é Djefferson Maranhão, professor de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduado em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Desde 2015, sou Auditor da Controladoria Geral do Estado do Maranhão (2015 - 5º lugar). Antes, porém, exerci os cargos de Analista de Sistemas na UFMA (2010 - 1º lugar) e no TJ-MA (2011 - 1º lugar). Já estive na posição de vocês e sei o quanto a vida de um concurseiro é um tanto atribulada! São vários assuntos para se dominar em um curto espaço de tempo. Por isso, contem comigo para auxiliá-los nessa jornada rumo à aprovação. Um grande abraço.

Vinicius Veleda: Olá, caros alunos! Sou Auditor Fiscal do Estado do Rio Grande do Sul. Professor de Matemática e Matemática Financeira do Estratégia Concursos. Aprovado nos Concursos de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda dos Estados do Rio Grande do Sul (SEFAZ RS - 2019), Santa Catarina (SEFAZ SC - 2018) e Goiás (SEFAZ GO - 2018). Formado em Engenharia de Petróleo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com graduação sanduíche em Engenharia Geológica pela Universidade Politécnica de Madrid (UPM). Pela UFRJ, fui campeão sul americano do Petrobowl (Buenos Aires) e, posteriormente, Campeão Mundial (Dubai). Cursei meu ensino médio na Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx). Contem comigo nessa trajetória! **@viniciusveleda**

O material escrito em **PDF** está sendo construído para ser sua fonte **autossuficiente** de estudos. Isso significa que o livro digital será **completo** e **voltado para o seu edital**, justamente para que você não perca o seu precioso tempo "caçando por aí" o conteúdo que será cobrado na sua prova. Ademais, sempre que necessário, você poderá fazer perguntas sobre as aulas no **fórum de dúvidas**. **Bons estudos!**

FRAÇÕES

Frações

Revisão sobre Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Múltiplos de um número

Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito por B** × **k**, sendo **k** um número inteiro.

Exemplo: os números da forma **A** = **7**×**k** são múltiplos **de 7** (sendo **k** inteiro).

Números primos

Números primos são números naturais maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais: o número 1 e o próprio número primo.

• Os 15 primeiros números primos são: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.**

Decomposição em fatores primos

Para decompor um número em fatores primos, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

Existe uma **forma não metodológica** de se obter a decomposição em fatores primos. Essa forma **costuma ser mais rápida** especialmente para números mais simples

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

• Decompor todos os números em fatores primos;

• Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Existe um método prático para determinar o MMC entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**.

Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado.

• Quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que a **é múltiplo** de b, podemos eliminar b do cálculo do MMC.

• Se tivermos **N** números e um deles é **múltiplo de todos os outros**, esse número é o **MMC**.

Introdução às frações

$$\frac{a}{b} \quad \begin{matrix} \longrightarrow \text{Numerador} \\ \longrightarrow \text{Denominador} \end{matrix}$$

Considere uma fração com um numerador inteiro $\boldsymbol{a}$ e com um denominador inteiro $\boldsymbol{b}$, representada por $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$. Dizemos que a fração é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **não apresentam fatores primos em comum**. Em outras palavras, uma fração $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**.

Para **somar e subtrair** frações, devemos transformar todas as frações em **frações equivalentes com o mesmo denominador**.

Para realizar a **multiplicação de frações**, realiza-se a multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores.

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação.

Para **comparar frações**, devemos encontrar frações equivalentes que apresentem o mesmo denominador.

Problemas envolvendo frações

A palavra "**de**" costuma significar uma **multiplicação**.
Uma forma prática de se **obter o todo a partir da parte** do problema é utilizar o recurso "**inverte e multiplica**".
Dada uma fração $\boldsymbol{a/b}$, a **fração complementar** corresponde a $\mathbf{1} - \boldsymbol{a/b}$.

Quando nos deparamos com problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolvê-los consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**.

Dízima periódica

O **período** é a porção que se repete em uma dízima periódica.

- Um número da forma $\mathbf{0,AAA} \ldots = \mathbf{0,\overline{A}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{A}}{9}$;
- Um número da forma $\mathbf{0,ABABAB} \ldots = \mathbf{0,\overline{AB}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{AB}}{99}$;
- Um número da forma $\mathbf{0,ABCABCABC} \ldots = \mathbf{0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{ABC}}{999}$;
- E assim sucessivamente.

Para dízimas periódicas que fogem desse padrão, devemos modificá-las de modo a deixá-las no formato que conhecemos.

Revisão sobre Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Pessoal, antes de iniciarmos o conteúdo de frações propriamente dito, vamos fazer uma breve **revisão sobre múltiplos**, **números primos**, **decomposição em fatores primos** e **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**). É muito importante que você tenha conhecimento sobre esses assuntos, pois eles serão necessários para que façamos operações com frações.

Caso você já saiba calcular o MMC entre quaisquer números, **fique à vontade para pular esse tópico**.

Múltiplos de um número

Considere o número 7. Os **múltiplos do número 7** são:

$$\mathbf{7} \times 0 = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{7} \times 1 = \mathbf{7}$$
$$\mathbf{7} \times 2 = \mathbf{14}$$
$$\mathbf{7} \times 3 = \mathbf{21}$$
$$\ldots$$

Perceba que um número qualquer apresenta infinitos múltiplos. O número 462, por exemplo, é múltiplo de 7, pois:

$$\mathbf{7} \times 66 = 462$$

Note que todos os números da forma **A** = **7** **×** **k** são múltiplos **de 7** (sendo **k** um número inteiro).

Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito pelo produto B** **×** **k**, sendo **k** um número inteiro.

Tudo certo quanto ao conceito de múltiplos? Ok, agora vamos falar de números primos.

Números primos

Os números primos são números **naturais** maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais:

- O número 1; e
- O próprio número primo.

Isso significa que, se um número natural X é primo, apenas o número 1 e o próprio número X podem dividir X deixando resto zero.

Existem infinitos números primos. É importante que você **DECORE** os 15 primeiros.

Os 15 primeiros números primos são: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47**

Decomposição em fatores primos

Decompor um número qualquer em fatores primos significa **escrevê-lo como um produto de números primos**. Por exemplo, a decomposição em fatores primos do número 60 é:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Para decompor um número em fatores primos, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

Vejamos alguns exemplos:

Decomponha o número 500 em fatores primos

- Ao dividir 500 por 2, obtemos 250.

- Ao dividir 250 por 2, obtemos 125.

- Note que 125 não é mais divisível por 2 (não é par). **Passemos ao 3**.

- Note que 125 não é divisível por 3 (1+2+5 não é divisível por 3). **Passemos ao 5**.

- Ao dividir 125 por 5, obtemos 25.

- Ao dividir 25 por 5, obtemos 5.

- Ao dividir 5 por 5, **obtemos 1**. **Nesse momento, devemos parar as divisões sucessivas.**

$$\begin{array}{r|l} 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 500 em fatores primos é:

$$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$500 = 2^2 \times 5^3$$

Decomponha o número 282 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 282 & 2 \\ 141 & 3 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 282 em fatores primos é:

$$282 = 2 \times 3 \times 47$$

Decomponha o número 3960 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 3960 em fatores primos é:

$$3960 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$$

$$3960 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

Existe uma **forma não metodológica** de se obter a decomposição em fatores primos. Essa forma **costuma ser mais rápida** especialmente para números mais simples. Por exemplo, vamos decompor o número 500. Acompanhe o raciocínio:

$$500 = 5 \times 100$$

$$= 5 \times 10 \times 10$$

$$= 5 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$$

$$= 2^2 \times 5^3$$

Note que usamos o fato de 500 ser facilmente descrito por 5×100 para decompormos o número de uma forma não metodológica.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

O **Mínimo** **Múltiplo** **Comum** (**MMC**) entre **N** números é o **menor** dos **múltiplos** que é comum a todos os números.

Representaremos o **MMC** entre os números $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ por $\text{MMC}\ (\text{a}; \text{b}; \text{c})$.

Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

- Decompor todos os números em fatores primos; e
- Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Vamos a alguns exemplos:

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50.

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

$$5 = 5^1$$

$$10 = 2^1 \times 5^1$$

$$15 = 3^1 \times 5^1$$

$$20 = 2 \times 10$$
$$= 2^2 \times 5^1$$

$$50 = 5 \times 10$$
$$= 2^1 \times 5^2$$

Devemos selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$5 = \quad 5^1$

$10 = 2^1 \times \quad 5^1$

$15 = \quad 3^1 \times 5^1$

$20 = 2^2 \quad \times 5^1$

$50 = 2^1 \quad \times 5^2$

Logo, $\text{MMC}\ (5; 10; 15; 20; 50) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$.

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50

Vamos decompor os 3 números em fatores primos, selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$21 = \quad 3 \quad \times 7$

$45 = \quad 3^2 \times 5$

$50 = 2 \quad \times 5^2$

Logo, $\text{MMC}\ (21; 45; 50) = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 3150$.

Existe um método prático para determinar o MMC entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**.

Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado.

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

- Ao dividir os números **5**, **10**, **15**, **20** e **50** **por 2**, obtemos **5**, **5**, **15**, **10** e **25**.
- Ao dividir os números **5**, **5**, **15**, **10** e **25** **por 2**, obtemos **5**, **5**, **15**, **5** e **25**.
- Note que nenhum dos números dentre **5**, **5**, **15**, **5** e **25** é divisível por 2. **Passemos ao 3**.
- Ao dividir os números **5**, **5**, **15**, **5** e **25** **por 3**, obtemos **5**, **5**, **5**, **5** e **25**.
- Note que nenhum dos números dentre **5**, **5**, **5**, **5** e **25** é divisível por 3. **Passemos ao 5**.
- Ao dividir os números **5**, **5**, **5**, **5** e **25** **por 5**, obtemos **1**, **1**, **1**, **1** e **5**.
- Ao dividir os números **1**, **1**, **1**, **1** e **5** **por 5**, obtemos **1**, **1**, **1**, **1** e **1**. **Nesse momento, devemos parar a divisão simultânea.**

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5, & 10, & 15, & 20, & 50 & 2 \\
5, & 5, & 15, & 10, & 25 & 2 \\
5, & 5, & 15, & 5, & 25 & 3 \\
5, & 5, & 5, & 5, & 25 & 5 \\
1, & 1, & 1, & 1, & 5 & 5 \\
1, & 1, & 1, & 1, & 1 &
\end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) é o seguinte produto:

$$\text{MMC }(5; 10; 15; 20; 50) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$
$$= 2^2 \times 3 \times 5^2$$
$$= 300$$

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{rrr|l}
21, & 45, & 50 & 2 \\
21, & 45, & 25 & 3 \\
7, & 15, & 25 & 3 \\
7, & 5, & 25 & 5 \\
7, & 1, & 5 & 5 \\
7, & 1, & 1 & 7 \\
1, & 1, & 1 &
\end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) é o seguinte produto:

$$\text{MMC }(21; 45; 50) = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$$
$$= 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$
$$= 3150$$

Uma dica importante que pode economizar um certo tempo em prova é a seguinte: quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que $\boldsymbol{a}$ **é múltiplo** de $\boldsymbol{b}$, podemos eliminar $\boldsymbol{b}$ do cálculo do MMC.

Vejamos dois exemplos:

Calcule o MMC de 40, 30 e 15

Ao calcular o $\text{MMC}(40; 30; 15)$, perceba que **30** é **múltiplo de 15.** Logo:

$$\text{MMC}(40; \mathbf{30}; \mathbf{15}) = \text{MMC}\ (40; \mathbf{30})$$

Calcular o MMC de 40 e 30 é mais rápido, não é mesmo?

Calcule o MMC de 390, 130 e 75

Ao calcular o $\text{MMC}(390; 130; 75)$, perceba que **390** é **múltiplo de 130**. Logo:

$$\text{MMC}(\mathbf{390}; \mathbf{130}; 75) = \text{MMC}\ (\mathbf{390}; 75)$$

Calcular o MMC de 390 e 75 é mais rápido, não é mesmo?

Perceba que se tivermos **N** números e **um deles é múltiplo de todos os outros**, **esse número é o MMC**.

Calcule o MMC de 3, 6 e 12

Note que 12 é múltiplo de 3 e de 6. Logo:

$$\text{MMC}\ (3; 6; 12) = 12$$

Calcule o MMC de 120, 60 e 15

Note que 120 é múltiplo de 60 e de 15. Logo:

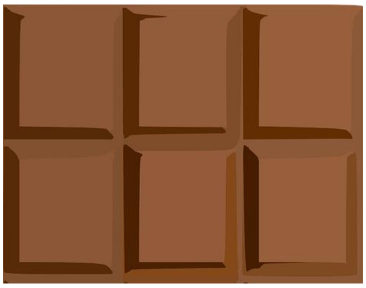
$$\text{MMC}\ (120; 60; 15) = 120$$

Feito! Agora que sabemos calcular o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre quaisquer números, vamos ao conteúdo sobre frações.

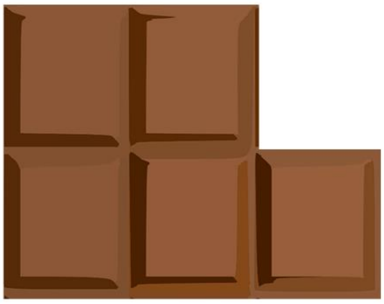
Introdução às frações

Conceitos preliminares

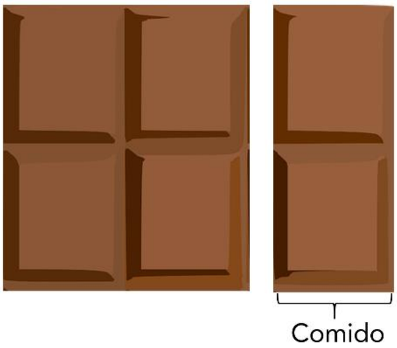
A assimilação plena do conceito de frações é fundamental para se entender diversos outros assuntos de matemática. Para ilustrar a ideia, considere a barra de chocolate a seguir com 6 pedaços.



Comer 5/6 (cinco sextos) da barra de chocolate significa comer 5 dos 6 pedaços. Para o caso em questão, 5/6 representa a seguinte parte que foi comida:

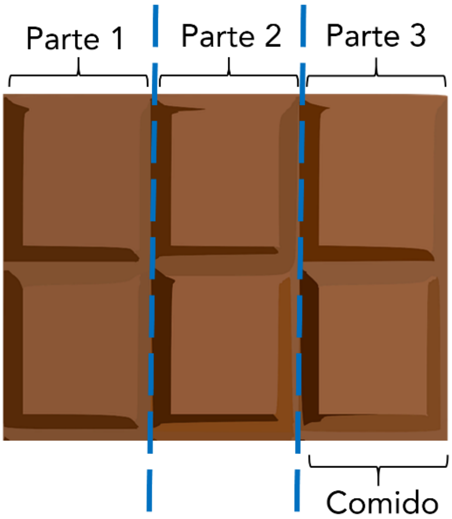


Comer 2/6 (dois sextos) da barra de chocolate significa comer 2 dos 6 pedaços:



E se disséssemos que comemos 1/3 (um terço) da barra de 6 pedaços, o que isso significa? Significa que, a cada três pedaços existentes na barra, comemos um pedaço. Como a nossa barra tem 6 pedaços, 1/3 da nossa barra corresponde a 2 pedaços.

Uma outra forma de se pensar que foi comido 1/3 da barra é dividir a barra em três e comer um desses três pedaços.



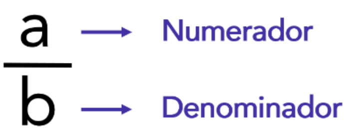
Note, portanto, que dizer que se comeu 2/6 da barra é a mesma coisa do que dizer que se comeu 1/3 da barra. Isso porque **as duas frações são equivalentes**:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Composição básica de uma fração

Uma fração é um número racional que representa uma divisão composta por dois termos:

- O numerador, que representa o dividendo; e
- O denominador, que representa o divisor.



Frações equivalentes e frações irredutíveis

Considere uma fração com um numerador inteiro $\boldsymbol{a}$ e com um denominador inteiro $\boldsymbol{b}$, representada por $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$.

Dizemos que a fração é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **não apresentam fatores primos em comum**.

Em outras palavras, uma fração $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**.

ACORDE!

Uma fração $\frac{a}{b}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**.

Dois números são **primos entre si** quando **não apresentam fatores primos em comum**.

Exemplos:

- $\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{15}}$ é uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ **não apresentam fatores primos em comum** ($\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ **são primos entre si**). Veja que:
    - $\mathbf{14}$ pode ser decomposto como 2×7;
    - $\mathbf{15}$ pode ser decomposto como 3×5;
    - $\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ **não apresentam fatores primos em comum**, pois $\mathbf{14}$ apresenta os fatores primos 2 e 7, já $\mathbf{15}$ apresenta os fatores primos 3 e 5.

- $\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{84}}$ **não é** uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{14}$ e $\mathbf{84}$ apresentam fatores primos em comum ($\mathbf{14}$ e $\mathbf{84}$ não são primos entre si). Veja que:
    - $\mathbf{14}$ pode ser decomposto como $\mathbf{2} \times \mathbf{7}$;
    - $\mathbf{84}$ pode ser decomposto como $\mathbf{2}^2 \times 3 \times \mathbf{7}$;
    - $\mathbf{14}$ e $\mathbf{84}$ apresentam fatores primos em comum: $\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$.

- $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}$ é uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$ **não apresentam fatores primos em comum** ($\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$ **são primos entre si**). Veja que:
    - $\mathbf{2}$ já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número 2;
    - $\mathbf{7}$ já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número 7;
    - $\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$ **não apresentam fatores primos em comum**.

- $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}}$ **não é** uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{3}$ e $\mathbf{6}$ apresentam fatores primos em comum. ($\mathbf{3}$ e $\mathbf{6}$ não são primos entre si). Veja que:
    - $\mathbf{3}$ já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número $\mathbf{3}$;
    - $\mathbf{6}$ pode ser decomposto como $2 \times \mathbf{3}$;
    - $\mathbf{3}$ e $\mathbf{6}$ apresentam um fator primo em comum: $\mathbf{3}$.

Creio que, com esses exemplos, você já entendeu o que é uma fração irredutível e o que são números primos entre si.

Para simplificar uma fração e torná-la irredutível, podemos dividir o numerador e o denominador por um mesmo número inteiro sucessivas vezes até que a divisão não seja mais possível. Exemplo:

$$\frac{84}{120}\overset{\div 2}{\underset{\div 2}{=}}\frac{42}{60}\overset{\div 2}{\underset{\div 2}{=}}\frac{21}{30}\overset{\div 3}{\underset{\div 3}{=}}\frac{7}{10}$$

Veja que, ao obter a fração $\frac{7}{10}$, **não é mais possível dividir o numerador e o denominador por um mesmo número inteiro**. Isso ocorre porque $\mathbf{7}$ e $\mathbf{10}$ **não apresentam fatores primos em comum**. Em outras palavras, $\mathbf{7}$ e $\mathbf{10}$ **são primos entre si**.

Uma outra forma de tornar uma fração irredutível é decompor o numerador e o denominador em fatores primos e "simplificar" os fatores comuns. Exemplo:

$$\frac{84}{120} = \frac{\cancel{2}^{2}.\cancel{3}.7}{\underset{2^{1}}{\cancel{2}^{3}}.\cancel{3}.5} = \frac{7}{2.5} = \frac{7}{10}$$

Veja que não necessariamente precisamos decompor em fatores primos para simplificar a fração. Podemos também transformar o numerador em produtos "convenientes" para assim realizar a simplificação.

$$\frac{84}{120} = \frac{\cancel{12}.7}{\cancel{12}.10} = \frac{7}{10}$$

Duas **frações são ditas equivalentes quando representam o mesmo número**, ou seja, quando são iguais. No exemplo anterior, $\frac{84}{120}$, $\frac{42}{60}$, $\frac{21}{30}$ e $\frac{7}{10}$ são equivalentes, pois:

$$\frac{84}{120} = \frac{42}{60} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

(Pref. Sto. Augusto/2020) Ao simplificar a fração $\frac{12}{36}$ obtém-se:

a) 1/6

b) 1/3

c) 1/2

d) 1/4

e) 1/5

Comentários:

Podemos representar o denominador da fração como 3×12

$$\frac{12}{36} = \frac{\mathbf{12}}{3 \times \mathbf{12}}$$

Simplificando o número **12**, obtém-se:

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Gabarito: Letra B.

Soma e subtração de frações

Para somar e subtrair frações, devemos transformar todas as frações em **frações equivalentes** de modo que todas elas apresentem **o mesmo denominador**.

Para que todas as frações tenham o mesmo denominador, devemos obter o **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) **de todos os denominadores**. Exemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{10}$$

O Mínimo Múltiplo Comum dos denominadores é $\text{MMC}\ (3;\ 5;10)\ =\ 30$. Logo, os denominadores das três frações devem ser 30. Para acharmos os numeradores, devemos determinar as frações equivalentes cujo denominador é 30.

$$\frac{2}{3}=\frac{(30\div 3)\times 2}{30}=\frac{10\times 2}{30}=\frac{20}{30}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{(30\div 5)\times 1}{30}=\frac{6\times 1}{30}=\frac{6}{30}$$

$$\frac{7}{10}=\frac{(30\div 10)\times 7}{30}=\frac{3\times 7}{30}=\frac{21}{30}$$

ESCLARECENDO!

Uma forma prática de obter essas frações equivalentes de denominador 30 é realizar o seguinte procedimento:

$$\frac{2}{3}=\frac{?}{30}\qquad 30\div 3=10\qquad 10\times 2=20\qquad =20$$

$$\frac{1}{5}=\frac{?}{30}\qquad 30\div 5=6\qquad 6\times 1=6\qquad =6$$

$$\frac{7}{10}=\frac{?}{30}\qquad 30\div 10=3\qquad 3\times 7=21\qquad =21$$

Voltando ao problema, temos:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{10}$$

$$=\frac{20}{30}+\frac{6}{30}+\frac{21}{30}$$

$$=\frac{20+6+21}{30}$$

$$= \frac{47}{30}$$

Para realizar uma subtração de frações, devemos realizar o mesmo procedimento. Suponha que devemos realizar a seguinte subtração:

$$\frac{44}{60} - \frac{20}{30}$$

O Mínimo Múltiplo Comum dos denominadores é $\text{MMC}\ (30;\ 60) =\ 60$. Ficamos com as seguintes frações equivalentes com denominador 60:

$$\frac{44}{60} - \frac{40}{60}$$

$$= \frac{44 - 40}{60}$$

$$= \frac{4}{60}$$

No caso em questão, **podemos tornar a fração 4/60 irredutível**. Se dividirmos o numerador e o denominador por 4 (ou seja, se dividirmos duas vezes por 2), obtemos:

$$\frac{1}{15}$$

(PC RJ/2022) Considere a soma

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10} = \frac{a}{b}$$

sendo os números naturais a e b primos entre si.

O valor da soma $a + b$ é:

a) 35;

b) 47;

c) 181;

d) 227;

e) 269.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma das frações do lado esquerdo da equação.

Para realizar a soma, devemos representar as frações por meio de **frações equivalentes** com um **mesmo denominador**. O **menor denominador comum possível** para realizar a soma é o **MMC entre 6**, **8** e **10**. Decompondo esses números em fatores primos, temos:

$$6 = 2 \times 3$$

$$8 = 2^3$$

$$10 = 2 \times 5$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$6 = 2 \times 3$

$8 = 2^3$

$10 = 2 \quad \times 5$

Logo, $\mathrm{MMC}(6; 8; 10) = 2^3 \times 3 \times 5 = \mathbf{120}$.

Portanto:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10}$$

$$= \frac{(120 \div 6) \times 1}{\mathbf{120}} + \frac{(120 \div 8) \times 3}{\mathbf{120}} + \frac{(120 \div 10) \times 7}{\mathbf{120}}$$

$$= \frac{20}{\mathbf{120}} + \frac{45}{\mathbf{120}} + \frac{84}{\mathbf{120}}$$

$$= \frac{20 + 45 + 84}{\mathbf{120}}$$

$$= \frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$$

Segundo o enunciado, temos que a soma das frações, dada por $\frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$, **é igual a** $\frac{a}{b}$, sendo $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **números naturais primos entre si**. Consequentemente:

- $\frac{a}{b}$ é uma **fração equivalente** a $\frac{149}{120}$, pois $\frac{149}{120} = \frac{a}{b}$.
- $\frac{a}{b}$ é uma **fração irredutível**, pois a e b são números naturais primos entre si.

Devemos, portanto, obter a fração irredutível equivalente a $\frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$.

Veja que:

$$120 = 10 \times 12$$

$$= (2 \times 5) \times (3 \times 4)$$

$$= (2 \times 5) \times (3 \times 2^2)$$

$$= 2^3 \times 3 \times 5$$

Logo, **o número $\mathbf{120}$ apresenta os fatores primos $\mathbf{2, 3}$ e $\mathbf{5}$**.

Ao tentar dividir 149 por 2, 3 e 5, percebe-se que sempre temos um resto. Isso significa que $\mathbf{120}$ e $\mathbf{149}$ **não apresentam fatores primos em comum**.

Assim, $\mathbf{120}$ e $\mathbf{149}$ **são primos entre si**.

Consequentemente, a fração irredutível $\frac{a}{b}$ é a própria fração $\frac{149}{120}$. Logo:

$$a = 149$$

$$b = 120$$

Portanto:

$$a + b = 149 + 120$$

$$= 269$$

Gabarito: Letra E.

(MANAUSPREV/2015) Considere as expressões numéricas, abaixo.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

O valor, aproximado, da soma entre A e B é

a) 2.

b) 3.

c) 1.

d) 2,5.

e) 1,5.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma para A.

Note que os denominadores 2, 4, 8, 16 e 32 são potências de 2. Como **32 é múltiplo de todos os outros números**, o **MMC entre os números é 32**.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{16}{\mathbf{32}} + \frac{8}{\mathbf{32}} + \frac{4}{\mathbf{32}} + \frac{2}{\mathbf{32}} + \frac{1}{\mathbf{32}}$$

$$= \frac{16 + 8 + 4 + 2 + 1}{\mathbf{32}}$$

$$= \frac{31}{32}$$

Vamos agora realizar a soma para B.

Perceba que os denominadores 3, 9, 27, 81 e 243 são potências de 3. Como **243 é múltiplo de todos os outros números**, o **MMC entre os números é 243**.

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243} \\ &= \frac{81}{\mathbf{243}}+\frac{27}{\mathbf{243}}+\frac{9}{\mathbf{243}}+\frac{3}{\mathbf{243}}+\frac{1}{\mathbf{243}} \\ &= \frac{81+27+9+3+1}{\mathbf{243}} \\ &= \frac{121}{243} \end{aligned}$$

A soma entre A e B é:

$$A+B=\frac{31}{32}+\frac{121}{243}$$

Note que $\frac{31}{32}$ é aproximadamente $\frac{32}{32}$. Logo:

$$\frac{31}{32} \approx \frac{32}{32} = 1$$

Além disso, $\frac{121}{243}$ é aproximadamente $\frac{121}{242}$. Logo:

$$\frac{121}{243} \approx \frac{121}{242} = 0{,}5$$

Portanto, a soma de A e B é, aproximadamente:

$$\begin{aligned} A+B &\approx 1+0{,}5 \\ &= 1{,}5 \end{aligned}$$

Gabarito: Letra E.

Multiplicação e divisão de frações

Para realizar a **multiplicação de frações**, realiza-se a multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores, obtendo-se a fração resultante:

$$\frac{3}{4}\times\frac{20}{9}=\frac{3\times 20}{4\times 9}=\frac{60}{36}$$

Veja que, no exemplo em questão, a fração obtida não é irredutível. Uma forma mais rápida de se obter a fração irredutível é simplificar a expressão antes mesmo de realizar a multiplicação.

No exemplo a seguir:

- Os números **20** e **4** são simplificados pelo número 4, obtendo-se, respectivamente, **5** e **1**;
- Os números **3** e **9** são simplificados pelo número 3, obtendo-se, respectivamente, **1** e **3**.

$$\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{1}} \times \frac{\cancel{20}^{5}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{5}{3}$$

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$\frac{3}{4} \div \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}} = \frac{3}{4} \times \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{5}{3}$$

$$= \frac{5}{3}$$

Veja este outro exemplo:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}}} = \frac{3}{2} \times \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}$$

Simplificando 3 e 9 por 3, temos:

$$\frac{1}{2} \times \frac{20}{3}$$

Simplificando 2 e 20 por 2, temos:

$$\frac{1}{1} \times \frac{10}{3}$$

$$= \frac{10}{3}$$

(TRF 4/2014) O número que corresponde ao resultado da expressão numérica

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{4}$$

é igual a

a) 5/9.

b) 13/36.

c) 3.

d) 1.

e)7/18.

Comentários:

Temos a seguinte expressão numérica:

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{9}\times\frac{9}{4}$$

Veja que:

- No primeiro produto, $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$, podemos simplificar 2 e 4 pelo número 2, obtendo-se $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$;
- No segundo produto, $\frac{5}{6}\times\frac{7}{10}$, podemos simplificar 5 e 10 pelo número 5, obtendo-se $\frac{1}{6}\times\frac{7}{2}$; e
- No terceiro produto, $\frac{1}{9}\times\frac{9}{4}$, podemos simplificar 9 e 9 pelo número 9, obtendo-se $\frac{1}{1}\times\frac{1}{4}$.

Ficamos com:

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{7}{2}+\frac{1}{1}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{7}{12}+\frac{1}{4}$$

O **MMC** entre os denominadores **4**, **6** e **12** é **12**. Logo:

$$\frac{2}{\mathbf{12}}+\frac{7}{\mathbf{12}}+\frac{3}{\mathbf{12}}$$

$$=\frac{2+7+3}{\mathbf{12}}$$

$$=\frac{12}{12}$$

$$=1$$

Gabarito: Letra D.

A questão a seguir é relativamente complicada. Logo, não se assuste caso não consiga resolver. Inseri essa questão aqui para, aos poucos, perdermos o medo de frações.

(ALERN/2013) Sendo x e y números racionais positivos, definiremos a operação denotada por ☐ da seguinte forma:

$$x\square y=\frac{x}{x+\frac{x}{y}}$$

Por exemplo, fazendo os cálculos verifica-se que 5☐1/2, em fração irredutível, é igual a 1/3. De acordo com essa operação que acaba de ser definida, para qualquer número racional positivo representado por x temos que x ☐1/3 será igual a a)2/3.

b)1/2.

c)1/5.

d)1/4.

e)2/5.

Comentários:

Segundo o enunciado, a operação $x\square y$ é dada por:

$$x\square y = \frac{x}{\boldsymbol{x+\frac{x}{y}}}$$

O denominador $\boldsymbol{x+\frac{x}{y}}$ pode ser entendido como $\boldsymbol{\frac{x}{1}+\frac{x}{y}}$.

Realizando o **MMC** entre $\mathbf{1}$ e $\boldsymbol{y}$, obtém-se y. Ao realizar a soma das frações, ficamos com $\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}$. Logo:

$$x\square y = \frac{x}{\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}}$$

Veja que $x\square y$ é uma fração cujo numerador é x e o denominador é uma outra fração, dada por $\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}$. Temos, portanto, a divisão de x por $\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}$. Para realizar a divisão, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$x\square y = x \times \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x.y+x}}$$

Note que, em $\boldsymbol{x.y+x}$, podemos colocar o x em evidência. Ficamos com $\boldsymbol{x\times(y+1)}$. Logo:

$$x\square y = x \times \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x\times(y+1)}}$$

A partir do resultado obtido, podemos simplificar x. Ficamos com:

$$x\square y = \frac{y}{y+1}$$

Logo, a operação $x\square y$ independe de x e equivale a $\frac{y}{y+1}$.

Para o caso em questão, $x \square 1/3$ é dado por:

$$x \square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}$$

$$x \square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+3}{3}}$$

$$x \square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}$$

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$x \square 1/3 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$x \square 1/3 = \frac{1}{4}$$

Gabarito: Letra D.

Comparação de frações

Para compararmos frações, ou seja, para descobrir se uma fração é maior ou menor do que outra, devemos escrevê-las sob um mesmo denominador. Isso significa que, para todas as frações que serão objeto de comparação, devemos encontrar **frações equivalentes** **que apresentem o mesmo denominador**.

Outra forma válida de comparar frações é realizar a divisão do numerador pelo denominador, comparando-se os números decimais encontrados. Veja o exemplo a seguir:

(Pref. Salvador/2017) Considere as frações: $a = \frac{2}{5}, b = \frac{3}{10}, c = \frac{7}{20}$.

A ordem crescente dessas frações é

a) a, b, c.

b) b, a, c.

c) c, a, b.

d) b, c, a.

e) c, b, a.

Comentários:

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) entre os denominadores das frações $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, e $\boldsymbol{c}$ é **20**. Isso porque os denominadores 5 e 10 são múltiplos do denominador 20.

As frações equivalentes com denominador 20 são:

$$a = \frac{2}{5} = \frac{8}{\mathbf{20}} \qquad b = \frac{3}{10} = \frac{6}{\mathbf{20}} \qquad c = \frac{7}{\mathbf{20}}$$

Temos, portanto, que a ordem crescente das frações é $\frac{6}{\mathbf{20}}, \frac{7}{\mathbf{20}}, \frac{8}{\mathbf{20}}$. Logo, a ordem crescente das frações do enunciado é $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}$. O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Outra forma de se comparar as frações é realizar a divisão do numerador pelo denominador:

$$a = \frac{2}{5} = 0{,}4 \qquad b = \frac{3}{10} = 0{,}3 \qquad c = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

Novamente, encontramos que a ordem crescente das frações do enunciado é $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$.

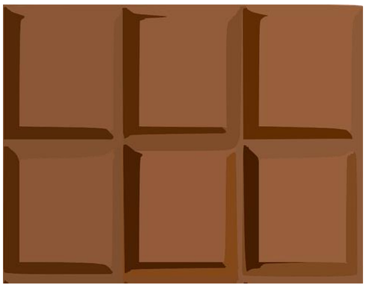
Gabarito: Letra D.

Problemas envolvendo frações

O uso da palavra “de”

Uma palavra muito importante que deve ser observada quando se resolve problemas envolvendo frações é a palavra "**de**". Isso porque essa palavra nos indica uma **multiplicação**.

Considere novamente uma barra de chocolate de 6 pedaços:



Para essa barra de chocolate, 1/3 **de** 6 pedaços corresponde a:

$$\frac{1}{3}\ \textbf{de}\ 6\ \text{pedaços}$$

$$= \frac{1}{3} \times 6\ \text{pedaços}$$

$$= \frac{6}{3}\ \text{pedaços}$$

$$= 2 \text{ pedaços}$$

Agora, vamos supor que João tem direito a 1/3 dessa barra **de** 6 pedaços e que, **da** parte de João, Maria comeu a metade (1/2). Quantos pedaços Maria comeu? Maria comeu 1/2 **de** 1/3 **de** 6 pedaços:

$$\frac{1}{2} \textbf{ de } \frac{1}{3} \textbf{ de } 6 \text{ pedaços}$$

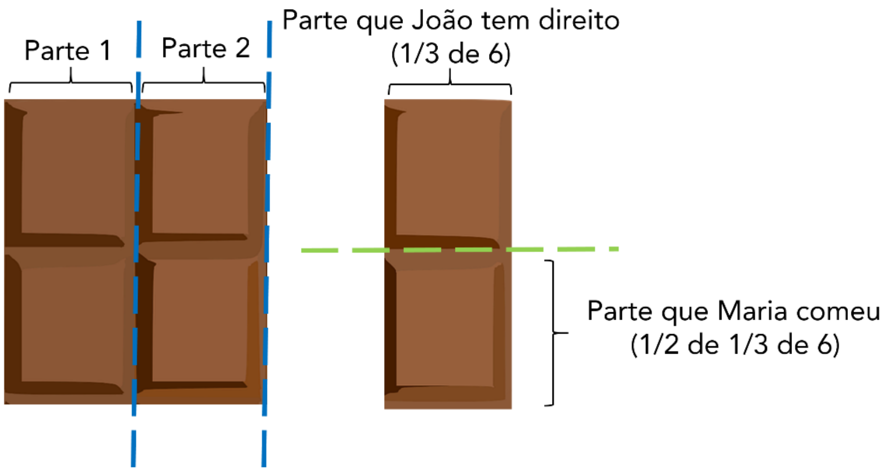
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 6 \text{ pedaços}$$

$$= \frac{1 \times 1 \times 6}{2 \times 3}$$

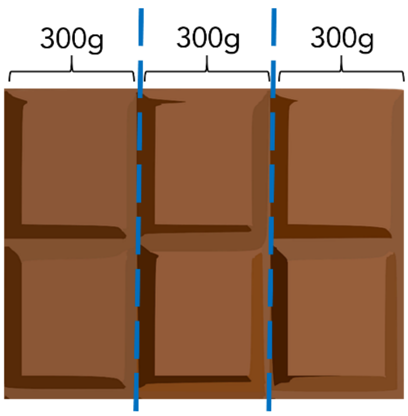
$$= \frac{6}{6}$$

$$= 1 \text{ pedaço}$$

Observe a figura abaixo, que representa a parte que Maria comeu:



E se disséssemos que essa barra de chocolate tem 900 gramas, quantos gramas temos em 1/3 dessa barra? Para resolver o problema, basta observar que, ao dividirmos a barra em 3 partes de 300 gramas, temos que a barra toda tem justamente 3 × 300g = 900g. Logo, 1/3 da barra apresenta 300 gramas.



Uma outra forma de se obter o resultado é trocar o "**de**" pela **multiplicação**:

$$\frac{1}{3}\ \mathbf{de}\ 900\text{g}$$

$$= \frac{1}{3} \times 900\text{g}$$

$$= \frac{900\text{g}}{3}$$

$$= 300\text{g}$$

(AVAREPREV/2020) Uma empresa tem 120 funcionários, entre homens e mulheres. Se 2/5 desses funcionários são mulheres, é correto afirmar que o número de mulheres é igual a

a) 36.

b) 48.

c) 60.

d) 72.

Comentários:

São mulheres 2/5 **de** 120 funcionários.

$$\frac{2}{5}\ \mathbf{de}\ 120$$

$$= \frac{2}{5} \times 120$$

$$= 2 \times \frac{120}{5}$$

$$= 2 \times 24$$

$$= 48$$

Gabarito: Letra B.

(Pref. Angra/2019) A família de Flávio pediu uma pizza, que veio dividida em 8 fatias iguais. Flávio comeu uma fatia inteira e dividiu uma outra fatia igualmente com sua irmã.

Da pizza inteira Flávio comeu

a) 1/4.

b) 1/3.

c) 3/8.

d) 1/6.

e) 3/16.

Comentários:

Uma fatia da pizza corresponde a $\frac{1}{8}$ da pizza. Flávio comeu uma fatia mais a metade de outra fatia. Ao comer metade da outra fatia, Flávio comeu $\frac{1}{2}$ **de** $\frac{1}{8}$ da pizza.

Isso significa que Flávio comeu ao todo:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ \textbf{de}\ \frac{1}{8} \text{ da pizza}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8} \text{ da pizza}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{16} \text{ da pizza}$$

$$=\frac{2}{16}+\frac{1}{16} \text{ da pizza}$$

$$=\frac{2+1}{16} \text{ da pizza}$$

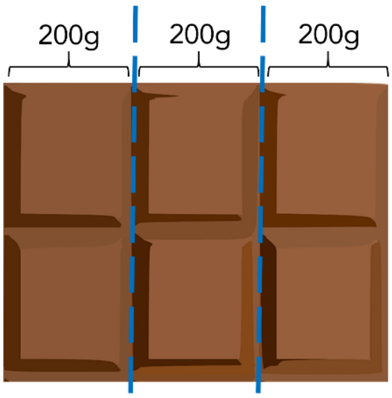
$$=\frac{3}{16} \text{ da pizza}$$

Gabarito: Letra E.

Obtenção do todo a partir da parte

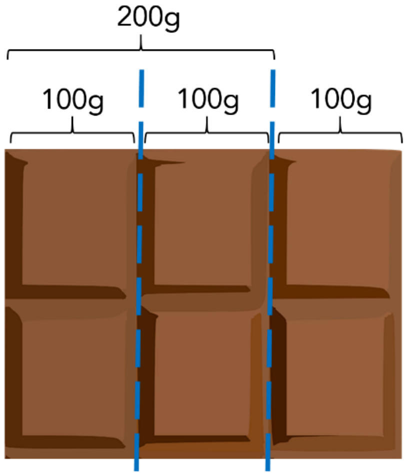
Se disséssemos que 1/3 de uma barra de chocolate tem 200g, quantos gramas tem a barra de chocolate inteira? Para se responder essa pergunta, basta observar que, se uma parte de 3 tem 200g, as três partes que compõem o todo da barra têm:

$$3\times 200\text{g} = 600\text{g}$$



E se disséssemos que 2/3 da barra tem 200g, quantos gramas tem a barra de chocolate inteira? **Ora, se 2 partes de 3 tem 200g, 1 parte de 3 tem 100g**. **Logo, as três partes** que compõem o todo devem ter:

$$3\times 100\text{g} = \mathbf{300g}$$



Uma **forma prática de se obter o todo a partir da parte** do problema é **utilizar o recurso** "**inverte e multiplica**".

Veja que, se 2/3 corresponde a 200g, podemos obter o todo invertendo a fração e multiplicando pelo valor que representa a parte (200g):

$$\frac{3}{2} \times 200\text{g}$$

$$= 3 \times \frac{\mathbf{200g}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{= 3 \times 100g}$$

$$= 300\text{g}$$

Por que esse recurso funciona? Perceba que, ao "inverter e multiplicar" a fração 2/3 que corresponde à parte, na verdade **estamos dividindo o valor de 200g por 2, obtendo o valor de uma parte de 3 (100g),** para em seguida **multiplicar essa terça parte por 3, obtendo assim o valor do todo (300g).**

(MPE BA/2017) Em certo reservatório, $\frac{2}{3}$ do volume de água correspondem a 120 litros.

Portanto, $\frac{3}{2}$ do volume de água desse mesmo reservatório correspondem a:

a) 270 litros;

b) 240 litros;

c) 210 litros;

d) 180 litros;

e) 150 litros.

Comentários:

Uma **forma prática de se obter o todo a partir da parte** do problema é **utilizar o recurso** "**inverte e multiplica**".

Se 2/3 correspondem a 120 litros, a **capacidade total** do reservatório é:

$$\frac{3}{2} \times 120$$

$$= 3 \times \frac{120}{2}$$

$$= 3 \times 60$$

$$= 180 \text{ litros}$$

Note que a questão **não nos pede a capacidade total** do reservatório, mas sim **3/2 da capacidade**.

$$\frac{3}{2} \textbf{ de } 180 \text{ litros}$$

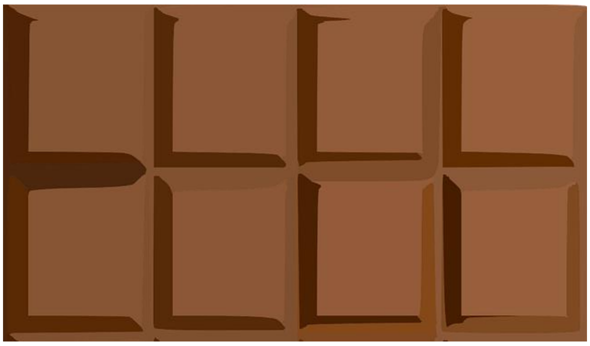
$$= \frac{3}{2} \times 180$$

$$= 270 \text{ litros}$$

Gabarito: Letra A.

Obtenção da fração complementar

Observe a seguinte barra com 8 pedaços de chocolate.



Se comermos 5/8 da barra, **qual fração da barra original ainda resta**?

Note que a parte que **não foi comida** é dada pela **subtração de 5/8 da barra inteira**. A barra inteira pode ser representada por 8/8 (8 pedaços de um total de 8 pedaços) ou então pelo número inteiro 1. Logo, a parte que não foi comida é:

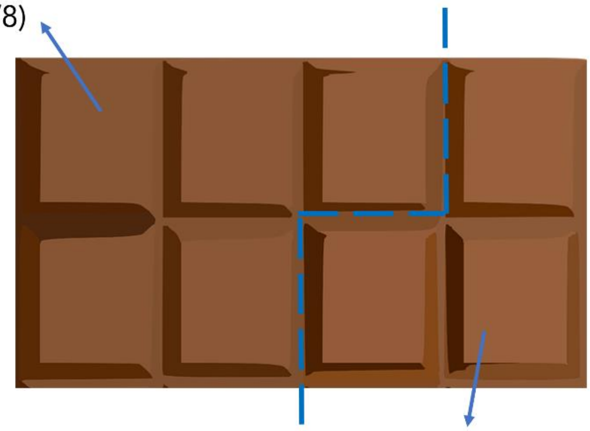
$$1 - \frac{5}{8}$$

$$= \frac{8}{8} - \frac{5}{8}$$

$$= \frac{8-5}{8}$$

$$= \frac{3}{8}$$

Note que, para a barra em questão, o que restou após se comer 5/8 é justamente 3 pedaços de 8 (3/8):



Podemos dizer, então, que dada uma fração $\frac{a}{b}$, a **fração complementar** corresponde a:

$$1 - \frac{a}{b} =$$

$$\frac{b}{b} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$$

(IBGE/2019) Marlene comeu, inicialmente, um quarto da barra de chocolate que comprou. Depois, comeu um terço do que tinha sobrado.

A fração da barra de chocolate que Marlene ainda tem para comer é:

a) 1/2;

b) 1/3;

c) 1/4;

d) 3/4;

e) 1/12.

Comentários:

Inicialmente, Marlene **comeu $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate**.

O total da barra que restou corresponde à fração complementar a $\frac{1}{4}$:

$$1 - \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{3}{4}\ da\ barra}$$

Depois, ao comer $\frac{1}{3}$ **do que tinha sobrado**, Marlene comeu:

$$\frac{1}{3} \ \mathbf{de} \ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \ \mathbf{da\ barra}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \ \mathbf{da\ barra}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ da barra}$$

O total da barra de chocolate que Marlene comeu nas duas vezes foi:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Como ela comeu no total $\frac{1}{2}$ da barra, a quantidade que restou corresponde à fração complementar a $\frac{1}{2}$:

$$1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ da barra}$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Cananéia/2020) Mauro comprou um carro. Deu $\frac{1}{3}$ do valor total como entrada e financiou $\frac{3}{4}$ do valor restante. A quantia que falta para completar o valor total será paga em uma única parcela, após o término do financiamento. O valor dessa parcela final corresponde, do valor total do carro, a

a)1/8

b)1/6

c)1/5

d)1/4

e)1/3

Comentários:

Como Mauro deu $\frac{1}{3}$ do valor total como entrada, o **valor restante após a entrada** é a fração complementar a $\frac{1}{3}$:

$$1-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{3-1}{3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

Como Mauro **financiou $\frac{3}{4}$** **do valor restante após a entrada**, **ele financiou $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$**.

Isso significa que ele **não financiou $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$**, pois a fração complementar de $\frac{3}{4}$ é:

$$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Logo, a quantia **não financiada** do valor restante após a entrada, que corresponde à parcela final, corresponde a:

$$\frac{1}{4}\ \mathbf{de}\ \frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$$

Simplificando 2 e 4 por 2, temos:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{6}$$

Gabarito: Letra B.

Vamos agora resolver algumas questões a mais sobre problemas envolvendo frações.

(Pref. B dos Coqueiros/2020) No início de determinado mês, uma escola tinha um estoque de 720 kg de alimentos. Nas três primeiras semanas desse mês, foram consumidos, respectivamente, 1/6, 5/24 e 1/5 desse estoque de alimentos.

Considerando essa situação hipotética, assinale a opção que apresenta a quantidade de alimentos restante nesse estoque logo após essas três semanas.

a) 144 kg

b) 180 kg

c) 210 kg

d) 306 kg

e) 414 kg

Comentários:

A fração que corresponde ao total de alimentos consumidos é:

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{24}+\frac{1}{5}$$
$$=\frac{20}{120}+\frac{25}{120}+\frac{24}{120}$$
$$=\frac{69}{120}$$

A fração que corresponde ao total de alimentos **não consumidos** é dada pela **fração complementar** a $\frac{69}{120}$:

$$1-\frac{69}{120}$$
$$=\frac{120-69}{120}$$
$$=\frac{51}{120}$$

O total de alimentos não consumidos é dado por:

$$\frac{51}{120}\ \textbf{de}\ 720\ \text{kg}$$
$$=\frac{51}{120}\times 720$$
$$=51\times\frac{720}{120}$$
$$=51\times 6$$
$$=306\ \text{kg}$$

Gabarito: Letra D.

(TRF 4/2019) Um ciclista pedalou durante três horas. Na primeira hora percorreu $\frac{5}{18}$ do trajeto, na segunda hora percorreu $\frac{7}{25}$ do trajeto e na terceira hora percorreu $\frac{11}{45}$ do trajeto. A fração do trajeto que falta percorrer é

a) $\frac{361}{460}$

b) $\frac{351}{460}$

c) $\frac{89}{450}$

d) $\frac{99}{450}$

e) $\frac{250}{460}$

Comentários:

O total do trajeto percorrido pelo ciclista é dado pela seguinte soma:

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{25}+\frac{11}{45}$$

Para realizar a soma, devemos representar as frações por meio de **frações equivalentes** com um **mesmo denominador**. O **menor denominador comum possível** para realizar a soma é o **MMC entre 18**, **25** e **45**. Decompondo esses números em fatores primos, temos:

$$18 = 2 \times 9$$
$$= 2 \times 3^2$$

$$25 = 5 \times 5$$
$$= 5^2$$

$$45 = 9 \times 5$$
$$= 3^2 \times 5$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$18 = \ 2 \times 3^2$

$25 = \qquad\quad 5^2$

$45 = \quad\ \ 3^2 \times 5$

Logo, $\text{MMC }(18{,}25{,}45) = 2 \times 3^2 \times 5^2 = \mathbf{450}$

Portanto, a soma que corresponde à fração do **trajeto percorrido** é:

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{25}+\frac{11}{45}$$

$$= \frac{125}{\mathbf{450}} + \frac{126}{\mathbf{450}} + \frac{110}{\mathbf{450}}$$

$$= \frac{125 + 126 + 110}{\mathbf{450}}$$

$$= \frac{361}{450}$$

O trajeto **não percorrido** pedido pela questão é dado pela **fração complementar** a $\frac{361}{450}$:

$$1 - \frac{361}{450}$$

$$= \frac{450}{450} - \frac{361}{450}$$

$$= \frac{450 - 361}{450}$$

$$= \frac{89}{450}$$

Gabarito: Letra C.

Quando nos deparamos com problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolvê-los consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**. Esse recurso será utilizado com frequência na resolução dos exercícios. Vejamos:

(PC AM/2022) Geraldo resolveu se desfazer de sua coleção de miniaturas. Assim, ele deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson; das que sobraram, ele deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson e as 48 restantes ele deu para sua irmã Glória.

O número de miniaturas que Gilson recebeu foi

a) 12.

b) 16.

c) 18.

d) 24.

e) 48.

Comentários:

Considere que o total de miniaturas de Geraldo seja M.

"...ele (Geraldo) deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson..."

Note que o total de miniaturas que ficou com Gerson é:

$$(\text{Miniaturas Gerson}) = \frac{2}{5} \text{ de } M$$

$$= \frac{2}{5} \times M$$

$$= \frac{2}{5} M$$

"...das que sobraram, ele (Geraldo) deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson..."

Após a distribuição para Gerson, o total de miniaturas que sobraram foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson})$$

$$= M - \frac{2}{5} M$$

$$= \frac{5M - 2M}{5}$$

$$= \mathbf{\frac{3}{5} M}$$

Desse total que restou, $\frac{1}{3}$ ficou com o Gilson. Logo, o número de miniaturas que ficaram com Gilson foi:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{3} \text{de} \, \mathbf{\frac{3}{5} M}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} M$$

$$= \frac{1}{5} M$$

"...e as 48 restantes ele (Geraldo) deu para sua irmã Glória..."

O número de miniaturas que restou para Glória foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson}) - (\text{Miniaturas Gilson})$$

$$M - \frac{2}{5} M - \frac{1}{5} M$$

$$= \frac{5M - 2M - 1M}{5}$$

$$= \frac{2}{5} M$$

Esse número de miniaturas corresponde a 48. Logo:

$$\frac{2}{5}M = 48$$

$$M = \frac{48 \times 5}{2}$$

$$M = 120$$

Portanto, **o total de miniaturas é 120**. Queremos obter o número de miniaturas que ficaram com Gilson:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{5}M$$

$$= \frac{1}{5} \times 120$$

$$\mathbf{= 24}$$

Gabarito: Letra D.

(SSP AM/2022) Os alunos de uma turma estavam se preparando para um concurso. Constatou-se que: a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC, a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM, e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol.

O número de alunos dessa turma que torcem pelo Manaus FC é

a) 21.

b) 25.

c) 26.

d) 28.

e) 35.

Comentários:

Considere que o total de alunos da turma seja A.

"...a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Manaus FC é:

$$(\text{Manaus FC}) = \frac{1}{3}\ \mathbf{de}\ \text{A}$$

$$= \frac{1}{3} \times \text{A}$$

$$= \frac{1}{3}\text{A}$$

"...a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Nacional-AM é:

$$(\text{Nacional-AM}) = \frac{1}{4}\ \mathbf{de}\ \text{A}$$

$$= \frac{1}{4} \times \text{A}$$

$$= \frac{1}{4}\text{A}$$

"...e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol."

O número de alunos restantes é:

$$(\text{Total de alunos}) - (\text{Manaus FC}) - (\text{Nacional-AM})$$

$$A - \frac{1}{3}A - \frac{1}{4}A$$

$$= \frac{12A - 4A - 3A}{12}$$

$$= \frac{5A}{12}$$

Esse número de alunos corresponde a 35. Logo:

$$\frac{5A}{12} = 35$$

$$A = 35 \times \frac{12}{5}$$

$$A = 84$$

Portanto, **o total de alunos é 84**. Queremos obter o número de alunos que torcem pelo Manaus FC:

$$(\text{Manaus FC}) = \frac{1}{3}A$$

$$= \frac{1}{3} \times 84$$

$$= 28$$

Gabarito: Letra D.

Dízima periódica

Definição e representação

Uma dízima periódica ocorre quando, ao realizar uma divisão, obtém-se um número com casas decimais que se repetem indefinidamente.

Exemplo: Ao realizar a divisão de 23 por 99, obtém-se o número "0,23232323...". Note que que a porção "23" se repete indefinidamente. Nesse caso, dizemos que 23 é o período da dízima periódica "0,23232323...". Isso significa que **o período é a porção que se repete na dízima periódica**.

Podemos **representar uma dízima periódica com um traço sobre o período**. Isto é:

$$0{,}23232323\ldots = 0{,}\overline{23}$$

A dízima periódica "5,77898989..." apresenta o período "89", pois esta é a porção que se repete indefinidamente. Podemos representar essa dízima periódica da seguinte forma:

$$5{,}77898989\ldots = 5{,}77\overline{89}$$

Transformação da dízima periódica em fração

Os principais problemas relacionados às dizimas periódicas consistem em transformar o número em uma fração. Para realizar essa transformação, a única coisa que você precisa se lembrar é que:

- Um número na forma $\mathbf{0,AAA}\ldots = \mathbf{0,\overline{A}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{A}}{9}$;
- Um número na forma $\mathbf{0,ABABAB}\ldots = \mathbf{0,\overline{AB}}$ corresponde a $\frac{AB}{99}$;
- Um número na forma $\mathbf{0,ABCABCABC}\ldots = \mathbf{0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{ABC}{999}$;
- E assim sucessivamente.

$\mathbf{0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{ABC}{999}$

Vamos a alguns exemplos.

Transforme 0,3333.... em uma fração

$$0{,}3333\ldots = 0,\overline{3} = \frac{3}{9}$$

Transforme 0,45454545... em uma fração

$$0{,}4545\ldots = 0,\overline{45} = \frac{45}{99}$$

Transforme 0,672346723467234... em uma fração

$$0{,}672346723467234\ldots = 0,\overline{67234} = \frac{67234}{99999}$$

Para dízimas periódicas que fogem desse padrão, devemos modificá-las de modo a deixá-las no formato que conhecemos. Vejamos:

Transforme 0,553333... em uma fração

Veja que o período da dízima periódica é 3. Vamos separar 0,55 do restante do número:

$$0{,}55\overline{3} = 0{,}55 + \mathbf{0,00\overline{3}}$$

Note que ainda não podemos transformar a parte que apresenta o período em uma fração. Devemos escrevê-la de uma outra forma:

$$= 0{,}55 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}} \times \mathbf{0,\overline{3}}$$

Agora sim temos $0,\overline{3}$. Esse número corresponde a 3/9.

$$= 0{,}55 + \frac{1}{100} \times \frac{3}{9}$$

$$= \frac{55}{100} + \frac{3}{900}$$

$$= \frac{9 \times 55 + 3}{900}$$

$$= \frac{498}{900}$$

Transforme 6,453121212... em uma fração

Devemos realizar o mesmo procedimento, separando a parte que não se repete do período da dízima periódica.

$$6{,}453\overline{12}\ldots = 6{,}453 + 0{,}000\overline{12}$$

$$= 6{,}453 + \frac{1}{1000} \times 0,\overline{12}$$

$$= 6{,}453 + \frac{1}{1000} \times \frac{12}{99}$$

$$= \frac{6453}{1000} + \frac{12}{99000}$$

$$= \frac{99 \times 6453 + 12}{99000}$$

$$= \frac{638859}{99000}$$

INDO MAIS FUNDO!

Uma decorrência interessante sobre a dízima periódica é que 0,999... é igual a 1. Não se trata de uma aproximação. Os números são exatamente iguais.

$$0{,}999\ldots = 0,\bar{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Vamos resolver algumas questões.

(DPE RS /2017) Sabendo que o número decimal F é 0,8666 ... , que o número decimal G é 0,7111 ... e que o número decimal H é 0,4222 ... , então, o triplo da soma desses três números decimais, F, G e H, é igual a

a) 6,111 . . .

b) 5,888 . . .

c) 6

d) 3

e) 5,98

Comentários:

A soma de F, G e H é dada por:

$$0{,}8\bar{6} + 0{,}7\bar{1} + 0{,}4\bar{2}$$

Separando as partes que não se repetem dos períodos, temos:

$$= (\mathbf{0,8 + 0,7 + 0,4}) + 0{,}0\bar{6} + 0{,}0\bar{1} + 0{,}0\bar{2}$$

$$= \mathbf{1,9} + \frac{1}{10}0,\bar{6} + \frac{1}{10}0,\bar{1} + \frac{1}{10}0,\bar{2}$$

$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times (0,\bar{6} + 0,\bar{1} + 0,\bar{2})$$

$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{6}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right)$$

$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{9}\right)$$

$$= 1{,}9 + 0{,}1$$

$$= 2$$

A questão pede o triplo da soma de F, G e H, que é dado por $3 \times 2 = 6$.

Gabarito: Letra C.

(MIN/2013) Julgue o seguinte item, relativo a sistemas numéricos e sistema legal de medidas.

Se A = 1,232323... e B = 0,434343..., então A + B = 165/99.

Comentários:

Observe que A apresenta o período 23.

$$A = 1,\overline{23}$$

$$= 1 + \frac{23}{99}$$

$$= \frac{99 + 23}{99} = \frac{122}{99}$$

B apresenta o período 43.

$$B = 0,\overline{43}$$

$$= \frac{43}{99}$$

Ao somar A e B, temos:

$$A + B = \frac{122}{99} + \frac{43}{99}$$

$$= \frac{165}{99}$$

Gabarito: CERTO.

RAZÃO E PROPORÇÃO

Razão e proporção

Razão

A **razão** entre os números A e B é a divisão de A por B.

- Razão entre A e B;
- Razão de A para B;
- A está para B;
- A:B;
- A/B;
- $\frac{A}{B}$.

Proporção

Proporção é a igualdade entre duas **ou mais razões**.

Sejam as **razões A/B e C/D**. A **proporção** é dada pela igualdade: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

- A e D são os **extremos**; e
- B e C são os **meios**

Em uma proporção, o **produto dos meios** é igual ao **produto dos extremos**.

Em outras palavras, dada a proporção $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, temos que $C \times B = A \times D$.

Outra forma de entender a **"multiplicação cruzada"** é perceber que **podemos rearranjar os meios e os extremos**.

Não confundir a razão entre duas entidades com a razão entre uma entidade e a totalidade de casos do problema.

Propriedade fundamental da soma

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$,então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

Não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção:

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c}{b+d}$

Propriedade fundamental da subtração

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

Uso conjunto das propriedade da soma e da subtração

Podemos somar e subtrair os numeradores e os denominadores seguindo a mesma lógica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a+c+e+g}{-b+d+f+h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a+c-e+g}{-b+d-f+h}$$

São diversas as possibilidades. **Não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção.**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-c+e-g}{-d+f-h}$$

Escala

A **escala** é um **tipo específico de razão**. Trata-se da razão entre uma medida representada em um desenho e a medida real do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

Velocidade Média e Vazão

Velocidade Média

A **velocidade média** corresponde à razão entre uma distância percorrida e o tempo em que se percorreu essa distância:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Para **converter km/h para m/s, devemos dividir o valor por 3,6**
Para **converter m/s para km/h, devemos multiplicar o valor por 3,6**

Vazão

A **vazão** corresponde à razão entre um volume e um tempo.

$$\text{Vazão} = \frac{\text{Volume}}{\text{Tempo}}$$

Em problemas envolvendo vazão, geralmente devemos utilizar o fato de que **a soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta**.

Dois conceitos importantes derivados das frações são a **razão** e a **proporção**. Vamos compreendê-los.

Razão

Sejam dois números **A** e **B**, com **B** diferente de zero. A **razão entre os números A e B é a divisão de A por B**, podendo ser expressa por:

- Razão entre **A** e **B**;
- Razão de **A** para **B**;
- **A** está para **B;**
- **A:B**;
- **A/B**;
- $\boldsymbol{\frac{A}{B}}$.

O conceito de razão nos permite fazer a comparação entre dois números. Se, por exemplo, tivermos em uma sala 10 adultos e 5 crianças, a razão entre o **número de adultos** e o **número de crianças** é:

$$\frac{\text{Número de adultos}}{\text{Número de crianças}} = \frac{10}{5} = 2$$

Note, portanto, que a razão entre o número de adultos e o número de crianças representa quantas vezes o número de adultos é maior do que o número de crianças. Para o exemplo em questão, representa quantas vezes o número 10 é maior do que o 5: duas vezes.

Se quisermos a razão entre o **número de crianças** e o **número de adultos**, temos:

$$\frac{\text{Número de crianças}}{\text{Número de adultos}} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Vamos exercitar esse conceito.

(SEFAZ-BA/2019) Durante a campanha para eleições presidenciais em determinado país foram compartilhadas 30 milhões de vezes fakenews a favor do candidato A. Já fakenews a favor do candidato B foram compartilhadas 6 milhões de vezes. De acordo com esses dados, pode-se estimar que a razão entre a diferença entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B em relação ao número de compartilhamentos de fakenews pró-B é igual a

a) 4.

b) 3.

c) 2.

d) 5.

e) 6.

Comentários:

O número de compartilhamentos de fakenews pró-A é $N_A = 30\ milhões$.

O número de compartilhamentos de fakenews pró-B é $N_B = 6\ milhões$.

A diferença **D** entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B é dada por:

$$D = N_a - N_b = 24\ milhões$$

A questão pede **razão entre** a diferença entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B **em relação ao** número de compartilhamentos de fakenews pró-B.

Trata-se da **razão entre $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{N_b}$:**

$$\frac{D}{N_b} = \frac{24\ milhões}{6\ milhões} = \frac{24}{6} = 4$$

Gabarito: Letra A.

(CREF 12/2013) Se a razão A/B vale 3, sendo B diferente de 0, então a razão de (2A—B)/2A vale:

a) 1

b) 1/2

c) 4/5

d) 3/5

e) 5/6

Comentários:

Podemos escrever A em função de B.

$$\frac{A}{B} = 3$$

$$A = 3B$$

Substituindo **A = 3B** na razão **(2A—B)/2A**, temos:

$$\frac{2A - B}{2A}$$

$$= \frac{2 \times 3B - B}{2\ \times 3B}$$

$$\frac{6B - B}{6B}$$

$$\frac{5B}{6B} = \frac{5}{6}$$

O **gabarito**, portanto, é **Letra E**.

Outra forma de se resolver a questão é "fazer aparecer" a razão **A/B** na razão **(2A—B)/2A**.

$$\frac{2\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2\mathrm{A}}$$

$$= \frac{2A}{2A} - \frac{B}{2A}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{B}{A}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{A}{B}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= 1 - \frac{1}{6}$$

$$\frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

Gabarito: Letra E.

Assim como ocorre em problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolver exercícios envolvendo o conceito de razão consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**. Vejamos:

(CBM AM/2022) Em um grupo de pessoas, o número de homens é igual ao número de mulheres. Selecionam-se então $\frac{2}{5}$ dos homens $\frac{3}{4}$ das mulheres e forma-se um novo grupo.

Nesse novo grupo, em relação ao total de pessoas, as mulheres representam

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{7}{20}$

d) $\frac{15}{23}$

e) $\frac{17}{25}$

Comentários:

Considere que originalmente o número de **homens** e o número de **mulheres** seja **igual a X**, **totalizando $2X$ pessoas**.

No novo grupo, temos $\frac{2}{5}$ dos homens. O total de homens nesse novo grupo é:

$$\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} = \frac{2}{5}\ \textbf{de}\ X = \frac{2}{5} \times X = \frac{2}{5}X$$

Ainda no novo grupo, temos $\frac{3}{4}$ das mulheres. O total de mulheres nesse novo grupo é:

$$\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} = \frac{3}{4}\ \textbf{de}\ X = \frac{3}{4} \times X = \frac{3}{4}X$$

Nesse novo grupo, **a razão entre o número de mulheres e o total de pessoas é**:

$$\frac{\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}}}{\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} + \text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{2}{5}X + \frac{3}{4}X}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{8X + 15X}{20}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{23}{20}X}$$

Simplificando X, temos:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{23}{20}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{20}{23}$$

$$= \mathbf{\frac{15}{23}}$$

Gabarito: Letra D.

Proporção

Conceito de proporção

Proporção é a igualdade entre duas **ou mais razões**.

Sejam as razões **A/B** e **C/D**. A proporção é dada pela igualdade:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

Podemos representar uma proporção das seguintes formas:

- **A** está para **B** assim como **C** está para **D**;
- **A:B::C:D**;
- **A/B = C/D**;
- $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$.

Ainda em uma proporção **A/B = C/D**, diz-se que:

- **A** e **D** são os **extremos**; e
- **B** e **C** são os **meios**.

Multiplicação cruzada

A propriedade das proporções conhecida por **"multiplicação cruzada"** nos diz o seguinte:

Em uma proporção, o **produto dos meios** é igual ao **produto dos extremos**.
Em outras palavras, dada a proporção $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, temos que $C\times B=A\times D$.

Considere, por exemplo, a proporção:

$$\frac{5}{10}=\frac{20}{40}$$

Note que o produto dos meios, 10×20, é igual ao produto dos extremos, 5×40, pois ambas as multiplicações nos retornam o resultado 200.

Vamos a um exemplo.

Determine o valor de incógnita x na proporção $\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\ (x+1)}{20}$.

Realizando a **"multiplicação cruzada"**, obtemos:

$$4 \times 9(x+1) = 3(x-2) \times 20$$

$$36 \times (x+1) = 60 \times (x-2)$$

$$36x + 36 = 60x - 120$$

$$120 + 36 = 60x - 36x$$

$$156 = 24x$$

$$24x = 156$$

$$x = \frac{156}{24}$$

$$x = 6{,}5$$

Outra forma de entender a **"multiplicação cruzada"** é perceber que podemos rearranjar os **meios** e os **extremos**. Para exemplificar esse conceito, considere a mesma proporção:

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\ (x+1)}{20}$$

Os meios da proporção considerada são $\mathbf{4}$ e $\mathbf{9\ (x+1)}$.

$$\frac{3(x-2)}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{9\ (x+1)}}{20}$$

Podemos rearranjar os meios da proporção original da seguinte forma:

$$\frac{3(x-2)}{1} = \frac{\mathbf{4 \times 9(x+1)}}{20}$$

Também podemos rearranjar os meios da proporção original assim:

$$\frac{3(x-2)}{\mathbf{4 \times 9\ (x+1)}} = \frac{1}{20}$$

Outra possibilidade é trocar os meios de posição:

$$\frac{3(x-2)}{\mathbf{9\ (x+1)}} = \frac{\mathbf{4}}{20}$$

A mesma ideia vale para os extremos da proporção.

Os extremos da proporção considerada são $\mathbf{3(x-2)}$ e $\mathbf{20}$.

$$\frac{\mathbf{3(x-2)}}{4}=\frac{9\ (x+1)}{\mathbf{20}}$$

Podemos rearranjar os extremos das seguintes formas:

$$\frac{\mathbf{3(x-2)\times 20}}{4}=\frac{9\ (x+1)}{1}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{9\ (x+1)}{\mathbf{3(x-2)\times 20}}$$

$$\frac{\mathbf{20}}{4}=\frac{9\ (x+1)}{\mathbf{3(x-2)}}$$

Entendida essa nova percepção da **"multiplicação cruzada"**, vamos determinar o valor da incógnita x de outra maneira.

Determine o valor de incógnita x na proporção $\frac{3(x-2)}{4}=\frac{9\ (x+1)}{20}$.

$$\frac{3(x-2)}{4}=\frac{9(x+1)}{20}$$

$$\frac{3(x-2)}{1}=\frac{4\times 9\ (x+1)}{20}$$

$$\frac{(x-2)}{1}=\frac{4\times 9\ (x+1)}{3\times 20}$$

$$(x-2)=\frac{4\times 9}{3\times 20}\times (x+1)$$

Simplificando 4 com 20 e 9 com 3, obtemos:

$$(x-2)=\frac{3}{5}\times (x+1)$$

$$x-2=\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}$$

$$x - \frac{3}{5}x = 2 + \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5}x = \frac{13}{5}$$

$$2x = 13$$

$$x = \frac{13}{2}$$

$$x = 6{,}5$$

Vamos praticar o que aprendemos sobre **"multiplicação cruzada"**.

(Pref. P das Missões/2019) O valor de "x" na proporção $\frac{x}{2} = \frac{x+7}{4}$ é:

a) 2.

b) 5.

c) 7.

d) 9.

e) 10.

Comentários:

Sabemos que:

-

$$\frac{x}{2} = \frac{x+7}{4}$$

Para determinar o valor de "x", devemos utilizar a "multiplicação cruzada".

$$x \times 4 = 2 \times (x + 7)$$

$$4x = 2x + 14$$

$$4x - 2x = 14$$

$$2x = 14$$

$$x = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

Gabarito: Letra C.

(CODESG/2019) Considere que os números 0,6; 1,6; 0,3; e k formam, nessa ordem, uma proporção. Qual o valor de k?

a) 0,8

b) 1,8

c) 2,4

d) 2,6

Comentários:

Como os números 0,6; 1,6; 0,3; e k formam uma proporção na ordem indicada, então:

$$\frac{0{,}6}{1{,}6} = \frac{0{,}3}{k}$$

Para determinar o valor de "k", devemos utilizar a "multiplicação cruzada".

$$0{,}6 \times k = 1{,}6 \times 0{,}3$$

$$0{,}6k = 0{,}48$$

$$k = \frac{0{,}48}{0{,}6}$$

$$k = 0{,}8$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Peruíbe/2019) Em um experimento químico, a razão entre uma quantidade do produto A para 2/3 da quantidade do produto B é igual a 1/3. Para obter esse resultado é(são) necessário(s), do produto A,

a) 1/6 da quantidade do produto B.

b) 2/9 da quantidade do produto B.

c) 1/3 da quantidade do produto B.

d) 2/5 da quantidade do produto B.

e) 1/2 da quantidade do produto B.

Comentários:

Seja Q_A a quantidade do produto A e Q_B a quantidade do produto B.

A razão entre Q_A e $\frac{2}{3}Q_b$ é igual a 1/3. Logo:

$$\frac{Q_A}{\left(\frac{2}{3}Q_B\right)} = \frac{1}{3}$$

Rearranjando os meios, temos:

$$\frac{Q_A}{1} = \frac{\left(\frac{2}{3}Q_B\right)}{3}$$

$$Q_A = \frac{2Q_B}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$Q_A = \frac{2}{9} Q_B$$

Logo, são necessários do produto A 2/9 da quantidade do produto B.

Gabarito: Letra B.

Um ponto muito importante na resolução de problemas é **não confundir** a razão entre duas entidades com a razão entre uma entidade e a totalidade de casos do problema. Vejamos o exemplo a seguir:

(Pref. Peruíbe/2019) No ano de 2015, uma pesquisa revelou que, no Brasil, a razão entre o número de pessoas que apresentam algum tipo de deficiência e o número de pessoas que não apresentam deficiência é de 1/3. Com base nessa informação, é correto afirmar que, no Brasil, a cada

a) seis pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

b) cinco pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

c) quatro pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

d) três pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

e) duas pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

Comentários:

Perceba que o problema pergunta sobre a razão entre as pessoas com deficiência (C) e a **totalidade da população** brasileira (T).

A razão apresentada pelo enunciado é entre as pessoas com deficiência (C) e as pessoas sem deficiência (S):

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}} = \frac{1}{3}$$

Ao realizar a "multiplicação cruzada", obtemos que o número de pessoas sem deficiência é o triplo do número de pessoas com deficiência:

$$1\mathrm{S} = 3\mathrm{C}$$

O total de pessoas no Brasil (T) corresponde à soma das pessoas com e sem deficiência:

$$\mathrm{T} = \mathrm{C} + \mathrm{S}$$

A razão entre o número de pessoas com deficiência e a totalidade da população é:

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{T}} = \frac{C}{C + S}$$

Como **S = 3C**, temos:

$$= \frac{C}{C + 3C}$$

$$= \frac{C}{4C} = \frac{1}{4}$$

Logo, no Brasil, a cada quatro pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

Gabarito: Letra C.

Propriedades fundamentais das proporções

As propriedades a seguir serão de grande valia para problemas de proporcionalidade, especialmente a propriedade fundamental da soma.

Propriedade fundamental soma

Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, são validas também as proporções $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$ e também $\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Em resumo, temos que:

$$\text{Considerando que } \frac{\text{a}}{\text{b}} = \frac{\text{c}}{\text{d}}, \text{então é verdade que } \frac{\text{a}}{\text{b}} = \frac{\text{c}}{\text{d}} = \frac{\text{a} + \text{c}}{\text{b} + \text{d}}$$

O mesmo vale para uma proporção composta por **mais de duas razões**:

$$\text{Considerando que } \frac{\text{a}}{\text{b}} = \frac{\text{c}}{\text{d}} = \frac{\text{e}}{\text{f}} = \frac{\text{g}}{\text{h}}, \text{então é verdade que } \frac{\text{a}}{\text{b}} = \frac{\text{c}}{\text{d}} = \frac{\text{e}}{\text{f}} = \frac{\text{g}}{\text{h}} = \frac{\text{a} + \text{c} + \text{e} + \text{g}}{\text{b} + \text{d} + \text{f} + \text{h}}$$

Vale ressaltar que **não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção**, sendo também verdade, por exemplo, casos como os seguintes:

$$\text{Considerando que } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\text{e}}{\text{f}} = \frac{\text{g}}{\text{h}}, \text{então é verdade que } \frac{\text{a}}{\text{b}} = \frac{\text{c}}{\text{d}} = \frac{\text{e}}{\text{f}} = \frac{\text{g}}{\text{h}} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{\mathbf{b} + \mathbf{d}}$$

$$\text{Considerando que } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\text{e}}{\text{f}} = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{h}}, \text{então é verdade que } \frac{\text{a}}{\text{b}} = \frac{\text{c}}{\text{d}} = \frac{\text{e}}{\text{f}} = \frac{\text{g}}{\text{h}} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{g}}{\mathbf{b} + \mathbf{d} + \mathbf{h}}$$

Vamos a um exemplo que mostra a utilidade dessa propriedade.

Considere a proporção com três razões $\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{20}$. Determine a, b e c, sabendo que $a + b + c = 140$.

Utilizando a propriedade fundamental da soma, temos que:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{20} = \frac{a + b + c}{5 + 10 + 20}$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{20} = \frac{140}{35}$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{20} = 4$$

A sequência de igualdades acima significa que:

$$\frac{a}{5} = 4 \rightarrow a = 20$$

$$\frac{b}{10} = 4 \rightarrow b = 40$$

$$\frac{c}{20} = 4 \rightarrow c = 80$$

Propriedade fundamental da subtração

Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, são validas as proporções $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$ e também $\frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$. Em resumo, temos que:

$$\text{Considerando que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}, \text{então é verdade que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{a}-\mathrm{c}}{\mathrm{b}-\mathrm{d}}$$

Vamos a um exemplo que mostra a utilidade dessa propriedade.

Considere a proporção $\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5}$. Determine a incógnita "x".

Ao subtrair os numeradores, podemos eliminar a incógnita "x". Observe:

$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \frac{\boldsymbol{(x+1)-(x-4)}}{\boldsymbol{10-5}}$$

$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{5}}$$

$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \mathbf{1}$$

Utilizando a igualdade $\frac{x+1}{10} = 1$, obtemos:

$$x + 1 = 10$$

$$x = 9$$

Poderíamos também utilizar a igualdade $\frac{x-4}{5} = 1$:

$$x - 4 = 5$$

$$x = 9$$

Uso conjunto das propriedades da soma e da subtração

Em uma mesma proporção composta por duas ou mais razões, podemos utilizar as duas propriedades anteriores em conjunto. Por exemplo, se tivermos a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

Podemos somar e subtrair os numeradores e denominadores seguindo a mesma lógica:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}} = \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{h}} = \frac{-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e} + \boldsymbol{g}}{-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}}$$

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}} = \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{h}} = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e} - \boldsymbol{g}}{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d} + \boldsymbol{f} - \boldsymbol{h}}$$

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}} = \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{h}} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{e} - \boldsymbol{g}}{\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{f} - \boldsymbol{h}}$$

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}} = \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{h}} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{e} + \boldsymbol{g}}{\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}}$$

Enfim, são diversas as possibilidades. O importante é não esquecer que, ao realizar uma operação (soma ou subtração) com o numerador de uma das razões, devemos realizar a <u>mesma operação</u> (soma ou subtração) <u>com o denominador dessa razão</u>.

Vale ressaltar que não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}} = \frac{g}{h} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{e}}{\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{f}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}} = \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{h}} = \frac{-\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e} - \boldsymbol{g}}{-\boldsymbol{d} + \boldsymbol{f} - \boldsymbol{h}}$$

Escala

A escala é um tipo específico de razão. Trata-se da razão entre uma medida representada em um desenho e a medida real do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

É muito comum que a escala seja representada na forma **A:B**.

Quando temos, por exemplo, um mapa na escala 1:50.000, significa que cada unidade de comprimento do mapa corresponde a 50.000 unidades de comprimento do mundo real, seja qual for essa unidade de comprimento:

- Se estivermos falando de metros, cada metro do mapa corresponde a 50.000 metros no mundo real;
- Se estivermos falando de centímetros, cada centímetro do mapa corresponde a 50.000 centímetros no mundo real;
- Se estivermos falando de milímetros, cada milímetro do mapa corresponde a 50.000 milímetros no mundo real;
- Etc.

(ANAC/2009) Acerca de grandezas proporcionais e de matemática financeira, julgue o item que segue.

Se a maquete de um helicóptero, construída na escala de 1:24, tiver o comprimento igual a 20 cm, então o comprimento real dessa aeronave será inferior a 5 m.

Comentários:

A escala 1:24 apresenta 20cm como medida representada.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{20\ \text{cm}}{\text{Medida real}}$$

$$1 \times (\text{Medida real}) = 24 \times 20\ \text{cm}$$

$$(\text{Medida real}) = 480\ \text{cm}$$

Lembre-se que o prefixo "**centi**" (**c**) corresponde a 10^{-2}. O valor da medida real, em metros, é:

$$(\text{Medida real}) = 480 \times \mathbf{10^{-2}}\ \text{m}$$

$$(\text{Medida real}) = 4{,}8\ \text{m}$$

Logo, o comprimento real dessa aeronave será inferior a 5 m.

Gabarito: CERTO.

(Pref. Olímpia/2019) A tabela a seguir apresenta algumas escalas e medidas:

Escala	Medida na representação gráfica	Medida real
1:1 000	6 cm	60 m
1:2 500	20 cm	X
1:4 000	Y	600 m

As medidas X e Y são, respectivamente, iguais a

a) 25 m e 15 cm.

b) 60 m e 80 cm.

c) 500 m e 12 cm.

d) 500 m e 15 cm.

e) 800 m e 60 cm.

Comentários:

A escala 1:2.500 apresenta 20cm como medida representada e X como medida real.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{2.500} = \frac{20\text{cm}}{\text{X}}$$

$$1 \times \text{X} = 20\text{cm} \times 2.500$$

$$\text{X} = 50.000 \text{ cm}$$

Lembre-se que o prefixo "**centi**" (**c**) corresponde a 10^{-2}. O valor de X, em metros, é:

$$\text{X} = 50.000 \times \mathbf{10^{-2}}\text{m}$$

$$\text{X} = 500\text{m}$$

A escala 1:4.000 apresenta Y como medida representada e 600m como medida real.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{4.000} = \frac{\text{Y}}{600\text{m}}$$

$$\frac{600\text{m}}{4.000} = \text{Y}$$

$$\text{Y} = 0{,}15 \text{ m}$$

0,15m correspondem a 15cm. Logo, $\text{Y} = 15\text{cm}$.

Gabarito: Letra D.

Velocidade média e vazão

Nesse tópico, vamos tratar de problemas envolvendo **velocidade média** e **vazão**, que também são tipos específicos de razão.

Velocidade média

A **velocidade média** corresponde à razão entre uma distância percorrida e o tempo em que se percorreu essa distância:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Se a distância percorrida é dada em **quilômetros** (**km**) e o tempo em que se percorreu a distância é dado em **horas** (**h**), a velocidade média é obtida na unidade **quilômetros por hora** (**km/h**). Por exemplo, caso um automóvel tenha percorrido 144 km em 2h, a velocidade média é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{144\ \text{km}}{2\ \text{h}} = 72\ \text{km/h}$$

Se a distância for dada em **metros** (**m**) e o tempo for dado em **segundos** (**s**), a velocidade média é obtida na unidade **metros por segundo** (**m/s**). Por exemplo, se um atleta correu 200 metros em 25 segundos, a sua velocidade média é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{200\text{m}}{25\ \text{s}} = 8\ \text{m/s}$$

Uma vez que **quilômetros por hora** (**km/h**) e **metros por segundo** (**m/s**) são unidades de velocidade, podemos realizar uma conversão entre essas unidades. Sabemos que:

- **1km** corresponde a **1000m**; e
- Em **1h** temos **60min**, que correspondem a 60×60 = **3600s**.

Com base nisso, observe que, **para converter** **quilômetros por hora** (**km/h**) **para** **metros por segundo** (**m/s**), **devemos dividir o valor por 3,6**. Acompanhe o raciocínio aplicado para a velocidade de **72 km/h**:

$$72\text{km/h} = \frac{72\ \mathbf{km}}{\mathbf{1\ h}} = \frac{72 \times \mathbf{1000\ m}}{\mathbf{3600\ s}} = \frac{72\ \text{m}}{\frac{3600}{1000}\ \text{s}} = \frac{72\ \text{m}}{3{,}6\ \text{s}} = 20\ \text{m/s}$$

Além disso, note que:

- Como **1km** corresponde a **1000m**, temos que **1m** corresponde a $\frac{1}{1000}$ **km**; e
- Como **1h** temos **3600s**, temos que **1s** corresponde a $\frac{1}{3600}$ **h**.

Com base nisso, podemos observar que, para **converter** **metros por segundo** (**m/s**) **para** **quilômetros por hora** (**km/h**), **devemos multiplicar o valor por 3,6**. Acompanhe o raciocínio aplicado para a velocidade de **20 m/s**:

$$20 \text{ m/s} = \frac{20 \ \mathbf{m}}{1 \text{ s}} = \frac{20 \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1000}} \mathbf{km}}{1 \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3600}} \mathbf{h}} = 20 \times \frac{1}{1000} \times 3600 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \times \frac{3600}{1000} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \times 3{,}6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \text{ km/h}$$

Para **converter km/h para m/s**, **devemos dividir o valor por 3,6**

Para **converter m/s para km/h**, **devemos multiplicar o valor por 3,6**

Cumpre destacar que **tudo que vimos aqui para velocidade média vale para problemas em que temos uma velocidade constante**. Isso porque, **quando a velocidade é constante durante um trajeto**, **esta é a velocidade média**.

Nesse momento, vamos resolver alguns problemas envolvendo essa razão especial que chamamos de **velocidade média**.

(PREVISCAM/2022) Um motorista de táxi fez um percurso de 50 km em 30 minutos com velocidade constante. Qual a velocidade, em quilômetros por hora?

a) 105 km/h.

b) 100 km/h.

c) 150 km/h.

d) 120 km/h.

Comentários:

Para obter a velocidade em **quilômetros por hora** (**km/h**), devemos ter a distância percorrida em **quilômetros** (**km**) e o tempo em **horas** (**h**).

Como **1h = 60min**, 30 minutos correspondem à metade de uma hora, ou seja, **30min = 0,5h**. Logo:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

$$\text{Velocidade Média} = \frac{50\ \text{km}}{0{,}5\ \text{h}}$$

$$\text{Velocidade Média} = 100\ \text{km/h}$$

Como a velocidade procurada é uma **velocidade constante** ao longo de todo o trajeto, **esta velocidade é a velocidade média**.

Gabarito: Letra B.

(CBM RJ/2022) Em certa pista, um carro de corrida, mantendo velocidade média de 100 km/h durante 2 horas deu exatamente 45 voltas.

Na mesma pista, aumentando a velocidade média para 180 km/h, o número de voltas que serão dadas nas mesmas 2 horas é

a) 25.

b) 30.

c) 36.

d) 72.

e) 81.

Comentários:

Suponha que em **uma volta** temos uma **distância x em quilômetros**. Note que, na primeira situação, o carro de corrida manteve a velocidade média de **100 km/h** durante **2h** e percorreu a distância de **45x**. Logo:

$$\text{Velocidade Média}_1 = \frac{\text{Distância percorrida}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$100\ \text{km/h} = \frac{45x}{2\ \text{h}}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", temos:

$$45x = 2\text{h} \times 100\ \text{km/h}$$

$$45x = 200\ \text{km}$$

$$x = \frac{200}{45}\ \text{km}$$

Simplificando o numerador e o denominador por 5, temos:

$$x = \frac{40}{9} \text{ km}$$

Portanto, **uma volta** corresponde à distância de **40/9 km**.

Na segunda situação, o carro de corrida manteve a velocidade média de **180 km/h** durante **2h**. Com isso, podemos obter a **distância** $\boldsymbol{D}$ percorrida nessa segunda situação:

$$\text{Velocidade Média}_2 = \frac{\text{Distância percorrida}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$180 \text{ km/h } = \frac{D}{2 \text{ h}}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", temos:

$$D = 2\text{h} \times 180 \text{ km/h}$$

$$\boldsymbol{D = 360 \text{ km}}$$

Precisamos saber quantas voltas correspondem à distância de **360 km**. Trata-se da seguinte divisão:

$$\frac{360 \text{ km}}{\frac{40}{9} \text{ km por volta}}$$

$$= 360 \times \frac{9}{40}$$

$$= \frac{360}{40} \times 9$$

$$= 9 \times 9$$

$$= 81 \text{ voltas}$$

Gabarito: Letra E.

A seguir, apresentarei duas questões de maior complexidade. **Não se preocupe se você errar**, **especialmente caso você nunca tenha visto esse tipo de questão na sua vida**. Isso porque esse tipo de questão **não é comum de aparecer em provas** e, além disso, essas questões **fogem um pouco do escopo de Matemática e de Raciocínio Lógico**, começando a entrar no campo da Física.

(TJ CE/2022) Um trem viaja a uma velocidade constante. Ele leva 5 s para atravessar completamente um túnel de 85 m e gasta 8 s para atravessar completamente um túnel de 160 m. O comprimento do trem, em metros, é

a) 60.

b) 30.

c) 40.

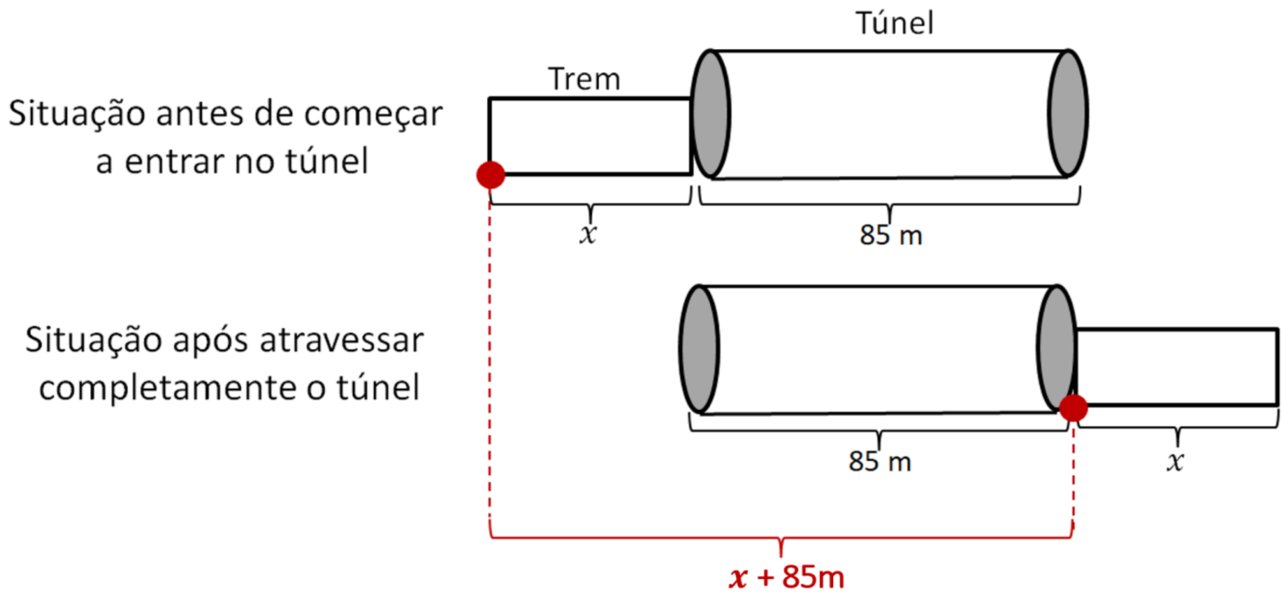
d) 50.

e) 70.

Comentários:

Suponha que o **comprimento do trem**, **em metros**, **seja x**.

Na **primeira situação**, temos o seguinte esquema que representa o trem antes de começar a entrar no túnel e após atravessar completamente o túnel:



Perceba que, **para atravessar completamente o túnel**, o trem precisa percorrer uma **distância x + 85m**, que corresponde ao **comprimento do trem somado ao comprimento do túnel**.

Já que o trem apresenta uma **velocidade constante** ao longo de todo o trajeto, **esta velocidade é a velocidade média**.

Como o trem leva **5s** para percorrer a distância **x + 85m**, a velocidade constante V, em metros por segundo (**m/s**), é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

$$V = \frac{x + 85}{5}$$

Na **segunda situação**, o trem leva **8s** para atravessar completamente um túnel de **160 m** mantendo a mesma velocidade constante $\boldsymbol{V}$. A distância percorrida, nessa segunda situação, será $\boldsymbol{x}$ **+ 160m**. Logo:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

$$V = \frac{x + 160}{8}$$

Igualando a velocidade V para as duas situações, temos:

$$\frac{x + 85}{5} = \frac{x + 160}{8}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", segue que:

$$8 \times (x + 85) = 5 \times (x + 160)$$

$$8x + 680 = 5x + 800$$

$$8x - 5x = 800 - 680$$

$$3x = 120$$

$$x = \frac{120}{3}$$

$$x = 60 \text{ m}$$

Portanto, **o comprimento do trem é 60 metros**.

Gabarito: Letra C.

(Senado/2022) Um tigre avista um javali a 1km de distância e sai, em linha reta, em seu encalço. Nesse instante, o javali foge na direção contrária à do tigre.

O tigre corre a 30m/s, e o javali tenta escapar a uma velocidade de 10m/s.

A distância percorrida pelo javali até ser alcançado pelo tigre é igual a

a) 300m.

b) 400m.

c) 500m.

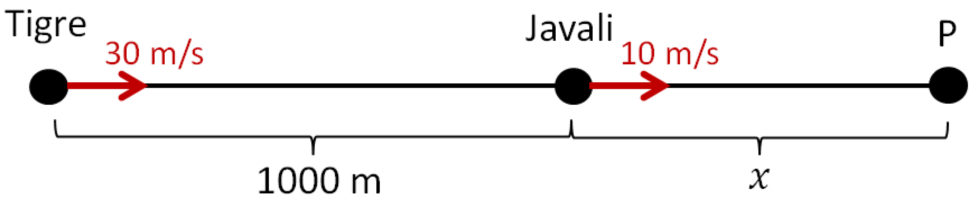
d) 600m.

e) 700m.

Comentários:

Suponha que a distância percorrida pelo javali até ser alcançado pelo tigre seja x. Suponha, ainda, que o tigre alcance o javali no **ponto P**.

Como **1km** é igual a **1000m,** temos a seguinte representação do problema:



Como as velocidades são constantes, podemos utilizar o conceito de velocidade média.

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Suponha que o tigre e o javali se encontrem no ponto P **após t segundos**. Veja que:

• A velocidade média do tigre é **30 m/s**;

• A distância percorrida pelo tigre é **1000 + x metros**;

• O tempo em que o tigre percorre a distância 1000 + x é **t segundos**.

Logo:

$$30 = \frac{1000 + x}{t}$$

$$\mathbf{30t = 1000 + x}$$

Além disso:

• A velocidade média do javali é **10 m/s**;

• A distância percorrida pelo javali é **x metros**;

• O tempo em que o javali percorre a distância x é **t segundos**.

Logo:

$$\mathbf{10 = \frac{x}{t}}$$

$$10t = x$$

$$\mathbf{t = \frac{x}{10}}$$

Substituindo $t = x/10$ na primeira equação, temos:

$$\mathbf{30t = 1000 + x}$$

$$30 \times \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{10}} = 1000 + x$$

$$3x = 1000 + x$$

$$3x - x = 1000$$

$$2x = 1000$$

$$x = \frac{1000}{2}$$

$$x = 500 \text{ m}$$

Logo, **distância percorrida pelo javali até ser alcançado pelo tigre** é igual a **500m**.

Gabarito: Letra C.

Vazão

A **vazão** corresponde à razão entre um volume e um tempo.

$$\text{Vazão } = \frac{\text{Volume}}{\text{Tempo}}$$

No geral, problemas envolvendo vazão estão relacionados a torneiras que despejam em um recipiente um determinado volume de água em um determinado período de tempo.

Se o volume despejado for dado em **litros** (**l**) e o tempo for dado em **horas** (**h**), a vazão será obtida em **litros por hora** (**l/h**). Por exemplo, caso uma torneira encha um recipiente de 10 litros em 2h, a vazão é:

$$\text{Vazão } = \frac{10 \text{ l}}{2 \text{ h}} = 5 \text{ l/h}$$

A unidade da vazão dependerá das unidades de volume e de tempo consideradas. Caso tenhamos, por exemplo, uma torneira que encha um recipiente de 500ml em 2 minutos, a vazão será:

$$\text{Vazão} = \frac{500 \text{ ml}}{2 \text{ min}} = 250 \text{ ml/min}$$

A grande maioria dos problemas que envolvem o conceito de vazão está relacionada ao uso de torneiras. É muito comum que tenhamos as seguintes situações:

- Temos as **vazões individuais das torneiras** e queremos obter o **tempo em que as torneiras enchem um recipiente quando acionadas em conjunto**; e
- Temos a **vazão conjunta** e a **vazão de algumas torneiras** e queremos obter o **tempo em que uma determinada torneira enche um recipiente**.

Nesses casos, e em outros casos semelhantes, geralmente devemos montar uma equação em que **a soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta**.

Em problemas envolvendo vazão, geralmente devemos utilizar o fato de que **a soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta**.

Vamos resolver alguns problemas.

(Pref Nova Odessa/2022) Uma torneira leva 4 horas para encher um determinado recipiente. Já uma segunda torneira leva 6 horas para encher esse mesmo recipiente. Assim, se as duas torneiras forem abertas juntas, quanto tempo irão levar para encher esse recipiente?

a) 2 horas.

b) 2 horas e 4 minutos.

c) 2 horas e 24 minutos.

d) 2 horas e 36 minutos.

e) 2 horas e 56 minutos.

Comentários:

Suponha que o volume do recipiente em questão seja V.

A primeira torneira leva 4 horas para encher o recipiente de volume V. Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{Volume}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{V}}{4}$$

A segunda torneira leva 6 horas para encher o recipiente de volume V. Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{Volume}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{V}}{4}$$

A soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta. Logo:

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{V}{4} + \frac{V}{6}$$

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{3V + 2V}{12}$$

$$\text{Vazão conjunta} = \boldsymbol{\frac{5V}{12}}$$

A **vazão conjunta** corresponde à razão entre o **volume do recipiente V** e o **tempo t em que as torneiras enchem conjuntamente o recipiente**:

$$\text{Vazão conjunta} = \boldsymbol{\frac{V}{t}}$$

Igualando os dois valores para a vazão conjunta, podemos obter o tempo:

$$\boldsymbol{\frac{5V}{12}} = \boldsymbol{\frac{V}{t}}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{t}$$

$$5t = 12$$

$$t = \frac{12}{5}$$

$$t = 2{,}4 \text{ horas}$$

Como **1h = 60 minutos**, temos que **0,4h** correspondem a:

$$0{,}4 \times 60 = 24\text{min}$$

Logo, **o tempo em que as torneiras irão levar para encher o recipiente conjuntamente é de 2 horas e 24 minutos**.

Gabarito: Letra C.

(Pref Linhares/2020) Uma torneira enche um tanque em 9 horas, uma outra pode fazer o mesmo serviço em 12 horas. Juntando a essas duas torneiras uma terceira, todas trabalhando ao mesmo tempo, o tanque ficará cheio em 4 horas. O tempo que a terceira levaria trabalhando sozinha para encher todo o tanque seria de:

a) 9 horas.

b) 18 horas.

c) 36 horas.

d) 72 horas.

e) 144 horas.

Comentários:

Suponha que o volume do tanque em questão seja V.

A primeira torneira leva 9 horas para encher o tanque de volume V. Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{Volume}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{V}}{9}$$

A segunda torneira leva 12 horas para encher o tanque de volume V. Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{Volume}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{V}}{12}$$

Suponha que o tempo em que a terceira torneira enche o tanque sozinha seja t. Nesse caso, a vazão da terceira torneira é:

$$\text{Vazão}_3 = \frac{\text{V}}{t}$$

A **vazão conjunta** corresponde à razão entre o **volume do recipiente V** e o **tempo de 4 horas em que as três torneiras enchem conjuntamente o recipiente**:

$$\text{Vazão conjunta} = \boldsymbol{\frac{V}{4}}$$

A soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta. Logo:

$$\text{Vazão conjunta} = \boldsymbol{\frac{\text{V}}{9}} + \boldsymbol{\frac{V}{12}} + \boldsymbol{\frac{V}{t}}$$

Igualando os dois valores para a vazão conjunta, podemos obter o tempo em que a terceira torneira enche o tanque trabalhando sozinha:

$$\boldsymbol{\frac{\text{V}}{9}} + \boldsymbol{\frac{V}{12}} + \boldsymbol{\frac{V}{t}} = \boldsymbol{\frac{V}{4}}$$

Simplificando o volume V, temos:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{9 - 4 - 3}{36}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{2}{36}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{18}$$

$$t = 18 \text{ horas}$$

Logo, **o tempo que a terceira torneira levaria trabalhando sozinha para encher todo o tanque é de 18 horas**.

Gabarito: Letra B.

(Pref. Cuiabá/2015) Duas caixas d'água iguais, posicionadas uma ao lado da outra, possuem, cada uma, capacidade de 900 litros, sendo que a primeira está cheia e a segunda, vazia.

A primeira caixa possui uma torneira que consegue esvaziá-la com vazão de 10 litros por hora e a segunda caixa possui uma torneira que consegue enchê-la com vazão de 15 litros por hora.

Abrindo as duas torneiras simultaneamente, o tempo que deve decorrer até que os níveis da água nas duas caixas estejam na mesma altura é de

a) 18 horas.

b) 25 horas.

c) 30 horas.

d) 36 horas.

e) 45 horas.

Comentários:

Temos **duas caixas iguais**, com capacidade de **900 litros**, sendo que inicialmente **a primeira está cheia de água** e a **segunda está vazia**. Além disso, **a primeira caixa deve ser esvaziada**, e **a segunda deve ser enchida com água**.

Note que, **para que os níveis de água nas duas caixas estejam na mesma altura**, **o volume que resta na primeira caixa** deve ser igual ao **volume que foi inserido na segunda caixa**.

Considere, então, que o tempo em horas que deve decorrer até que os níveis de água nas duas caixas estejam na mesma altura seja t. Em outras palavras, considere que o tempo em horas para que **o volume que resta na primeira caixa** seja igual ao **volume inserido na segunda caixa** seja t.

Para obter o tempo t, vamos seguir os seguintes passos:

- **Obter o volume <u>restante</u> na primeira caixa em termos do tempo t;**
- **Obter o volume <u>inserido</u> na segunda caixa em termos do tempo t; e**
- **Igualar os volumes obtidos.**

<u>Volume restante na primeira caixa</u>

O volume retirado da primeira caixa durante o período t é tal que:

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{Volume retirado}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$10 = \frac{\text{Volume retirado}_1}{t}$$

$$\text{Volume retirado}_1 = 10t$$

Portanto, o volume restante na primeira caixa depois de decorrido um tempo t é:

$$\text{Volume restante}_1 = 900 - \text{Volume retirado}_1$$

$$\mathbf{Volume\ restante_1 = 900 - 10}\boldsymbol{t}$$

<u>Volume inserido na segunda caixa</u>

O volume inserido na segunda caixa durante o período t é tal que:

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{Volume inserido}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$15 = \frac{\text{Volume inserido}_2}{\text{t}}$$

$$\mathbf{Volume\ inserido_2 = 15}\boldsymbol{t}$$

<u>Igualar os volumes obtidos</u>

Igualando o volume restante da primeira caixa e o volume inserido na segunda caixa, podemos obter o tempo em que os níveis de água nas duas caixas estão na mesma altura:

$$\mathbf{Volume\ restante_1 = Volume\ inserido_2}$$

$$\mathbf{900 - 10}\boldsymbol{t} = \mathbf{15}\boldsymbol{t}$$

$$900 = 10t + 15t$$

$$900 = 25t$$

$$25t = 900$$

$$t = \frac{900}{25}$$

$$t = 36\ \mathrm{h}$$

Portanto, o tempo que deve decorrer até que os níveis da água nas duas caixas estejam na mesma altura é de **36 horas**.

Gabarito: Letra D.

PROPORCIONALIDADE

Proporcionalidade

Grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B, C e D quando

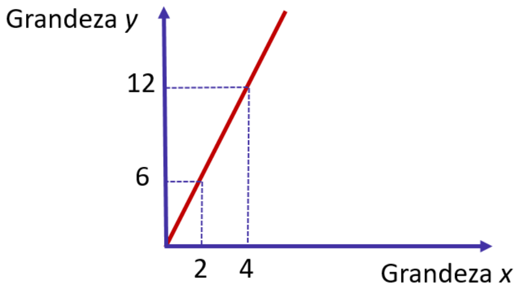
$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{Grandeza B})\times(\text{Grandeza C})\times(\text{Grandeza D})} = \text{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

Quando uma questão disser que duas ou mais grandezas são **proporcionais**, entenda que elas são **diretamente proporcionais**.

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ são diretamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \cdots = \frac{x_n}{y_n} = \text{k}$$



Para resolver problemas de divisão em partes diretamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Grandezas inversamente proporcionais

As expressões a seguir querem dizer a mesma coisa:

- A é **inversamente proporcional** a B;
- A é **diretamente proporcional ao inverso de B**;
- A é **diretamente proporcional a** $\frac{1}{B}$.

Uma grandeza A é inversamente proporcional às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{\frac{1}{(\text{Grandeza B})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza C})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza D})}} = \text{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

De outra forma, podemos dizer que grandeza A é inversamente proporcional às grandezas B, C e D quando:

$$(\text{grandeza A}) \times (\text{gradeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times (\text{grabdeza D}) = \text{k}$$

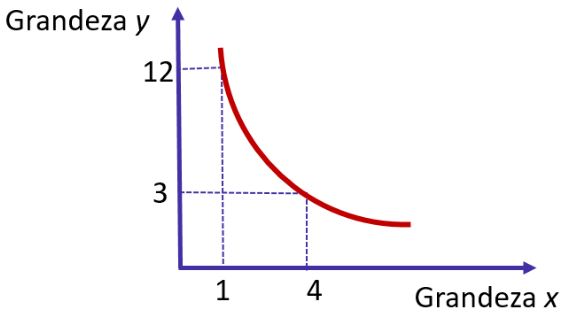
Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ são inversamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{y_2}} = \frac{x_3}{\frac{1}{y_3}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{y_n}} = k$$

De outra forma, podemos dizer que são inversamente proporcionais quando:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = x_n \times y_n = k$$



Para resolver problemas de divisão em partes inversamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Grandezas direta e inversamente proporcionais

Se uma grandeza A for **diretamente** proporcional às **grandezas B e C** e **inversamente** proporcional às **grandezas D e E**, então:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{grandeza B})\times(\text{grandeza C})\times\frac{1}{(\text{Grandeza D})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza E})}} = k$$

Para resolver problemas de divisão em partes direta e inversamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Nesse capítulo, apresentaremos primeiro as definições para, em seguida, mostrar a aplicação delas em problemas que podem aparecer na sua prova.

Sabemos que a apresentação "crua" das definições pode não ser "facilmente digerível" em um primeiro momento, porém a resolução de problemas tornará as definições mais claras.

Grandezas diretamente proporcionais

Definição de grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é **diretamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre elas é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\textbf{Grandeza B}} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Esse conceito pode ser estendido para quando temos mais de uma grandeza. Uma grandeza A é **diretamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{(\textbf{Grandeza B}) \times (\textbf{Grandeza C}) \times (\textbf{Grandeza D})} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Problemas com grandezas diretamente proporcionais

Para resolver problemas com grandezas diretamente proporcionais, devemos utilizar os conceitos vistos anteriormente. Sem mais delongas, vamos a dois exemplos.

FIQUE ATENTO!

Quando uma questão disser que duas ou mais grandezas são **proporcionais,** entenda que elas são **diretamente proporcionais**

Em uma pizzaria, a produção diária de pizzas é proporcional ao número de horas trabalhadas pelos seus funcionários.

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas.

Quantas pizzas foram produzidas em um dia em que os funcionários trabalharam 7 horas?

Veja que a grandeza "pizzas produzidas" é diretamente proporcional à grandeza "horas trabalhadas".

$$\frac{\text{pizzas produzidas}}{\text{horas trabalhadas}} = \text{k}$$

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas. Logo:

$$\frac{80}{5} = k$$

Suponha que, ao trabalhar 7 horas, foram produzidas x pizzas. Então:

$$\frac{x}{7} = k$$

Com as duas igualdades acima, podemos escrever:

$$\frac{80}{5} = \frac{x}{7} = k$$

Podemos realizar a "multiplicação cruzada" na igualdade $\frac{80}{5} = \frac{x}{7}$. Temos:

$$5x = 80 \times 7$$

$$x = \frac{80 \times 7}{5}$$

$$x = 112 \text{ pizzas}$$

Observação: a partir desse momento, vamos escrever diretamente a igualdade do tipo $\frac{80}{5} = \frac{x}{7} = k$.

Vamos a um novo problema com mais grandezas envolvidas.

Em uma pizzaria, a produção diária de pizzas é proporcional ao número de horas trabalhadas pelos seus funcionários e ao número de funcionários presentes no expediente.

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas com 8 funcionários.

Quantas pizzas foram produzidas em um dia em que estavam presentes 10 funcionários trabalhando 7 horas?

Veja que a grandeza "pizzas produzidas" é diretamente proporcional às grandezas "horas trabalhadas" e "número de funcionários".

$$\frac{(\text{pizzas produzidas})}{(\text{horas trabalhadas}) \times (\text{número de funcionários})} = \text{k}$$

Supondo que foram produzidas x pizzas no dia em que 10 funcionários trabalharam 7 horas, temos:

$$\frac{80}{5 \times 8} = \frac{x}{7 \times 10} = k$$

Podemos simplificar $\frac{80}{5\times 8} = \frac{x}{7\times 10}$ e realizar a "multiplicação cruzada" na igualdade.

$$\frac{80}{5 \times 8} = \frac{x}{7 \times 10}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{x}{70}$$

$$2 \times 70 = 1 \times x$$

$$x = 140 \text{ pizzas}$$

Sequências diretamente proporcionais

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são diretamente proporcionais quando:

$$\frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{y}_1} = \frac{\mathrm{x}_2}{\mathrm{y}_2} = \frac{\mathrm{x}_3}{\mathrm{y}_3} = \cdots = \frac{\mathrm{x}_\mathrm{n}}{\mathrm{y}_\mathrm{n}} = \mathrm{k}$$

Onde **k** é uma constante denominada **constante de proporcionalidade.**

(Pref. Ananindeua/2019) A sequência numérica (6,X,Y,12) é diretamente proporcional a sequência (3,4,5,6). Qual o valor de X+Y?

a) 8

b) 18

c) 16

d) 20

Comentários:

Como a sequência $(6, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, 12)$ é proporcional à sequência $(3,4,5,6)$, temos que:

$$\frac{6}{3} = \frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{12}{6} = k$$

Qual é a constante de proporcionalidade **k**? $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2.$

Temos, portanto, que:

$$\frac{6}{3} = \frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{12}{6} = 2$$

Logo:

$$\frac{X}{4} = 2 \ \rightarrow X = 8$$

$$\frac{Y}{5} = 2 \rightarrow Y = 10$$

A soma procurada é $X + Y = 8 + 10 = 18$

Gabarito: Letra B.

Aspecto gráfico da proporcionalidade direta

Se duas grandezas são **diretamente proporcionais**, quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta, e quando uma grandeza diminui, a outra também diminui.

Ocorre que essa descrição qualitativa não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas diretamente proporcionais, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **uma grandeza aumenta ou diminui na mesma proporção em que a outra aumenta ou diminui.**

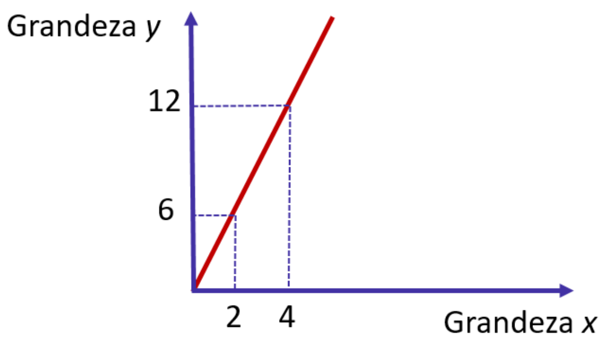
Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve dobrar. Se a primeira grandeza quintuplicar, a segunda grandeza também deve ser multiplicada por 5. Se a primeira grandeza for dividida por 3, a segunda grandeza também deve ser dividida por 3.

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, graficamente, temos uma reta que passa pela origem. Isso porque quando uma grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x, temos:

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \mathrm{k}$$

$$\mathbf{y = kx}$$

(Equação da reta que passa pela origem do plano cartesiano)



Perceba, no exemplo do gráfico, que temos um ponto $(x; y)$ dado pelo par $(2; 6)$. Quando x é multiplicado por 2, o y é multiplicado por 2, e o novo ponto $(x; y)$ obtido é $(4; 12)$.

(Pref. SJC/2019) Duas grandezas y e x, diretamente proporcionais, são representadas, graficamente, por uma função cuja expressão algébrica é:

a) $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \cdot b \cdot c \neq 0$

b) $y = ax^2 + bx$, com a e b reais e $a \cdot b \neq 0$

c) $y = ax^2$, com $a \neq 0$, real

d) $y = ax + b$, com a e b reais e $a \cdot b \neq 0$

e) $y = ax$, com $a \neq 0$, real

Comentários:

Duas grandezas diretamente proporcionais podem ser representadas graficamente por uma reta que passa pela origem do plano cartesiano.

Assim, as grandezas y e x podem ser relacionadas pela função $y = ax$, com a diferente de zero. Nesse caso, a é a constante de proporcionalidade k.

Gabarito: Letra E.

Divisão em partes diretamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes proporcionais** (ou seja, em **partes diretamente proporcionais**) tratam da divisão de uma quantia em partes proporcionais a alguns números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Vamos a um exemplo:

Divida o número 2200 em partes proporcionais a 5, 7 e 10.

Se as partes proporcionais a 5, 7 e 10 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = k$$

A soma das partes é 2.200. Logo, $a + b + c = 2.200$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10}$, temos:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{a+b+c}{5+7+10}$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{2.200}{22}$$

$$\boxed{\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = 100}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 100.

$$\frac{a}{5} = 100 \ \rightarrow a = 500$$

$$\frac{b}{7} = 100 \ \rightarrow b = 700$$

$$\frac{c}{10} = 100 \ \rightarrow c = 1.000$$

Logo, ao dividir o número 2.200 em partes proporcionais a 5, 7 e 10, obtemos, respectivamente, 500, 700 e 1.000.

As questões de concurso público costumam apresentar uma contextualização. Veja um exemplo.

(Pref. Buritizal/2018) Três amigos fizeram um bolão para um jogo de loteria, sendo que um deles colaborou com R$ 13,00, outro com R$ 14,00 e o terceiro com R$ 22,00. Eles foram sorteados e receberam um prêmio de R$ 7.350,00, que será dividido em partes diretamente proporcionais ao que cada um contribuiu no bolão. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia será

a) R$ 1.950,00.

b) R$ 2.000,00.

c) R$ 2.050,00.

d) R$ 2.100,00.

e) R$ 2.150,00.

Comentários:

Se as partes proporcionais a R$13 , R$14 e R$22 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = k$$

A soma das partes é o total do prêmio, isto é, $a + b + c = R\$\ 7.350$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22}$, temos:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{a + b + c}{13 + 14 + 22}$$

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{7350}{49}$$

$$\boxed{\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = 150}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 100. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia é tal que:

$$\frac{a}{13} = 150$$

$$a = 1.950$$

Gabarito: Letra A.

Algumas questões sobre divisões proporcionais podem ser mais complexas. Para resolvê-las, devemos nos ater aos princípios apresentados neste capítulo.

(SABESP/2019) Um pai pretende dividir R$ 750,00 entre seus 3 filhos de tal forma que cada um receba uma quantia diretamente proporcional à sua própria idade. Se dois dos filhos receberão, respectivamente, R$ 225,00 e R$ 240,00, e se a soma das idades dos dois filhos mais novos é 31 anos, então a idade do filho mais velho é

a) 15

b) 21

c) 19

d) 20

e) 16

Comentários:

Se as quantias recebidas por dois filhos foram R$225 e R$240, a quantia recebida pelo terceiro filho é o que restou do total de R$750:

$$750 - 225 - 240 = \text{ R\$285}$$

Como cada filho recebeu uma quantia proporcional à idade, os filhos mais novos, de idades N_1 e N_2, receberam as duas menores quantias, ou seja, receberam R$225 e R$240. Se a idade do filho mais velho é V, então temos a seguinte proporção:

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = k$$

Lembre-se que a soma das idades dos dois filhos mais novos é 31. Logo, $N_1 + N_2 = 31$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" com as **duas primeiras razões** da proporção acima, temos:

$$\frac{\mathbf{225}}{\boldsymbol{N_1}} = \frac{\mathbf{240}}{\boldsymbol{N_2}} = \frac{285}{V} = \frac{\mathbf{225+240}}{\boldsymbol{N_1+N_2}}$$

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = \frac{465}{\mathbf{31}}$$

$$\boxed{\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = 15}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 15. Vamos obter a idade do filho mais velho:

$$\frac{285}{V} = 15$$

$$\frac{285}{15} = V$$

$$V = 19$$

Gabarito: Letra C.

Problemas de regra de sociedade

Em uma sociedade empresarial, os lucros ou os prejuízos costumam ser distribuídos entre as pessoas de maneira diretamente proporcional ao capital investido.

Em resumo, problemas de "regra de sociedade" são problemas de divisão proporcional com uma historinha envolvendo sócios de uma empresa ou de um negócio. Vejamos um exemplo.

(BB/2013) Uma empresa obteve um lucro líquido de R$ 263.500,00. Esse lucro será dividido proporcionalmente às cotas da sociedade que cada um dos seus quatro sócios possui. O sócio majoritário detém 9 das cotas e os outros três sócios possuem, respectivamente, 1, 3 e 4 cotas da sociedade. A quantia, em reais, que o sócio que possui 3 cotas receberá nessa divisão é igual a

a) 15.500,00.

b) 139.500,00.

c) 46.500,00.

d) 62.000,00.

e) 31.000,00.

Comentários:

O lucro líquido será dividido em partes proporcionais às cotas da sociedade. Se as partes proporcionais a 1 , 3, 4 e 9 forem respectivamente a, b, c e d, temos:

- $$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = k$$

A soma das partes é o lucro líquido total, isto é, $a + b + c + d = R\$\,263.500$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9}$, temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = \frac{a+b+c+d}{1+3+4+9}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = \frac{263.500}{17}$$

$$\boxed{\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = 15.500}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 15.500. Vamos obter a quantia recebida pelo sócio que tem 3 cotas:

$$\frac{b}{3} = 15.500$$

$$b = 46.500$$

Gabarito: Letra C.

Grandezas inversamente proporcionais

Para trabalhar com **grandezas inversamente proporcionais**, devemos saber que as expressões a seguir querem dizer a mesma coisa:

- A é **inversamente proporcional** a B;
- A é **diretamente proporcional ao inverso de B**;
- A é **diretamente proporcional a $\frac{1}{B}$**.

Essa breve introdução é suficiente para resolver todos os problemas sobre grandezas inversamente proporcionais: basta **converter o problema de grandezas inversamente proporcionais em um problema de grandezas diretamente proporcionais**.

Vamos entrar em detalhes.

Definição de grandezas inversamente proporcionais

Uma grandeza A é **inversamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre a grandeza A e o inverso da grandeza B é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\frac{1}{\textbf{Grandeza B}}} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Note que:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\frac{1}{\textbf{Grandeza B}}} = (\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B})$$

Podemos, então, reescrever a definição assim:

Uma grandeza A é **inversamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, o produto da grandeza A pela grandeza B é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$(\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B}) = \boldsymbol{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Esse conceito pode ser estendido para quando temos mais de uma grandeza. Uma grandeza A é **inversamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza B}}\right)\times\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza C}}\right)\times\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza D}}\right)} = \boldsymbol{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Novamente, podemos reescrever o conceito, dizendo que uma grandeza A é **inversamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$(\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B}) \times (\textbf{Grandeza C}) \times (\textbf{Grandeza D}) = \textbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Problemas com grandezas inversamente proporcionais

Para resolver problemas com grandezas inversamente proporcionais, devemos utilizar os conceitos vistos anteriormente. Vamos a um exemplo.

Em uma fábrica de peças automotivas, o "custo fixo unitário da produção" é inversamente proporcional à quantidade de peças produzidas do tipo A e do tipo B.

Em um determinado mês, foram produzidas 50 peças do tipo A e 100 peças do tipo B, gerando um custo fixo unitário de R$ 50.

Determine o "custo fixo unitário da produção" em um mês em que foram produzidas 25 peças do tipo A e 250 peças do tipo B.

Veja que a grandeza "custo fixo unitário" é **inversamente proporcional** às grandezas "peças tipo A" e "peças tipo B".

Logo, a grandeza "custo fixo unitário" é **diretamente proporcional** **ao inverso** da grandeza "peças tipo A" e **ao inverso** da grandeza "peças tipo B".

$$\frac{(\text{custo fixo unitário})}{\frac{1}{(\text{peças tipo A})} \times \frac{1}{(\text{peças tipo B})}} = \text{k}$$

Em um determinado mês, foram produzidas 50 peças do tipo A e 100 peças do tipo B, gerando um custo fixo unitário de R$50. Logo:

$$\frac{50}{\frac{1}{50} \times \frac{1}{100}} = k$$

Suponha que, no mês em que foram produzidas 25 peças do tipo A e 250 peças do tipo B, o custo fixo unitário seja C. Logo:

$$\frac{C}{\frac{1}{25} \times \frac{1}{250}} = k$$

Com as duas igualdades anteriores, podemos escrever:

$$\frac{\mathbf{50}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}} = \frac{\boldsymbol{C}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{250}}} = k$$

$$\mathbf{50 \times 50 \times 100 = \boldsymbol{C} \times 25 \times 250}$$

$$\frac{50 \times 50 \times 100}{25 \times 250} = C$$

$$C = R\$\ 40$$

(SEFAZ BA/2022) Três grandezas L, M e N são tais que L é diretamente proporcional a M, e M é inversamente proporcional a N.

Quando M = 4 e N = 18, tem-se L = 60.

Quando L = 45, o valor de M + N é

a) 25.

b) 26.

c) 27.

d) 28.

e) 29.

Comentários:

Sabemos que a grandeza L é diretamente proporcional à grandeza M. Logo, sendo k_1 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{L}{M} = k_1$$

Além disso, a grandeza M é inversamente proporcional à grandeza N. Logo, sendo k_2 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$MN = k_2$$

Quando $\boldsymbol{M = 4}$ e $\boldsymbol{N = 18}$, tem-se $\boldsymbol{L = 60}$. Logo:

$$\frac{L}{M} = k_1 \rightarrow \frac{60}{4} = k_1 \rightarrow \boldsymbol{k_1 = 15}$$

$$MN = k_2 \rightarrow 4 \times 18 = k_2 \rightarrow \boldsymbol{k_2 = 72}$$

Devemos determinar o valor de $M+N$ para o caso em que $L=45$.

$$\frac{L}{M}=k_1 \rightarrow \frac{\mathbf{45}}{M}=15 \rightarrow M=\frac{45}{15} \rightarrow \boldsymbol{M=3}$$

$$MN=k_2 \rightarrow \mathbf{3}\times N=72 \rightarrow \boldsymbol{N=24}$$

Logo, **para $L=45$**, temos:

$$M+N=3+24$$
$$=27$$

Gabarito: Letra C.

Sequências inversamente proporcionais

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são inversamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}}=\frac{x_2}{\frac{1}{y_2}}=\frac{x_3}{\frac{1}{y_3}}=\cdots=\frac{x_n}{\frac{1}{y_n}}=k$$

Onde **k** é uma constante denominada **constante de proporcionalidade.**

Essa definição equivale a dizer que as sequências são inversamente proporcionais quando:

$$x_1\times y_1=x_2\times y_2=x_3\times y_3=\cdots=k$$

(Pref. Cerquilho/2019) Assinale a alternativa que contém uma tabela apresentando duas grandezas inversamente proporcionais.

a)

Grandeza x	3	4	5	6	7	8
Grandeza y	12	11	10	9	8	7

b)

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	12	11	10	9	8	7

c)

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	16	14	12	10	8	6

d)

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	32	16	8	4	2	1

e)

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	–4	–3	–2	–1	0	1

Comentários:

Para duas sequências serem inversamente proporcionais, a multiplicação das grandezas deve ser sempre igual a uma consante, isto é:

$$x_1\times y_1=x_2\times y_2=x_3\times y_3=\cdots=k$$

Vamos analisar cada alternativa.

A) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	3	4	5	6	7	8
Grandeza y	12	11	10	9	8	7
Produto xy	36	44	50	54	56	56

B) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	12	11	10	9	8	7
Produto xy	96	77	60	45	32	21

C) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	16	14	12	10	8	6
Produto xy	128	98	72	50	32	18

D) O produto dos elementos das duas sequências é constante e igual a 32. **Este é o gabarito**.

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	32	16	8	4	2	1
Produto xy	32	32	32	32	32	32

E) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	-4	-3	-2	-1	0	1
Produto xy	-4	-6	-8	-8	0	32

Gabarito: Letra D.

Aspecto gráfico da proporcionalidade inversa

Se duas grandezas são **inversamente proporcionais**, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui, e quando uma grandeza diminui, a outra aumenta.

Ocorre que essa descrição qualitativa não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas inversamente proporcionais, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **quando uma grandeza aumenta, a outra grandeza diminui na mesma proporção, e quando uma grandeza diminui, a outra grandeza aumenta na mesma proporção.**

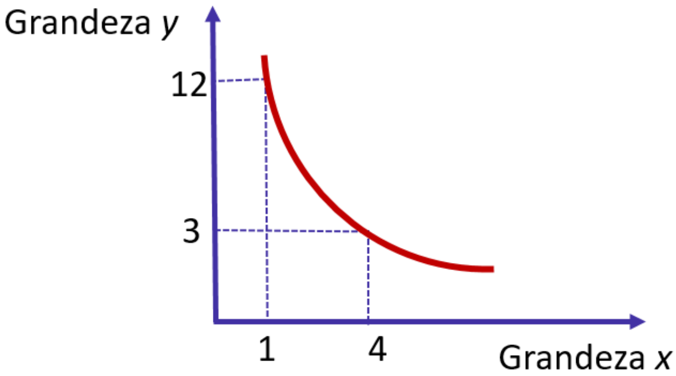
Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve reduzir pela metade. Se a primeira grandeza quintuplicar, a segunda grandeza deve ser dividida por 5. Se a primeira grandeza for dividida por 3, a segunda grandeza deve ser triplicada.

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, graficamente, temos uma curva chamada **hipérbole**.

$$\frac{y}{1/x} = k$$

$$\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$$

(Hipérbole)



Perceba, no exemplo do gráfico, que temos um ponto $(x; y)$ dado pelo par $(1; 12)$. Quando x é multiplicado por 4, o y é dividido por 4, e o novo ponto $(x; y)$ obtido é $(4; 3)$.

(Pref. Campinas/2019) A professora Alice perguntou aos seus alunos o que são grandezas inversamente proporcionais. Analise o diálogo entre um grupo de alunos sobre esse significado:

Júlia:	Analiso a variação de duas grandezas: se uma das grandezas aumenta e a outra diminui, então essas grandezas são necessariamente inversamente proporcionais.
Caio:	Você está errada Júlia, pois há situações em que isso ocorre e as grandezas não são inversamente proporcionais. Essa sua afirmação é necessária, mas não é suficiente para indicar se as grandezas são inversamente proporcionais.
André:	Se uma grandeza aumenta e a outra também aumenta, essas grandezas são diretamente proporcionais e, se uma aumenta e a outra diminui elas são inversamente proporcionais.
Luana:	Eu não analiso esse aspecto de diminuir e aumentar apenas. Se uma grandeza x for inversamente proporcional a y, os produtos dos valores de x pelos correspondentes valores de y são necessariamente iguais.

Considerando as ideias apresentadas pelos quatro estudantes, é correto afirmar que são verdadeiras apenas as argumentações de

a) Júlia e Luana.

b) Júlia e André.

c) Caio e Luana.

d) Caio e André.

e) André e Luana.

Comentários:

Vamos comentar cada ideia apresentada pelos estudantes.

Júlia: O fato de uma das grandezas aumentar enquanto a outra diminui **não necessariamente define que as grandezas são inversamente proporcionais**.

Isso porque é necessário que **uma grandeza diminua na mesma proporção em que a outra aumenta**. Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve reduzir pela metade, por exemplo.

Podemos mostrar o seguinte **contraexemplo** para o argumento de Júlia: considere duas grandezas, dadas por x e y, tais que $y=\frac{1}{x}+1$. Se x for de 2 para 4, y vai de $\frac{3}{2}$ para $\frac{5}{4}$. Veja que, nesse exemplo, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui. Ocorre que, nesse caso, $\boldsymbol{x}$ **dobrou e** $\boldsymbol{y}$ **não diminuiu pela metade**.

Caio: O argumento de caio está correto. Para duas grandezas serem inversamente proporcionais é necessário que, quando uma aumenta, a outra diminui. Ocorre que isso não é suficiente para que as grandezas sejam inversamente proporcionais: é necessário que **uma grandeza diminua na mesma proporção em que a outra aumenta**.

André: André errou pelo mesmo motivo de Júlia, por não especificar a forma em que as grandezas devem aumentar/diminuir.

Nas grandezas diretamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra aumenta **na mesma proporção**. Nas grandezas inversamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui **na mesma proporção**.

Luana: Luana definiu corretamente grandezas inversamente proporcionais: os produtos dos valores das duas grandezas devem ser iguais a uma constante.

$$x_1\times y_1=x_2\times y_2=x_3\times y_3=\cdots=k$$

As argumentações verdadeiras são as do **Caio** e da **Luana**.

Gabarito: Letra C.

Divisão em partes inversamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes inversamente proporcionais** tratam da divisão de uma quantia em partes inversamente proporcionais a alguns números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Divida o número 700 em partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20.

Se as partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = k$$

A soma das partes é 700. Logo, $a + b + c = 700$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}}$, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{700}{\frac{4+2+1}{20}}$$

$$5a = 10b = 20c = \frac{700}{\frac{7}{20}}$$

$$5a = 10b = 20c = 700 \times \frac{20}{7}$$

$$\boxed{5a = 10b = 20c = 2.000}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 2.000.

$$5a = 2.000 \ \rightarrow a = 400$$

$$10b = 2.000 \rightarrow b = 200$$

$$20c = 2.000 \rightarrow c = 100$$

Logo, ao dividir o número 700 em partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20, obtemos, respectivamente, 400, 200 e 100.

As questões de concurso público costumam apresentar uma contextualização. Veja um exemplo.

(BANESTES/2018) Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

Comentários:

Se as quantidades de cédulas de R$10 , R$20 e R$50 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = k$$

A soma do número de cédulas é 272, isto é, $a + b + c = 272$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = \frac{272}{\frac{10+5+2}{100}}$$

$$10a = 20b = 50c = \frac{272}{\frac{17}{100}}$$

$$10a = 20b = 50c = 272 \times \frac{100}{17}$$

$$\boxed{10a = 20b = 50c = 1.600}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.600. O número de cédulas de cada tipo é:

$$10a = 1.600 \ \rightarrow a = 160$$

$$20b = 1.600 \ \rightarrow b = 80$$

$$50c = 1.600 \ \rightarrow c = 32$$

Temos, portanto, 160 cédulas de R$10, 80 cédulas de R$20 e 32 cédulas de R$50. A quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

$$160 \times R\$10 + 80 \times R\$20 + 32 \times R\$\,50$$

$$= R\$\,4.800$$

Gabarito: Letra E.

Grandezas direta e inversamente proporcionais

Quando se apresentam problemas em que uma grandeza A é diretamente proporcional a algumas grandezas e inversamente proporcional a outras grandezas, **devemos transformar tudo para grandezas diretamente proporcionais.**

Se uma grandeza A for diretamente proporcional às grandezas B e C e inversamente proporcional às grandezas D e E, então podemos dizer que **a grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B, C, 1/D e 1/E**. Logo:

$$\frac{(\text{grandeza A})}{(\text{grandeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times \dfrac{1}{(\text{grandeza D})} \times \dfrac{1}{(\text{grandeza E})}} = \mathbf{k}$$

Onde **k** é a constante de proporcionalidade.

Problemas com grandezas direta e inversamente proporcionais

Vamos a um problema.

Em uma fábrica de parafusos, a receita em reais obtida em um mês é diretamente proporcional ao número de parafusos produzidos e inversamente proporcional à cotação do dólar.

Em um determinado mês, foram produzidos 1.000.000 de parafusos e a receita foi de R$ 10.000,00, sendo o dólar cotado a R$ 2,50.

Determine a receita em reais obtida ao se produzir 500.000 parafusos com o dólar cotado a R$ 5,00.

Veja que a grandeza "receita obtida" é diretamente proporcional a grandeza "número de parafusos" e inversamente proporcional à grandeza "cotação do dólar".

$$\frac{(\text{receita obtida})}{(\text{número de parafusos}) \times \dfrac{1}{(\text{cotação do dólar})}} = k$$

Supondo que a receita em reais obtida ao se produzir 500.000 parafusos com o dólar a R$ 5,00 foi x, então:

$$\frac{10.000}{1.000.000 \times \dfrac{1}{2{,}5}} = \frac{x}{500.000 \times \dfrac{1}{5}} = k$$

$$\frac{10.000 \times 2{,}5}{1.000.000} = \frac{x \times 5}{500.000} = k$$

Podemos simplificar a proporção $\frac{10.000 \times 2{,}5}{1.000.000} = \frac{x \times 5}{500.000}$ para depois realizar a "multiplicação cruzada". Simplificando os denominadores de lados diferentes da igualdade por 500.000, temos:

$$\frac{10.000 \ \times 2{,}5}{2} = \frac{x \ \times 5}{1}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", temos:

$$2 \times (x \times 5) = 10.000 \times 2{,}5 \times 1$$

$$10x = 25.000$$

$$x = 2.500$$

Logo, a receita em reais obtida foi de R$ 2.500,00.

Divisão em partes direta e inversamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes direta e inversamente proporcionais** tratam da divisão de uma quantia em partes proporcionais a alguns números e inversamente proporcionais a outros números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Vamos a um exemplo.

Um pai quer dividir a quantia de R$ 15.000 a seus três filhos Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo de modo diretamente proporcional às notas obtidas em uma prova de matemática e de modo inversamente proporcional ao tempo semanal que eles jogam videogame.

Arnaldo obteve 10 em matemática e joga videogame durante 10h por semana.

Bernaldo obteve 8 em matemática e joga videogame durante 2h por semana.

Cernaldo obteve 5 em matemática e joga videogame durante 1h por semana.

Qual foi a quantia em reais que cada filho recebeu?

A quantia foi dividida em partes **diretamente proporcionais à nota obtida em matemática** e **inversamente proporcionais** ao **tempo dispendido com videogame**.

Se Arnaldo recebeu a quantia A, Bernaldo recebeu a quantia B e Cernaldo recebeu a quantia C, temos a seguinte proporção:

$$\frac{A}{\mathbf{10} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}} = \frac{B}{\mathbf{8} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \frac{C}{\mathbf{5} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}} = k$$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = k$$

Temos que a soma das quantias recebidas é R$ 15.000.

$$A + B + C = 15.000$$

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5}$, temos:

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{A + B + C}{1 + 4 + 5}$$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{15.000}{10}$$

$$\boxed{\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = 1.500}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.500.

$$\frac{A}{1} = 1.500 \ \rightarrow A = 1.500$$

$$\frac{B}{4} = 1.500 \ \rightarrow B = 6.000$$

$$\frac{C}{5} = 1.500 \ \rightarrow C = 7.500$$

Logo, Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo receberam, respectivamente, R$ 1.500, R$ 6.000 e R$ 7.500.

QUESTÕES COMENTADAS – FGV

Frações

1.(FGV/PMSP/2024) Um dado número somado com a sua terça parte dá como resultado 228. A soma dos algarismos do número dado é

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

e) 9.

Comentários:

Suponha que o número dado é x. Esse número somado com a sua terça parte dá como resultado 228. Logo:

$$x + \frac{x}{3} = 288$$

$$\frac{3x + x}{3} = 288$$

$$\frac{4x}{3} = 288$$

$$x = \frac{288 \times 3}{4}$$

$$x = \frac{72 \times 3}{1}$$

$$x = 216$$

Portanto, a **soma dos algarismos do número dado** é:

$$2 + 1 + 6 = 9$$

Gabarito: Letra E.

2.(FGV/PMSP/2024) Seja $\frac{p}{q} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{3}{8}$, em que p e q são primos entre si, isto é, a fração está em sua forma irredutível.

O valor de $p + q$ é

a) 0.

b) 11.

c) 77.

d) 85.

e) 163.

Comentários:

Vamos realizar as operações com as frações apresentadas de modo a se obter p e q. Inicialmente, temos:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{3}{8}$$

O **MMC entre 3, 5 e 8** é o produto **3×5×8 = 120**, **pois 3**, **5** e **8 são primos entre si** (**não apresentam fatores primos em comum**). Portanto, demos utilizar 120 como denominador comum:

$$\frac{40+48-45}{120}$$

$$=\frac{43}{120}$$

Note que **a fração obtida é irredutível**, pois **43 é um número primo** e **120 não é divisível por 43**. Logo, p e q são, respectivamente, 43 e 120. Portanto, o valor de $p + q$ é:

$$43 + 120 = 163$$

Gabarito: Letra E.

3.(FGV/ALESC/2024) Um terreno de 1400m^2 foi dividido em três partes e suas áreas são representadas por A, B e C. Sabe-se que B é igual a dois terços de A e que C é igual a cinco sextos de B. A área do menor terreno é igual a

a) 280m^2.

b) 320m^2.

c) 350m^2.

d) 420m^2.

e) 630m^2.

Comentários:

Sabemos que as três partes correspondem ao total do terreno. Logo:

$$A + B + C = 1.400$$

Observe que **C é menor do que B** (5/6 de B) e, além disso, **B é menor do que A** (2/3 de A). Logo, temos a seguinte ordem crescente:

$$C < B < A$$

Portanto, a menor área, que estamos procurando, é C.

Para obter a menor área, vamos escrever A e B em termos de C e substituir na primeira equação.

Sabe-se que **C é igual a cinco sextos de B**. Logo:

$$C = \frac{5}{6}B$$

$$6C = 5B$$

$$\boldsymbol{B = \frac{6C}{5}}$$

Além disso, **B é igual a dois terços de A**. Logo:

$$B = \frac{2A}{3}$$

$$3B = 2A$$

$$\boldsymbol{A = \frac{3}{2} \times B}$$

Como $\boldsymbol{B = \frac{6C}{5}}$, temos:

$$\boldsymbol{A = \frac{3}{2} \times \frac{6C}{5}}$$

$$A = \frac{18C}{10}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{9C}{5}}$$

Agora que temos A e B em termos de C, podemos substituir os valores na primeira equação:

$$A + B + C = 1.400$$

$$\frac{9C}{5} + \frac{6C}{5} + C = 1.400$$

$$\frac{9C + 6C + 5C}{5} = 1.400$$

$$\frac{20C}{5} = 1.400$$

$$4C = 1.400$$

$$C = \frac{1.400}{4}$$

$$C = 350 \text{ m}^2$$

Portanto, **a área do menor terreno é igual a 350 m²**.

Gabarito: Letra C.

4. (FGV/ALEP PR/2024) Uma turma do terceiro ano do ensino médio possui 40 estudantes, dos quais 16 são meninas e 24 são meninos. Uma professora da turma realizou uma enquete para saber se seus estudantes preferiam disciplinas de ciências exatas ou de ciências humanas. Todos os estudantes da turma responderam à enquete indicando uma única dentre essas duas opções.

Do total de meninas da turma, 3/8 disseram preferir ciências humanas e as demais afirmaram preferir ciências exatas. Já do total de meninos, 1/4 responderam que preferem ciências exatas e os demais declararam preferência por ciências humanas.

Segundo essa enquete, assinale a fração do total de estudantes da turma preferem ciências exatas.

a) 1/2.

b) 2/5.

c) 3/5.

d) 5/8.

e) 7/8.

Comentários:

Para resolver a questão, vamos calcular quantos estudantes de cada sexo preferem ciências exatas. Em seguida, vamos encontrar a fração do total de estudantes que preferem ciências exatas.

Como 3/8 das meninas preferem ciências humanas, podemos concluir que as outras **1−3/8 = 5/8 preferem ciências exatas**. Assim, o número de meninas que preferem ciências exatas é:

$$\frac{5}{8} \textbf{ das } (\text{Meninas})$$

$$= \frac{5}{8} \times 16$$

$$= 10$$

Além disso, **1/4 dos meninos preferem ciências exatas**. Assim, o número de meninos que preferem ciências exatas é:

$$\frac{1}{4}\ \textbf{dos}\ (\text{Meninos})$$

$$\frac{1}{4} \times 24$$

$$= 6$$

Portanto, **o número de estudantes que preferem ciências exatas** é:

$$10 + 6 = 16$$

Como o total de estudantes é 40, a fração do total de estudantes que preferem ciências exatas é:

$$\frac{16}{40}$$

Simplificando essa fração por 8, obtemos:

$$\frac{2}{5}$$

Gabarito: Letra B.

5.(FGV/PMERJ/2024) Duas fazendas A e B são vizinhas. Sabe-se que 3⁄4 da área da fazenda A está plantada com soja e que 2⁄5 da área da fazenda B está plantada com soja. Sabe-se ainda que a área da fazenda B é uma vez e meia a área da fazenda A.

A fração da área total das duas fazendas que está plantada com soja é:

a) $\frac{8}{15}$

b) $\frac{13}{20}$

c) $\frac{14}{25}$

d) $\frac{33}{40}$

e) $\frac{27}{50}$

Comentários:

Considere que a **é área da fazenda A** e b **a área da fazenda B**. Como **a área da fazenda B é uma vez e meia a área da fazenda A**, temos:

$$b = 1{,}5a$$

Segundo o problema:

- A área plantada com soja na fazenda A é $\frac{3}{4}$ **de** a, ou seja, $\frac{3}{4} \times a = \mathbf{\frac{3a}{4}}$.
- A área plantada com soja na fazenda B é $\frac{2}{5}$ **de** b, ou seja, $\frac{2}{5} \times b = \mathbf{\frac{2b}{5}}$.

A **área total das duas fazendas** é $\boldsymbol{a + b}$, e a **área total plantada com soja é** $\mathbf{\frac{3a}{4} + \frac{2b}{5}}$. Logo, fração da área total das duas fazendas que está plantada com soja é:

$$\frac{\frac{3a}{4} + \frac{2b}{5}}{a + b}$$

Substituindo b por $1{,}5a$, temos:

$$\frac{\frac{3a}{4} + \frac{2 \times 1{,}5a}{5}}{a + 1{,}5a}$$

$$= \frac{\frac{3a}{4} + \frac{3a}{5}}{2{,}5a}$$

$$= \frac{\frac{15a + 12a}{20}}{2{,}5a}$$

$$= \frac{\frac{27a}{20}}{2{,}5a}$$

Para realizar a divisão entre $\frac{27a}{20}$ e $2{,}5a$, inverte-se $2{,}5a$ e multiplica-se $\frac{27a}{20}$ por esse valor invertido:

$$\frac{27a}{20} \times \frac{1}{2{,}5a}$$

$$= \frac{27a}{50a}$$

Simplificando a no numerador e no denominador, temos:

$$\frac{27}{50}$$

Gabarito: Letra E.

6.(FGV/TRT-PB/2022)

$$a = \frac{5}{6}, b = \frac{7}{9}, c = \frac{13}{18}$$

Colocando essas frações em ordem crescente a sequência correta é

a) $a < b < c$.

b) $b < a < c$.

c) $b < c < a$.

d) $c < a < b$.

e) $c < b < a$.

Comentários:

Para comparar frações, devemos encontrar **frações equivalentes** que apresentem o mesmo denominador. O denominador comum será o **MMC** entre **6**, **9** e **18**.

Como **18** é múltiplo de **6** e de **9**, **o MMC entre os números é o próprio 18**.

As frações equivalentes a $\boldsymbol{a} = \frac{5}{6}$, $\boldsymbol{b} = \frac{7}{9}$, $\boldsymbol{c} = \frac{13}{18}$ com o denominador **18** são:

$$a = \frac{5}{6} = \frac{(18 \div 6) \times 5}{18} = \frac{15}{18}$$

$$b = \frac{7}{9} = \frac{(18 \div 9) \times 7}{18} = \frac{14}{18}$$

$$c = \frac{13}{18}$$

A ordem crescente entre as frações com o denominador 18 é $\frac{13}{18} < \frac{14}{18} < \frac{15}{18}$. Logo, a ordem crescente das frações do problema é $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$.

Gabarito: Letra E.

7.(FGV/PM SP/2022) Considere os produtos:

$$S = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2022}\right)$$

$$D = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2022}\right)$$

O produto SD é igual a

a) 2023/2022.

b) 2023/4044.

c) 2022/2023.

d) 4044/2023.

e) 1.

Comentários:

Primeiramente, vamos calcular o valor de S:

$$S=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2022}\right)$$
$$S=\left(\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3+1}{3}\right)\left(\frac{4+1}{4}\right)\left(\frac{5+1}{5}\right)\dots\left(\frac{2022+1}{2022}\right)$$
$$S=\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right)\left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}\right)\dots\left(\frac{\mathbf{2023}}{\mathbf{2022}}\right)$$

Simplificado o numerador de uma fração com o denominador da fração seguinte, ficam restando apenas o **denominador da primeira fração** e o **numerador da última fração**. Logo:

$$S=\frac{\mathbf{2023}}{\mathbf{2}}$$

Vamos agora calcular o valor de D:

$$D=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2022}\right)$$
$$D=\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{3-1}{3}\right)\left(\frac{4-1}{4}\right)\left(\frac{5-1}{5}\right)\dots\left(\frac{2022-1}{2022}\right)$$
$$D=\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right)\dots\left(\frac{\mathbf{2021}}{\mathbf{2022}}\right)$$

Simplificado o denominador de uma fração com o numerador da fração seguinte, ficam restando apenas o **numerador da primeira fração** e o **denominador da última fração**. Logo:

$$D=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2022}}$$

Logo, o produto SD é igual a:

$$SD=\frac{\mathbf{2023}}{\mathbf{2}}\times\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2022}}$$
$$SD=\frac{2023}{4044}$$

Gabarito: Letra B.

8.(FGV/CBM-RJ/2022) João recebeu certa quantia. Com a terça parte da quantia, pagou os gastos com o cartão de crédito, e pagou o aluguel com a quinta parte do restante.

Da quantia recebida, a fração que representa a parte que João ainda tem disponível é

a) 2/5

b) 3/5

c) 7/15

d) 8/15

e) 17/30

Comentários:

Considere que João recebeu originalmente uma quantia X.

Com a terça parte da quantia $\left(\frac{1}{3}X\right)$, João pagou gastos com o cartão de crédito. O valor restante após esse pagamento é:

$$X - \frac{1}{3}X = \frac{3X - X}{3} = \frac{2}{3}X$$

Com a quinta parte do restante, isto é, com $\frac{1}{5}$ **de** $\frac{2}{3}X$, João pagou o aluguel.

A fração complementar de $\frac{1}{5}$ é:

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$$

Portanto, após esse novo pagamento, restou $\frac{4}{5}$ **de** $\frac{2}{3}X$:

$$\frac{4}{5} \text{ de } \frac{2}{3}X$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}X$$

$$= \frac{8}{15}X$$

Veja que, após os pagamentos, **restou** $\frac{8}{15}$ de X, isto é, $\frac{8}{15}$ **da quantia original**. Logo, da quantia recebida, a fração que representa a parte que João ainda tem disponível é $\frac{8}{15}$.

Gabarito: Letra D.

9.(FGV/CM Taubaté/2022) Marlene gasta 1/4 do seu salário com aluguel e, do que sobra, ela gasta 1/3 com alimentação. Após pagar o aluguel e a alimentação, a fração do salário de Marlene que sobra para as outras despesas é:

a) 5/7.

b) 5/12.

c) 1/2.

d) 2/7.

e) 2/5.

Comentários:

Considere que o salário de Marlene seja S.

"Marlene gasta 1/4 do seu salário com aluguel..."

Portanto, o total gasto com aluguel é:

$$\text{Aluguel} = \frac{1}{4} \text{de S}$$

$$\text{Aluguel} = \frac{1}{4} \times \text{S}$$

$$\text{Aluguel} = \frac{1}{4}\text{S}$$

"...e, do que sobra, ela gasta 1/3 com alimentação."

O valor restante após o gasto com aluguel é:

$$\text{Restante}_{\substack{\text{Após}\\\text{Aluguel}}} = \text{Salário} - \text{Aluguel}$$

$$\text{Restante}_{\substack{\text{Após}\\\text{Aluguel}}} = S - \frac{1}{4}S$$

$$\text{Restante}_{\substack{\text{Após}\\\text{Aluguel}}} = \frac{4S - S}{4}$$

$$\text{Restante}_{\substack{\text{Após}\\\text{Aluguel}}} = \frac{3}{4}S$$

Desse valor restante, é 1/3 é gasto com alimentação. Logo, o valor gasto com alimentação é:

$$\text{Alimentação} = \frac{1}{3} \text{ de} \frac{3}{4} S$$

$$\text{Alimentação} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} S$$

$$\text{Alimentação} = \frac{1}{4} S$$

"Após pagar o aluguel e a alimentação, a fração do salário de Marlene que sobra para as outras despesas é..."

O valor que sobra após pagar o aluguel e a alimentação é:

$$\text{Salário} - \text{Aluguel} - \text{Alimentação}$$

$$S - \frac{1}{4} S - \frac{1}{4} S$$

$$= \frac{4S - 1S - 1S}{4}$$

$$= \frac{2S}{4}$$

$$= \frac{1}{2} S$$

Logo, a fração do salário que sobra para as outras despesas é 1/2.

Gabarito: Letra C.

10.(FGV/CM Taubaté/2022) Benedito determinou em testamento que a quantia que estava na sua poupança fosse dividida entre seus 4 filhos, em ordem decrescente de idade, da seguinte forma: 1/3 para o primeiro, 1/4 para o segundo, 1/5 para o terceiro e 1/6 para o quarto. Determinou ainda que a quantia restante fosse dada ao advogado que cuidou da questão.

A fração do total que o advogado recebeu foi

a) 1/10.

b) 1/12.

c) 1/15.

d) 1/18.

e) 1/20.

Comentários:

A **fração que corresponde ao total distribuído aos quatro filhos** é dada pela seguinte soma:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$$

O Mínimo Múltiplo Comum entre 3, 4, 5 e 6 é 60. Logo, temos a seguinte soma:

$$\frac{20+15+12+10}{60}$$

$$=\frac{57}{60}$$

Ao simplificar o numerador e o denominador por 3, temos:

$$\mathbf{\frac{19}{20}}$$

Como **o que restou foi dado ao advogado**, **a fração do total que o advogado recebeu** corresponde à **fração complementar**:

$$1-\frac{19}{20}$$

$$=\frac{20-19}{20}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{20}}$$

Gabarito: Letra E.

11.(FGV/PM SP/2022) Em uma caixa há várias bolas, cada uma de uma cor. As cores das bolas são: vermelho, azul, verde e rosa. Há, pelo menos, uma bola de cada cor.

Um terço das bolas são vermelhas, um quinto são azuis e 10 bolas são verdes.

O número mínimo de bolas rosas na caixa é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Comentários:

Considere que o total de bolas seja T. Temos as seguintes informações do enunciado:

- **Um terço das bolas são vermelhas**. Logo, o número de bolas vermelhas é $\boldsymbol{\frac{1}{3}T}$**;**
- **Um terço das bolas são azuis**. Logo, o número de bolas azuis é $\boldsymbol{\frac{1}{5}T}$;
- **10 bolas são verdes**.

Considere também que o número de bolas rosas seja R. Devemos encontrar o valor mínimo para R.

Note que a soma de todas as bolas é igual a T. Logo:

$$\frac{1}{3}T + \frac{1}{5}T + 10 + R = T$$

$$R = T - \frac{1}{3}T - \frac{1}{5}T - 10$$

$$R = \frac{15T - 5T - 3T}{15} - 10$$

$$R = \frac{7}{15}T - 10$$

$$\boldsymbol{R = 7 \times \frac{T}{15} - 10}$$

Sabemos que o número de bolas rosas deve ser um **valor <u>inteiro</u> <u>positivo</u> e <u>diferente de zero</u>** (pois há pelo menos uma bola rosa)**.** Como queremos o valor mínimo para o número de rosas, devemos minimizar $\frac{T}{15}$ respeitando essas restrições.

Veja que, se $\frac{T}{15}$ for igual a 1, isto é, se $T = 15$, teremos um número negativo de bolas rosas.

$$R = 7 \times 1 - 10$$

$$R = -3$$

Por outro lado, se $\frac{T}{15}$ for igual a 2, isto é, se $T = 30$, teremos:

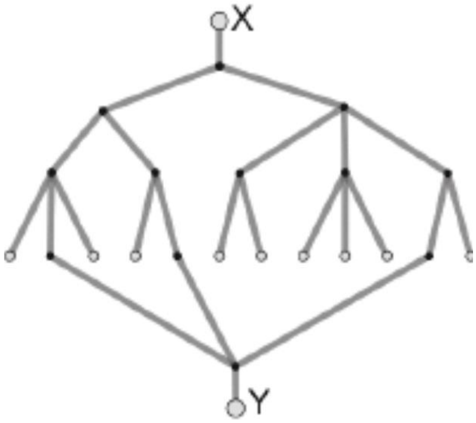
$$R = 7 \times 2 - 10$$

$$R = 4$$

Portanto, **o número mínimo de bolas rosas na caixa é 4**.

Gabarito: Letra D.

12. (FGV/SEFAZ ES/2022) A figura a seguir mostra uma rede de canos de água em um plano vertical. Qualquer quantidade de água colocada na abertura X desce e divide-se em partes iguais em cada um dos pontos de divisão. Os pontos brancos no final de cada percurso são saídas.



A fração da quantidade de água que, colocada em X, sai por Y é

a) 1/3.

b) 3/8.

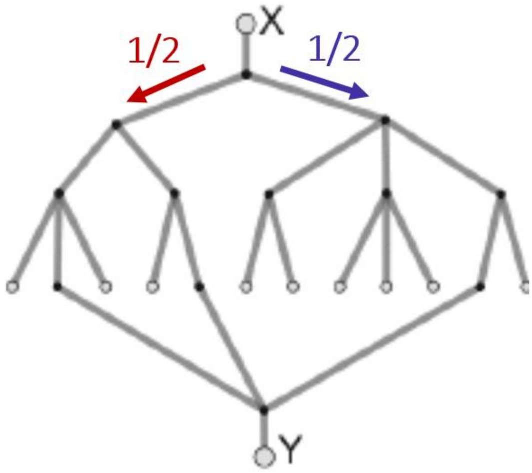
c) 5/12.

d) 5/24.

e) 7/24.

Comentários:

Em cada um dos pontos de divisão, **a água é dividida em partes iguais**. Inicialmente, a água é dividida em duas: **metade da água vai para a esquerda** e a **outra metade vai para a direita**.



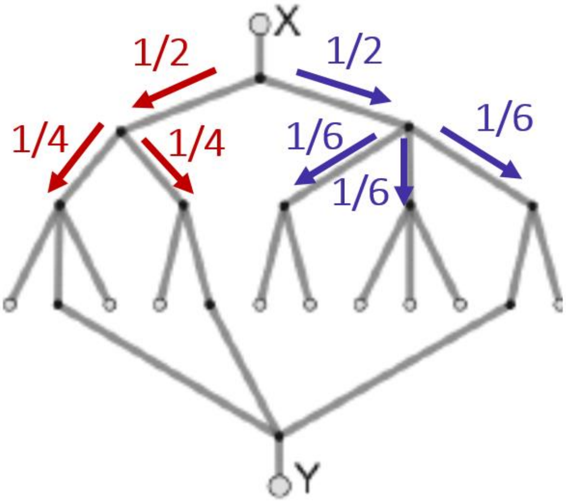
Na sequência, a **água que corre pela esquerda** é dividida em **duas partes**. Temos, portanto, **metade** $\left(\frac{1}{2}\right)$ **da metade** $\left(\frac{1}{2}\right)$ **da quantidade de água original em cada novo ramo**. Isto é, temos:

$$\frac{1}{2}\ \textbf{de}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Além disso, a **água que corre pela direita** é dividida em **três partes**. Temos, portanto, **um terço** $\left(\frac{1}{3}\right)$ **da metade** $\left(\frac{1}{2}\right)$ **da quantidade de água original em cada novo ramo**. Isto é, temos:

$$\frac{1}{3}\ \textbf{de}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Ficamos com a seguinte representação:



A partir de agora, vamos analisar a quantidade de água que sai por Y por meio do **fluxo da esquerda**, para depois analisar a quantidade de água que sai por Y por meio do **fluxo da direita.**

Fluxo da esquerda

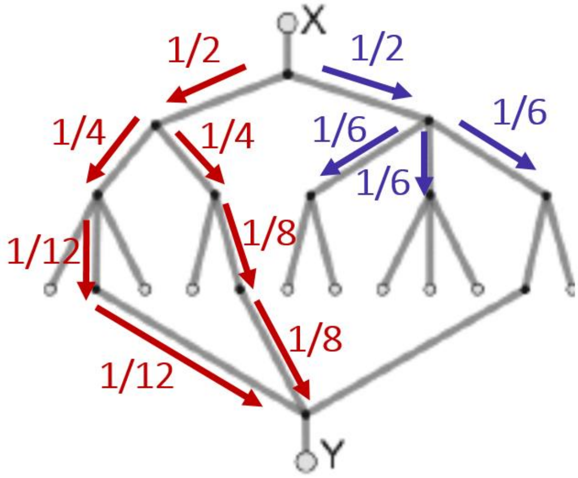
Na esquerda, temos dois fluxos de água que correspondem a $\frac{1}{4}$ do original.

Do primeiro fluxo, apenas $\frac{1}{3}$ é a aproveitado em Y:

$$\frac{1}{3}\ \textbf{de}\ \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Do segundo fluxo, apenas $\frac{1}{2}$ é aproveitado em Y:

$$\frac{1}{2}\ \textbf{de}\ \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$



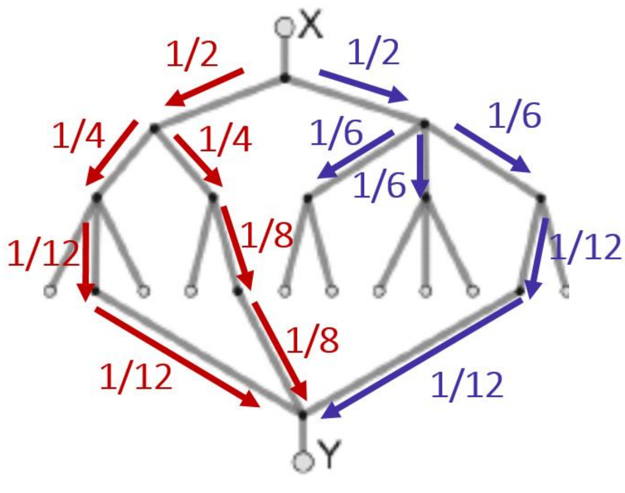
Fluxo da direita

Na direita, temos três fluxos que correspondem a $\frac{1}{6}$ do original.

Do primeiro e do segundo fluxo, nada é aproveitado em Y.

Do terceiro fluxo, apenas $\frac{1}{2}$ é aproveitado em Y:

$$\frac{1}{2}\ \mathbf{de}\ \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$



Total de água que sai por Y

A partir da figura anterior, temos que o total de água que sai por Y é:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}$$

$$= 2 \times \frac{1}{12} + \frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{4+3}{24}$$

$$=\frac{7}{24}$$

Gabarito: Letra E.

13. (FGV/PC RJ/2022) Considere a soma

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}+\frac{7}{10}=\frac{a}{b}$$

sendo os números naturais a e b primos entre si.

O valor da soma $a+b$ é:

a) 35;

b) 47;

c) 181;

d) 227;

e) 269.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma das frações do lado esquerdo da equação.

Para realizar a soma, devemos escrever as frações em um denominador comum. O menor denominador comum possível para realizar a soma é o **MMC entre 6, 8 e 10**. Decompondo esses números em fatores primos, temos:

$$6=2\times 3$$
$$8=2^3$$
$$10=2\times 5$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$6=2\times 3$

$8=2^3$

$10=2\quad\times 5$

Logo, $\mathrm{MMC}(6;8;10)=2^3\times 3\times 5=\mathbf{120}$.

Portanto:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}+\frac{7}{10}$$

$$=\frac{(120\div\ 6)\times 1}{\mathbf{120}}+\frac{(120\div\ 8)\times 3}{\mathbf{120}}+\frac{(120\div\ 10)\times 7}{\mathbf{120}}$$

$$=\frac{20}{120}+\frac{45}{120}+\frac{84}{120}$$

$$=\frac{20+45+84}{120}$$

$$=\frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$$

Temos que $\frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$ **é igual a** $\frac{a}{b}$, **sendo a e b primos entre si**.

Dois números são primos entre si quando não apresentam fatores primos em comum. Em outras palavras, sendo os números a e b primos entre si, temos que $\frac{a}{b}$ é uma fração em que não se pode simplificar o numerador com o denominador. Consequentemente, $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível. Devemos, portanto, obter a fração irredutível relacionada a $\frac{149}{120}$.

Veja que:

$$120=10\times 12$$

$$=(2\times 5)\times(3\times 4)$$

$$=(2\times 5)\times(3\times 2^2)$$

$$=2^3\times 3\times 5$$

Isso significa que **o número 120 apresenta os fatores primos 2, 3 e 5**. Ao tentar dividir 149 por 2, 3 e 5, percebe-se que sempre temos um resto. Isso significa que 120 e 149 não apresentam fatores primos em comum. Assim, 149 e 120 são primos entre si. Consequentemente, a fração irredutível $\frac{a}{b}$ é $\frac{149}{120}$. Logo:

$$a=149$$

$$b=120$$

Portanto:

$$a+b=149+120$$

$$=269$$

Gabarito: Letra E.

14. (FGV/PC AM/2022) Geraldo resolveu se desfazer de sua coleção de miniaturas. Assim, ele deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson; das que sobraram, ele deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson e as 48 restantes ele deu para sua irmã Glória.

O número de miniaturas que Gilson recebeu foi

a) 12.

b) 16.

c) 18.

d) 24.

e) 48.

Comentários:

Considere que o total de miniaturas de Geraldo seja M.

"...ele (Geraldo) deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson..."

Note que o total de miniaturas que ficou com Gerson é:

$$(\text{Miniaturas Gerson}) = \frac{2}{5}\text{ de } M = \frac{2}{5} \times M = \frac{2}{5}M$$

"...das que sobraram, ele (Geraldo) deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson..."

Após a distribuição para Gerson, o total de miniaturas que sobraram foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson})$$

$$= M - \frac{2}{5}M$$

$$= \frac{5M - 2M}{5}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{5}M}$$

<u>Desse total que restou</u>, $\frac{1}{3}$ ficou com o Gilson. Logo, o número de miniaturas que ficaram com Gilson foi:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{3}\text{de}\,\boldsymbol{\frac{3}{5}M} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}M = \frac{1}{5}M$$

"...e as 48 restantes ele (Geraldo) deu para sua irmã Glória..."

O número de miniaturas que restou para Glória foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson}) - (\text{Miniaturas Gilson})$$

$$M - \frac{2}{5}M - \frac{1}{5}M$$

$$= \frac{5M - 2M - 1M}{5}$$

$$= \frac{2}{5}M$$

Esse número de miniaturas corresponde a 48. Logo:

$$\frac{2}{5}M = 48$$

$$M = \frac{48 \times 5}{2}$$

$$M = 120$$

Portanto, **o total de miniaturas é 120**. Queremos obter o número de miniaturas que ficaram com Gilson:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{5}M$$

$$= \frac{1}{5} \times 120$$

$$\mathbf{= 24}$$

Gabarito: Letra D.

15. (FGV/SSP AM/2022) Os alunos de uma turma estavam se preparando para um concurso. Constatou-se que: a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC, a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM, e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol.

O número de alunos dessa turma que torcem pelo Manaus FC é

a) 21.

b) 25.

c) 26.

d) 28.

e) 35.

Comentários:

Considere que o total de alunos da turma seja A.

"...a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Manaus FC é:

$$(\text{Manaus FC}) = \frac{1}{3}\,\textbf{de}\text{ A} = \frac{1}{3} \times \text{A} = \frac{1}{3}\text{A}$$

"...a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Nacional-AM é:

$$(\text{Nacional} - \text{AM}) = \frac{1}{4}\,\textbf{de}\text{ A} = \frac{1}{4} \times \text{A} = \frac{1}{4}\text{A}$$

"...e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol."

O numero de alunos restantes é:

$$(\text{Total de alunos}) - (\text{Manaus FC}) - (\text{Nacional-AM})$$

$$A - \frac{1}{3}A - \frac{1}{4}A$$

$$= \frac{12A - 4A - 3A}{12}$$

$$= \frac{5A}{12}$$

Esse número de alunos corresponde a 35. Logo:

$$\frac{5A}{12} = 35$$

$$A = 35 \times \frac{12}{5}$$

$$A = 84$$

Portanto, **o total de alunos é 84**. Queremos obter o número de alunos que torcem pelo Manaus FC:

$$(\text{Manaus FC}) = \frac{1}{3}A$$

$$= \frac{1}{3} \times 84$$

$$= 28$$

Gabarito: Letra D.

16.(FGV/Pref. Angra/2019) Se a soma das frações 1/4 + 2/5 é igual a n/100, o valor de n é

a) 55.

b) 65.

c) 75.

d) 85.

e) 95.

Comentários:

Note que a questão pede, como resultado da soma, uma fração com denominador 100. Podemos transformar as frações 1/4 e 2/5 em frações com denominador 100. Temos que:

$$\frac{1}{4} = \frac{(100 \div 4) \times 1}{100} = \frac{25 \times 1}{100} = \frac{25}{100}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{(100 \div 5) \times 2}{100} = \frac{20 \times 2}{100} = \frac{40}{100}$$

Portanto:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{25}{100} + \frac{40}{100}$$

$$= \frac{65}{100}$$

Logo, o valor de **n** é **65**.

Gabarito: Letra B.

17. (FGV/Pref. Boa Vista/2018) O piso do pátio da escola será pintado com tinta antiderrapante. Na quinta-feira os operários realizaram a quarta parte do trabalho e, na sexta-feira, pintaram a terça parte do restante.

A fração do trabalho que ficou para a semana seguinte foi:

a) 1/2;

b) 1/3;

c) 2/3;

d) 3/4;

e) 5/6.

Comentários:

Vamos resolver a questão passo a passo.

"Na quinta-feira os operários realizaram a quarta parte do trabalho..."

Note que, **na quinta-feira, $\frac{1}{4}$ do trabalho foi realizado**. Nesse caso, a **fração complementar a $\frac{1}{4}$** corresponde ao **trabalho não realizado**:

$$1-\frac{1}{4}=\frac{4-1}{4}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\ \textbf{do trabalho}$$

"...e, na sexta-feira, pintaram a terça parte do restante."

Isso significa que, **na sexta-feira, foi realizado**:

$$\frac{1}{3}\ \text{do}\ (\text{Restante})$$

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\ \text{do trabalho}\right)$$

$$\frac{1}{4}\ \text{do trabalho}$$

Observe, portanto, que $\frac{1}{4}$ do trabalho foi realizado da quinta-feira e mais $\frac{1}{4}$ do trabalho foi realizado na sexta-feira. Isso significa que, até o momento, foi realizado:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ \text{do trabalho}$$

Como até o momento foi realizado $\frac{1}{2}$ do trabalho, a **fração do trabalho que ficou para a semana seguinte** corresponde à **fração complementar a $\frac{1}{2}$**, que corresponde a $\frac{1}{2}$:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}\ \text{do trabalho}$$

Gabarito: Letra A.

18.(FGV/ALERO/2018) João recebeu seu salário e fez três gastos sucessivos. Primeiro, gastou a terça parte do que recebeu, depois gastou a quarta parte do restante e, em seguida, gastou dois quintos do restante. A quantia que restou do salário de João é representada pela fração

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{3}{10}$

Comentários:

Suponha que João recebeu um salário S.

"Primeiro, gastou a terça parte do que recebeu,..."

O **valor gasto** foi de:

$$\frac{1}{3}\text{ de S} = \boldsymbol{\frac{1}{3}S}$$

"...depois gastou a quarta parte do restante e,..."

Após gastar a primeira vez, restou:

$$S - \frac{1}{3}S = \frac{3-1}{3}S = \frac{2}{3}S$$

Ao gastar a quarta parte do que restou, ele **gastou**:

$$\frac{1}{4}\ \textbf{de}\ \frac{2}{3}S$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}S$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}S}$$

"...em seguida, gastou dois quintos do restante."

O total gasto até o momento foi:

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}S} + \boldsymbol{\frac{1}{6}S} = \frac{2+1}{6}S = \frac{3}{6}S = \boldsymbol{\frac{1}{2}S}$$

O valor que restou até o momento foi:

$$S - \boldsymbol{\frac{1}{2}S} = \frac{2-1}{2}S = \frac{1}{2}S$$

Ao gastar 2/5 do restante, ele **gastou**:

$$\frac{2}{5}\ \mathbf{de}\ \frac{1}{2}S$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}S$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{S}$$

"A quantia que restou do salário de João é representada pela fração..."

Note que o total gasto até o momento é:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{S} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{S} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{S}$$

$$= \frac{10+5+6}{30}S$$

$$= \frac{21}{30}S = \frac{7}{10}S$$

A quantia que restou é dada por:

$$S - \frac{7}{10}S = \frac{10-7}{10}S = \frac{3}{10}S$$

Portanto, **restou $\frac{3}{10}$ do salário.**

Gabarito: Letra E.

19. (FGV/Pref. Salvador/2017) Uma piscina infantil contém 1000 litros de água. Devido a um pequeno vazamento, a cada dia, um décimo da quantidade de água existente na piscina no início do dia é perdido. Se nenhuma água adicional é retirada ou colocada na piscina, ao fim de três dias, o volume de água na piscina será de

a) 700 litros.

b) 710 litros.

c) 729 litros.

d) 732 litros.

e) 744 litros.

Comentários:

Inicialmente, um total de 1.000 litros de água.

Primeiro dia

No **primeiro dia**, $\frac{1}{10}$ **de 1.000 litros** foi perdido.

$$\text{Quantidade perdida} = \frac{1}{10} \times 1.000\ l = 100\ l$$

Logo, o volume de água que restou após o primeiro dia é:

$$1.000\ l - 100\ l = 900\ l$$

Segundo dia

No **segundo dia**, $\frac{1}{10}$ **de 900 litros** foi perdido.

$$\text{Quantidade perdida} = \frac{1}{10} \times 900\ l = 90\ l$$

Logo, o volume de água que restou após o segundo dia é:

$$900\ l - 90\ l = 810\ l$$

Terceiro dia

No **segundo dia**, $\frac{1}{10}$ **de 810 litros** foi perdido.

$$\text{Quantidade perdida} = \frac{1}{10} \times 810\ l = 81\ l$$

Logo, o volume de água que restou após o terceiro dia é:

$$810\ l - 81\ l = 729\ l$$

Portanto, **restaram 729 litros ao fim de três dias**.

Gabarito: Letra C.

20.(FGV/IBGE/2017) Em certo concurso inscreveram-se 192 pessoas, sendo a terça parte, homens. Desses, apenas a quarta parte passou.

O número de homens que passaram no concurso foi:

a) 12;

b) 15;

c) 16;

d) 18;

e) 20.

Comentários:

A terça parte dos inscritos no concurso são homens. Logo, o total de homens inscritos é:

$$\frac{1}{3}\ \textbf{de}\ 192$$

$$= \frac{1}{3} \times 192$$

$$= 64$$

Da totalidade dos homens, apenas a quarta parte passou. Logo, o número de homens que passaram no concurso foi:

$$\frac{1}{4}\ \textbf{de}\ 64$$

$$= \frac{1}{4} \times 64$$

$$= 16$$

Gabarito: Letra C.

21.(FGV/IBGE/2016) Um segmento de reta de comprimento C é dividido em cinco partes iguais, e a segunda e a quarta partes são retiradas. A seguir, cada uma das partes restantes é também dividida em cinco partes iguais, e as segundas e as quartas partes são retiradas. A soma dos comprimentos das partes restantes é:

a) $\frac{9C}{25}$;

b) $\frac{8C}{25}$;

c) $\frac{6C}{25}$;

d) $\frac{4C}{25}$;

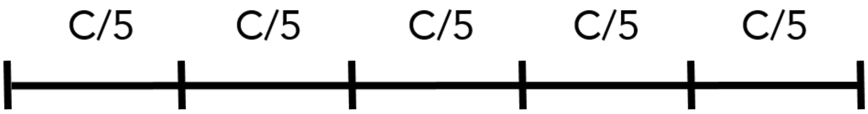
e) $\frac{3C}{25}$;

Comentários:

Vamos representar o passo a passo do enunciado.

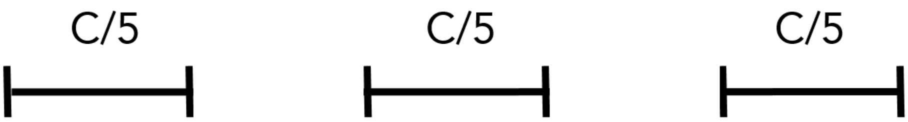
"Um segmento de reta de comprimento C é dividido em cinco partes iguais..."

Cada uma das cinco partes apresenta o comprimento de $\frac{C}{5}$.



"...e a segunda e a quarta partes são retiradas."

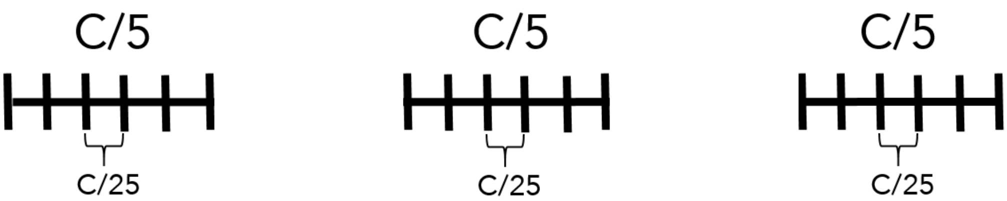
Vamos retirar a segunda e a quarta parte. Note que ficamos com 3 segmentos de comprimento $\frac{C}{5}$.



"...A seguir, cada uma das partes restantes é também dividida em cinco partes iguais"

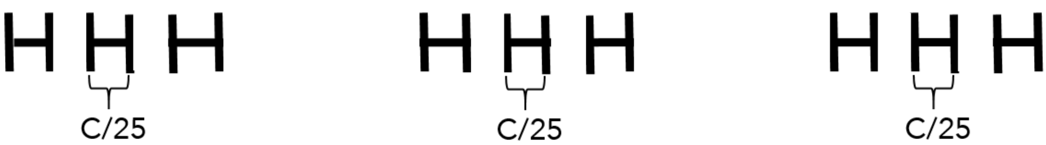
Cada parte de comprimento $\frac{C}{5}$ é dividida em 5 partes iguais. Cada uma dessas partes menores apresenta comprimento de:

$$\frac{1}{5}\ \textbf{de}\ \frac{\mathrm{C}}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{C}{5} = \frac{C}{25}$$



"...e as segundas e as quartas partes são retiradas."

Vamos retirar as segundas e as quartas partes.



Note que restaram 9 segmentos de comprimento $\frac{C}{25}$. Logo, a soma dos comprimentos das partes restantes é:

$$9 \times \frac{C}{25} = \frac{9C}{25}$$

Gabarito: Letra A.

22. (FGV/TJ PI/2015) Francisco vendeu seu carro e, do valor recebido, usou a quarta parte para pagar dívidas, ficando então com R$ 21.600,00. Francisco vendeu seu carro por:

a) R$ 27.600,00;

b) R$ 28.400,00;

c) R$ 28.800,00;

d) R$ 29.200,00;

e) R$ 29.400,00.

Comentários:

Considere que o valor pelo qual Francisco vendeu o seu carro seja V. **Devemos determinar esse valor**.

Note que Francisco, depois usar a quarta parte do valor para pagar dívidas, ficou com:

$$V - \frac{1}{4}V$$

$$= \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}V$$

Esse valor restante corresponde a R$ 21.600,00. Logo:

$$\frac{3}{4}V = 21.600$$

$$V = \frac{4}{3} \times 21.600$$

$$\boldsymbol{V = 28.800}$$

Portanto, Francisco vendeu seu carro por **R$ 28.800,00**.

Gabarito: Letra C.

23. (FGV/TJ PI/2015) Em uma determinada empresa, metade de seus funcionários vai para casa de ônibus, um quinto vai de carro, um oitavo vai de bicicleta e os demais vão a pé.

A fração dos funcionários que vai para casa a pé equivale a:

a) $\frac{4}{5}$;

b) $\frac{3}{15}$;

c) $\frac{7}{15}$;

d) $\frac{3}{40}$;

e) $\frac{7}{40}$;

Comentários:

Considere que o total de funcionários é T.

O total de **funcionários que não vão a pé** corresponde à soma dos funcionários que vão de ônibus $\left(\frac{1}{2}T\right)$, carro $\left(\frac{1}{5}T\right)$ e bicicleta $\left(\frac{1}{8}\ T\right)$:

$$\frac{1}{2}T + \frac{1}{5}T + \frac{1}{8}T$$

$$= \frac{20T + 8T + 5T}{40} = \boldsymbol{\frac{33}{40}T}$$

Os demais funcionários vão a pé. Logo, a **quantidade de funcionários que vai a pé**:

$$(\text{Total de funcionários}) - (\text{Funcionários que não vão a pé})$$

$$T - \boldsymbol{\frac{33}{40}T}$$

$$= \frac{40T - 33T}{40}$$

$$= \boldsymbol{\frac{7}{40}T}$$

Portanto, a fração dos funcionários que vai para casa a pé equivale a $\frac{7}{40}$.

Gabarito: Letra E.

24. (FGV/SEDUC AM/2014) Se $\frac{3}{5}$ de uma dúzia de bananas vale tanto quanto quatro maçãs, então $\frac{1}{3}$ de cinco maçãs vale tanto quanto

a) uma banana.

b) duas bananas.

c) três bananas.

d) quatro bananas.

e) cinco bananas.

Comentários:

Considere que o **valor** de **uma banana** é $\boldsymbol{B}$ e o **valor** de **uma maçã** é $\boldsymbol{M}$.

O enunciado nos diz que $\frac{3}{5}$ **de uma dúzia** de bananas vale tanto quanto **quatro** maçãs.

Isso significa que o valor de $\frac{3}{5}$ **de 12 bananas** é igual ao valor de **4 maçãs**. Podemos modelar essa afirmação como:

$$\frac{3}{5}\ \textbf{de}\ 12\ \text{B} = 4M$$

$$\frac{3}{5} \times 12B = 4M$$

$$\frac{36}{5}B = 4M$$

$$M = \frac{1}{4} \times \frac{36}{5}B$$

$$\boldsymbol{M = \frac{9}{5}B}$$

A pergunta quer saber quanto vale $\frac{1}{3}$ **de cinco maçãs** em termos de bananas.

Em outras palavras, **a questão quer saber quanto vale** $\frac{1}{3} \times 5M = \frac{5}{3}M$ em termos de bananas.

Para obter a resposta, multiplicamos a equação anterior por $\frac{5}{3}$.

$$\boldsymbol{M = \frac{9}{5}B}$$

$$\frac{5}{3} \times \boldsymbol{M} = \frac{5}{3} \times \boldsymbol{\frac{9}{5}B}$$

$$\boldsymbol{\frac{5}{3}M = 3B}$$

Logo, $\frac{1}{3}$ de cinco maçãs vale tanto quanto 3 bananas.

Gabarito: Letra C.

QUESTÕES COMENTADAS – FGV

Razão e proporção

1.(FGV/TCE PA/2024) Na cidade de Belém, o Bosque Rodrigues Alves tem a forma de um retângulo.

Em um mapa na escala 1:20.000 esse retângulo possui lados medindo 2,5cm e 1,6cm.

A área do Bosque em metros quadrados é

a) 4.000.

b) 16.000.

c) 40.000.

d) 160.000.

e) 400.000.

Comentários:

Pessoal, essa questão é interdisciplinar, pois envolve conhecimentos não só de **Razão e Proporção**, como também de **Unidades de Medida** (transformação de **cm** para **m**) e de **Geometria Plana** (cálculo da área de um retângulo).

Inicialmente, **vamos obter as medidas reais correspondentes aos lados do retângulo**.

A **escala** é um tipo específico de razão. Trata-se da razão entre uma **medida representada** em um desenho e a **medida real** do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

A escala do mapa é de 1:20.000. **Para medida representada de 2,5cm**, temos:

$$\frac{1}{20.000} = \frac{2{,}5 \text{ cm}}{\text{Medida real}}$$

$$\text{Medida real} \times 1 = 20.000 \times 2{,}5 \text{ cm}$$

$$\text{Medida real} = 50.000 \text{ cm}$$

Para medida representada de 1,6cm, temos:

$$\frac{1}{20.000} = \frac{1{,}6 \text{ cm}}{\text{Medida real}}$$

$$\text{Medida real} \times 1 = 20.000 \times 1{,}6 \text{ cm}$$

$$\text{Medida real} = 32.000 \text{ cm}$$

Portanto, **as medidas reais dos lados do retângulo são de 50.000 cm e 32.000 cm**.

A questão pergunta pela área em **metros quadrados** (**m²**). Logo, devemos transformar as medidas dos lados em metros.

Para transformar **cm** para **m**, deve-se realizar dois avanços para a esquerda.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

÷ 10 ÷ 10

Logo, deve-se dividir o valor por 10×10 = 100. Portanto, as medidas em metros são:

- $\frac{50.000}{100} = \mathbf{500\ m}$; e
- $\frac{32.000}{100} = \mathbf{320\ m}$.

A área de um retângulo corresponde ao produto dos lados não paralelos. Portanto, a área do bosque, em metros quadrados, é:

$$500 \text{ m} \times 320 \text{ m}$$

$$= 160.000 \text{ m}^2$$

Gabarito: Letra D.

2. (FGV/PMSP/2024) Em um encontro de 57 Policiais Militares, há apenas sargentos, cabos e soldados. Para cada cabo, há 5 soldados, e para cada sargento, há 3 cabos.

O número de soldados nesse encontro é igual a

a) 50.

b) 48.

c) 45.

d) 42.

e) 40.

Comentários:

Considere que no encontro temos $\boldsymbol{S_d}$ **soldados**, $\boldsymbol{S_a}$ **sargentos** e $\boldsymbol{C}$ **cabos**.

Temos 57 **Policiais Militares no encontro**. Logo:

$$S_d + S_a + C = 57$$

Para obter o número de soldados, vamos escrever S_a e C em termos de S_d e substituir as expressões encontradas nessa primeira equação.

Para cada cabo, há 5 soldados. Logo:

$$\frac{C}{S_d} = \frac{1}{5} \rightarrow \boldsymbol{C = \frac{S_d}{5}}$$

Para cada sargento, há 3 cabos. Logo:

$$\frac{S_a}{C} = \frac{1}{3} \rightarrow S_a = \frac{1}{3} \times \boldsymbol{C}$$

Para escrever S_a em termos de S_d, podemos substituir $\boldsymbol{C}$ por $\boldsymbol{\frac{S_d}{5}}$ no resultado anterior. Ficamos com:

$$S_a = \frac{1}{3} \times \boldsymbol{\frac{S_d}{5}}$$

$$\boldsymbol{S_a = \frac{S_d}{15}}$$

Substituindo os valores de S_a e de C na primeira equação obtida, temos:

$$S_d + \boldsymbol{S_a} + \boldsymbol{C} = 57$$

$$S_d + \boldsymbol{\frac{S_d}{15}} + \boldsymbol{\frac{S_d}{5}} = 57$$

$$\frac{15S_d + S_d + 3S_d}{15} = 57$$

$$\frac{19S_d}{15} = 57$$

$$S_d = \frac{57 \times 15}{19}$$

$$S_d = \frac{3 \times 15}{1}$$

$$\boldsymbol{S_d = 45}$$

Gabarito: Letra C.

3. (FGV/ALEP PR/2024) As grandes distancias entre objetos astronômicos (estrelas, planetas, etc.) são, em geral, expressas por meio da distância que a luz percorre em determinada unidade de tempo no vácuo. Por exemplo, um ano-luz é a distância que a luz percorre em um ano, um minuto-luz é a distância que a luz percorre em um minuto no vácuo.

Assim expressamos a distância média entre a Terra e Sol, que é de, aproximadamente, 8,3 minutos-luz. Já a distância média entre a Terra e Lua é de, aproximadamente, 1,3 segundos-luz.

Considerando esses valores, assinale a o número que melhor aproxima a razão entre as distâncias entre a Terra e o Sol e entre a Terra e a Lua.

a) 6,38

b) 70,00

c) 100,79

d) 283,70

e) 383,07

Comentários:

Observe que **minuto-luz** e **segundo-luz** são unidades de distância:

- Um **minuto-luz** é a **distância que a luz percorre em um minuto** no vácuo.
- Um **segundo-luz** é a **distância que a luz percorre em um segundo** no vácuo.

Para realizar a razão entre as distâncias, é necessário que ambas as distâncias estejam expressas em uma mesma unidade. Nesse momento, **vamos obter a distância entre a Terra e Sol em segundos-luz**.

Segundo o problema, **a distância entre a Terra e Sol é de 8,3 minutos-luz**, ou seja, é a distância que a luz percorre em 8,3 minutos.

Como **1 min = 60 segundos**, **a distância entre a Terra e o Sol é a distância que a luz percorre em 8,3×60 = 498 segundos**. Em outras palavras, **a distância entre a Terra e Sol é de 498 segundos-luz**.

Segundo o enunciado, **a distância entre a Terra e a Lua é de 1,3 segundos-luz**. Logo, a razão entre as distâncias é:

$$\frac{\text{Distância entre a Terra e o Sol}}{\text{Distância entre a Terra e a Lua}} = \frac{498 \text{ segundos} - \text{luz}}{1{,}3 \text{ segundos} - \text{luz}} \cong 383{,}07$$

Gabarito: Letra E.

4. (FGV/ALEP PR/2024) Marcela e Caio estão treinando para participar de uma meia maratona. Marcela consegue fazer um percurso próximo à sua casa em 45 minutos, a uma velocidade média de 20km/h.

Caio faz o mesmo percurso em 1 hora e 15 minutos.

Assinale a opção que indica a velocidade média de Caio nesse percurso.

a) 10km/h

b) 12km/h

c) 15km/h

d) 16km/h

e) 25km/h

Comentários:

Sabemos que **velocidade média** é a razão entre uma distância percorrida e o tempo em que se percorreu essa distância.

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Sabemos que Marcela realizou o percurso em **45min**. Como **1h = 60min**, o tempo que ela levou para fazer o percurso, em horas, é **45/60 = 0,75h.**

Suponha que o percurso considerado tenha uma distância d. Como Marcela tem uma velocidade média de **20 km/h** e leva **0,75h** horas para completar o percurso, podemos escrever:

$$20 \text{ km/h} = \frac{d}{0{,}75 \text{ h}}$$

$$d = 20 \text{ km/h} \times 0{,}75\text{h}$$

$$\boldsymbol{d = 15 \text{ km}}$$

Portanto, **a distância do percurso considerado é de 15km**.

Sabemos que Caio percorreu o mesmo percurso de 15km. Para encontrar a velocidade média de Caio em **km/h**, basta dividir essa distância em **km** pelo tempo que ele leva em horas (**h**).

Sabemos que Caio fez o percurso em 1h15min. Como **1h = 60min**, o tempo que ele levou para fazer o percurso, em horas, é:

$$1\text{h} + \frac{15}{60}\text{h} = 1\text{h} + 0{,}25\text{h} = 1{,}25\text{h}$$

Portanto, a **velocidade média de Caio** nesse percurso é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{15 \text{ km}}{1{,}25 \text{ h}}$$

$$= \mathbf{12 \text{ km/h}}$$

Gabarito: Letra B.

5.(FGV/Câmara dos Deputados/2023) Álvaro e Léo correm em uma pista circular em sentido horário. Eles partem de pontos diametralmente opostos. Álvaro tem o triplo da velocidade de Léo, e dá 24 voltas na pista.

O número de vezes que Álvaro ultrapassa Léo é igual a

a) 16.

b) 18.

c) 20.

d) 22.

e) 24.

Comentários:

Sabemos que uma **velocidade constante** corresponde a uma **velocidade média**, que é a razão entre uma distância percorrida e o tempo em que se percorreu essa distância.

Considere que a velocidade constante de Álvaro é V_A. Considerando que ele percorreu a distância de 24 voltas em um tempo t, a sua velocidade pode ser escrita assim:

$$V_A = \frac{24}{t}$$

Considere que a velocidade de Léo é V_L e que ele tenha dado n voltas no mesmo tempo considerado t. Logo, a sua velocidade pode ser escrita assim:

$$V_L = \frac{n}{t}$$

Segundo o problema, Álvaro tem o triplo da velocidade de Léo. Logo:

$$V_A = 3V_L$$

$$\frac{24}{t} = 3\frac{n}{t}$$

$$24 = 3n$$

$$n = \frac{24}{3}$$

$$n = 8$$

Portanto, em um mesmo intervalo de tempo t, **Álvaro deu 24 voltas** e **Léo deu $n = 8$ voltas**.

Segundo o problema, Álvaro e Léo correm no mesmo sentido horário. Observe que, a cada volta que Léo dá, Álvaro dá 3 voltas. Nesse caso, **a cada volta de Léo**, **Álvaro o ultrapassa** 3−1 = **2 vezes**.

Portanto, o número de ultrapassagens é:

$$2 \text{ ultrapassagens por volta do Léo } \times 8 \text{ voltas do Léo}$$

$$= 16 \text{ ultrapassagens}$$

Gabarito: Letra A.

6.(FGV/Câmara dos Deputados/2023) Duas moscas partem ao mesmo tempo de um ponto do chão de uma sala e voam em linha vertical reta em direção ao teto. A primeira mosca, que tem o dobro da velocidade da segunda, bate no teto e volta pelo mesmo caminho.

Quando elas se encontram, elas estão

a) a igual distância do teto e do chão.

b) duas vezes mais perto do teto do que do chão.

c) duas vezes mais perto do chão do que do teto.

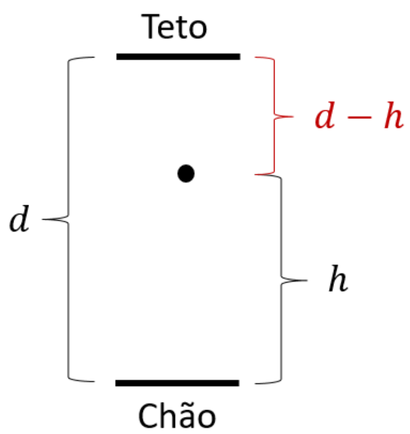
d) três vezes mais perto do teto do que do chão.

e) três vezes mais perto do chão do que do teto.

Comentários:

Entende-se que a velocidade das moscas é uma **velocidade constante**, que corresponde a uma **velocidade média**, sendo a razão entre uma distância percorrida e o tempo em que se percorreu essa distância.

Considere que distância entre o teto e o chão é d e que as moscas se encontrarão a uma altura h do chão, conforme o esquema a seguir:



Após transcorrido um tempo que chamaremos de t, a primeira mosca, ao bater no teto e encontrar a segunda mosca, percorreu uma distância $d + (d - h) = 2d - h$. Logo, a sua velocidade é:

$$V_1 = \frac{2d - h}{t}$$

A segunda mosca, por outro lado, percorreu a distância h no tempo de encontro t. Logo, a sua velocidade é:

$$V_2 = \frac{h}{t}$$

Sabemos que **a primeira mosca tem o dobro da velocidade da segunda**. Logo:

$$V_1 = 2V_2$$

$$\frac{2d - h}{t} = 2\frac{h}{t}$$

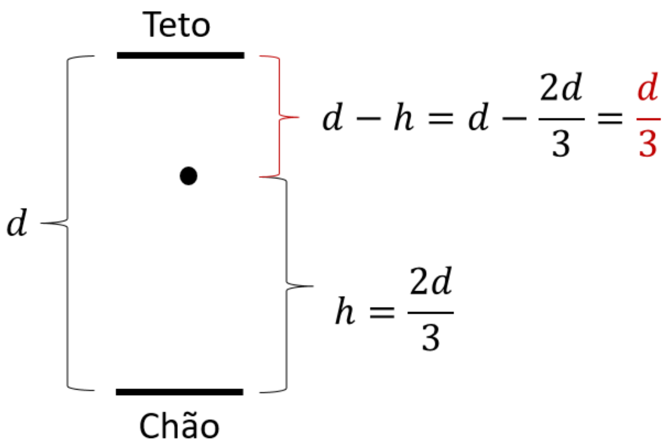
$$2d - h = 2h$$

$$2d = 3h$$

$$3h = 2d$$

$$h = \frac{2}{3}d$$

Logo, ficamos com o seguinte esquema:



Portanto, quando elas se encontram, elas estão **duas vezes mais longe do chão** $\left(\frac{2d}{3}\right)$ **do que do teto** $\left(\frac{d}{2}\right)$. Em outras palavras, elas estão **duas vezes mais perto do teto do que do chão**.

Gabarito: Letra B.

7.(FGV/TRT-PB/2022) Sobre 4 grandezas X, Y, Z e W sabe-se que:

A razão de W para X é 4:3

A razão de Y para Z é 3:2

A razão de Z para X é 1:6

A razão de X+Y para Z+W é

a) 5:6

b) 4:7

c) 3:5

d) 6:11

e) 8:11

Comentários:

O enunciado pergunta pela seguinte razão:

$$\frac{X+Y}{Z+W}$$

Para obter o valor numérico dessa razão, **vamos escrever as incógnitas $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ e $\boldsymbol{W}$ em termos de $\boldsymbol{X}$**.

Após realizar a substituição de Y, Z e W na razão anterior, perceba que **a incógnita $\boldsymbol{X}$ do numerador será simplificada com a incógnita $\boldsymbol{X}$ do denominador**.

Segundo o enunciado:

- **A razão de W para X é 4:3** $\rightarrow \frac{W}{X} = \frac{4}{3} \rightarrow \boldsymbol{W = \frac{4}{3}X}$
- **A razão de Y para Z é 3:2** $\rightarrow \frac{Y}{Z} = \frac{3}{2} \rightarrow \boldsymbol{Y = \frac{3}{2}Z}$
- **A razão de Z para X é 1:6** $\rightarrow \frac{Z}{X} = \frac{1}{6} \rightarrow \boldsymbol{Z = \frac{1}{6}X}$

Note que, como $\boldsymbol{Y = \frac{3}{2}Z}$ e $\boldsymbol{Z = \frac{1}{6}X}$, temos:

$$Y = \frac{3}{2}Z$$

$$Y = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}X\right)$$

$$\boldsymbol{Y = \frac{1}{4}X}$$

Agora que temos $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ e $\boldsymbol{W}$ em termos de $\boldsymbol{X}$, vamos substituir os valores na razão procurada:

$$\frac{X+\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{W}} = \frac{X+\boldsymbol{\frac{1}{4}X}}{\boldsymbol{\frac{1}{6}X}+\boldsymbol{\frac{4}{3}X}} = \frac{\frac{4X+1X}{4}}{\frac{1X+8X}{6}} = \frac{\frac{5X}{4}}{\frac{9X}{6}} = \frac{\boldsymbol{\frac{5X}{4}}}{\boldsymbol{\frac{3X}{2}}}$$

Para a divisão de frações, podemos utilizar o recurso "**inverte e multiplica**":

$$= \boldsymbol{\frac{5X}{4}} \times \boldsymbol{\frac{2}{3X}}$$

Simplificando a incógnita X, temos:

$$= \frac{5}{4} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{6}$$

Logo, **a razão de X+Y para Z+W é 5:6**.

Gabarito: Letra A.

8.(FGV/TRT-PB/2022) Em uma reunião de condomínio, há jovens com até 21 anos, adultos com mais de 21 e menos de 60 anos, e idosos com 60 anos ou mais. Para cada 2 jovens há 5 adultos e para cada 7 adultos há 3 idosos.

A razão entre o número de jovens e o número total de pessoas presentes a essa reunião é

a) 2/15.

b) 7/15.

c) 3/14.

d) 2/17.

e) 7/32.

Comentários:

Considere que temos J jovens, A adultos e I idosos. A questão pergunta pela razão entre o número de jovens e o total de pessoas:

$$\frac{J}{J + A + I}$$

Para resolver o problema, **vamos escrever A e I em termos de J**.

Após realizar a substituição de A e I na razão anterior, perceba que **a incógnita J do numerador será simplificada com a incógnita J do denominador**.

Segundo o enunciado, **para cada 2 jovens há 5 adultos**. Logo:

$$\frac{J}{A} = \frac{2}{5}$$

$$5J = 2A$$

$$\boldsymbol{A = \frac{5}{2}J}$$

Além disso, **para cada 7 adultos há 3 idosos**. Logo:

$$\frac{A}{I} = \frac{7}{3}$$

$$3A = 7I$$

$$\boldsymbol{I = \frac{3}{7}A}$$

Note que ***I* ainda não está escrito em termos de *J***. Porém, usando o fato de que $\boldsymbol{A = \frac{5}{2}J}$, temos:

$$\boldsymbol{I = \frac{3}{7}A}$$

$$I = \frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{2}J\right)$$

$$\boldsymbol{I = \frac{15}{14}J}$$

Agora que temos A e I em termos de J, podemos calcular a razão solicitada:

$$\frac{J}{J + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}}$$

$$= \frac{J}{J + \frac{5}{2}J + \frac{15}{14}J}$$

$$= \frac{J}{\frac{14J + 35J + 15J}{14}}$$

$$= \frac{J}{\frac{64}{14}J}$$

Simplificando J, temos:

$$= \frac{1}{\frac{64}{14}}$$

$$= \frac{14}{64}$$

Simplificando o numerador e o denominador por 2, temos:

$$= \frac{7}{32}$$

Gabarito: Letra E.

9.(FGV/TRT MA/2022) Michael coleciona moedas brasileiras, americanas e francesas. Para cada 3 moedas americanas Michael tem 7 moedas brasileiras e para cada 5 moedas brasileiras, ele tem 2 francesas.

Com relação às moedas de Michael, a razão entre a quantidade de moedas brasileiras e a quantidade de moedas não brasileiras é igual a

a) 7/5.

b) 12/7.

c) 25/19.

d) 30/23.

e) 35/29.

Comentários:

Considere que Michael apresenta B moedas brasileiras, A moedas americanas e F moedas francesas.

Devemos obter a razão entre a quantidade de moedas brasileiras e a quantidade de moedas não brasileiras, isto é, devemos obter:

$$\frac{B}{A+F}$$

Para obter essa razão, vamos escrever A e F em função da quantidade B.

Note que para cada 3 moedas americanas, Michael tem 7 moedas brasileiras. Logo:

$$\frac{A}{B} = \frac{3}{7}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{3}{7}B}$$

Além disso, para cada 5 moedas brasileiras, Michel tem 2 francesas. Logo:

$$\frac{B}{F} = \frac{5}{2}$$

$$F = \frac{2}{5}B$$

Portanto, a razão procurada é:

$$\frac{B}{A + F}$$

$$= \frac{B}{\frac{3}{7}B + \frac{2}{5}B}$$

$$= \frac{B}{\frac{15B + 14B}{35}}$$

$$= \frac{B}{\frac{29B}{35}}$$

$$= \frac{1}{\frac{29}{35}}$$

$$= \frac{35}{39}$$

Gabarito: Letra E.

10.(FGV/SEAD-AP/2022) Em uma urna há apenas bolas azuis, brancas e verdes. Para cada 2 bolas azuis há 5 bolas brancas. Para cada 3 bolas verdes há uma bola azul.

A razão entre o número de bolas brancas e o número total de bolas nessa urna é igual a

a) 3/8.

b) 4/9.

c) 5/13.

d) 6/11.

e) 7/15.

Comentários:

Considere que temos $\boldsymbol{A}$ **bolas azuis**, $\boldsymbol{B}$ **bolas brancas** e $\boldsymbol{V}$ **bolas verdes**.

Queremos obter a **razão** entre o **número de bolas brancas** e o **número total de bolas** da urna. Em outras palavras, queremos obter:

$$\frac{B}{A+B+V}$$

Para resolver o problema, **vamos escrever A e V em termos de B**. Nesse caso, ao inserir os valores de A e de V na razão solicitada, a **incógnita B será simplificada no numerador e no denominador**.

Para cada 2 bolas azuis, há 5 bolas brancas. Logo:

$$\frac{A}{B}=\frac{2}{5} \rightarrow \boldsymbol{A=\frac{2}{5}B}$$

Além disso, para **cada 3 bolas verdes, há uma bola azul**. Logo:

$$\frac{V}{A}=\frac{3}{1} \rightarrow \boldsymbol{V=3A}$$

Como $\boldsymbol{A=\frac{2}{5}B}$, temos:

$$V=3\times\left(\frac{2}{5}B\right)$$

$$\boldsymbol{V=\frac{6}{5}B}$$

Portanto, a razão procurada é:

$$\frac{B}{A+B+V}$$

$$=\frac{B}{\frac{2}{5}B+B+\frac{6}{5}B}$$

$$=\frac{B}{\frac{2B+5B+6B}{5}}$$

$$=\frac{B}{\frac{13B}{5}}$$

$$=B\times\frac{5}{13B}$$

$$=\frac{5}{13}$$

Gabarito: Letra C.

11.(FGV/SEAD-AP/2022) O Professor Manoel mora em Macapá e sabe que o índice pluviométrico de cada mês na região varia bastante ao longo do ano. Para facilitar seu estudo desse tema Manoel criou a Escala pluviométrica Amapaense cuja unidade é o “grau PA” (°PA). A escala é linear e o zero e o 100 dessa escala correspondem, respectivamente, ao menor e ao maior índice pluviométrico ocorrido em algum mês, em milímetros de chuva. A relação entre a escala PA e o índice pluviométrico está no quadro abaixo.

Escala PA	Quantidade de chuva em 1 mês em mm
0	30
100	400

O mês de agosto do ano passado foi atípico tendo ocorrido mais chuvas que o esperado normalmente. Nesse mês, Manoel registrou em sua escala 55°PA. Nesse referido mês, a quantidade de chuvas em mm foi, aproximadamente,

a) 234.
b) 245.
c) 252.
d) 264.
e) 271.

Comentários:

Para resolver o problema, devemos pensar em uma correspondência entre a **variação da "escala PA"** e a **variação da quantidade de chuva**.

Para uma variação de **30mm** para **400mm** de chuva, temos uma variação na escala de **0°PA** para **100°PA**. Logo, sendo a escala linear, podemos dizer que:

$$\frac{\text{Variação da quantidade de chuva}}{\text{Variação da escala}} = \frac{400mm - 30mm}{100°\text{PA} - 0°\text{PA}} = \frac{370mm}{100°\text{PA}} = 3{,}7\frac{mm}{°\text{PA}}$$

Em outras palavras, cada aumento de **3,7mm de chuva**, há um aumento de **1°PA na escala**.

Note que Manoel registrou em sua escala 55°PA. Isso significa que, **a partir de 0°PA**, **que corresponde a 30mm de chuva**, houve um aumento de **55°PA**. Esse aumento de 55°PA corresponde a um aumento **de** 3,7×55 = **203,5mm de chuva** com relação aos 30mm de chuva correspondentes a 0°PA. Logo, no mês em questão, a quantidade de chuvas foi de:

$$30 + 203{,}5 = 233{,}5 \text{ mm}$$

Logo, no referido mês, a quantidade de chuvas em mm foi de, aproximadamente, **234mm**.

Gabarito: Letra A.

12.(FGV/SEJUSP-MG/2022) Em um grupo de 120 pessoas, 50 são adultos (de 21 a 60 anos) e para cada 2 jovens (até 20 anos) há 5 idosos (acima de 60 anos).

Nesse grupo, o número total de vacinados contra a COVID-19 é o triplo do número de não vacinados. Além disso, metade dos vacinados são idosos e 1/3 dos vacinados são adultos.

É correto concluir que nesse grupo de pessoas há

a) 20 adultos não vacinados.

b) 20 jovens vacinados.

c) 50 idosos vacinados.

d) 10 idosos não vacinados.

e) 10 jovens não vacinados.

Comentários:

No grupo de 120 pessoas, temos **50 adultos**. Logo, o **total de pessoas entre jovens e idosos** é:

$$120 - 50 = \mathbf{70}$$

Sabemos que para cada 2 jovens há 5 idosos.

Note que, considerando apenas jovens e idosos, **a cada 7 pessoas**, **2 são jovens** e **5 são idosos**. Isso significa que, **dentre os 70 jovens e idosos**, **20 são jovens** e **50 são idosos**.

Em resumo, temos:

- **20 jovens;**
- **50 adultos; e**
- **50 idosos.**

No grupo de 120 pessoas, o número total de vacinados é o triplo do número de não vacinados. Considere que o total de vacinados é V e que o total de não vacinados é N. Nesse caso:

$$\boldsymbol{V = 3N}$$

Como a soma dos vacinados e não vacinados é 120, temos:

$$\boldsymbol{V} + N = 120$$

$$\boldsymbol{3N} + N = 120$$

$$4N = 120$$

$$N = 30$$

Substituindo $N = 30$ em $V = 3N$, temos:

$$V = 3N$$

$$V = 3 \times 30$$

$$V = 90$$

Em resumo, temos:

- **90 vacinados; e**
- **30 não vacinados.**

Metade dos vacinados são idosos. Logo, 90/2 = **45 idosos são vacinados**.

Além disso, 1/3 dos vacinados são adultos. Logo, 90/3 = **30 adultos são vacinados**.

O restante dos vacinados são jovens. Logo, o total de jovens vacinados é:

$$90 - 45 - 30$$

$$= \mathbf{15\ jovens\ são\ vacinados}$$

Portanto, temos o seguinte quantitativo de pessoas:

	Total	Vacinados	Não vacinados
Jovens	20	15	20—15 = 5
Adultos	50	30	**50—30 = 20**
Idosos	50	45	50—45 = 5

Portanto, é correto concluir que nesse grupo de pessoas há 20 adultos não vacinados.

Gabarito: Letra A.

13. (FGV/CBM AM/2022) Em um grupo de pessoas, o número de homens é igual ao número de mulheres. Selecionam-se então $\frac{2}{5}$ dos homens $\frac{3}{4}$ das mulheres e forma-se um novo grupo.

Nesse novo grupo, em relação ao total de pessoas, as mulheres representam

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{7}{20}$

d) $\frac{15}{23}$

e) $\frac{17}{25}$

Comentários:

Considere que **originalmente** o número de **homens** e o número de **mulheres** seja igual a X, **totalizando** $2X$ **pessoas**.

No novo grupo, temos $\frac{2}{5}$ dos homens. O total de homens nesse novo grupo é:

$$\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} = \frac{2}{5}\ \textbf{de}\ X = \frac{2}{5} \times X = \frac{2}{5}X$$

Ainda no novo grupo, temos $\frac{3}{4}$ das mulheres. O total de mulheres nesse novo grupo é:

$$\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} = \frac{3}{4}\ \textbf{de}\ X = \frac{3}{4} \times X = \frac{3}{4}X$$

Nesse novo grupo, **a razão entre o número de mulheres e o total de pessoas é**:

$$\frac{\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}}}{\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} + \text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{2}{5}X + \frac{3}{4}X}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{8X + 15X}{20}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{23}{20}X}$$

Simplificando X, temos:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{23}{20}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{20}{23}$$

$$= \boldsymbol{\frac{15}{23}}$$

Gabarito: Letra D.

14.(FGV/CBM AM/2022) Em uma Unidade Estudantil há 3 turmas de aprendizes: Turma A, Turma B e Turma C. A razão entre o número de aprendizes da Turma A e o número de aprendizes da Turma B é $\frac{6}{5}$. A razão entre o número de aprendizes da Turma A e o número de aprendizes da Turma C é $\frac{5}{4}$.

O número mínimo de aprendizes nessa Unidade Estudantil é

a) 76.

b) 77.

c) 78.

d) 79.

e) 80.

Comentários:

Considere que o número de aprendizes das turmas A, B e C seja, respectivamente, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.

Note que, nesse caso, o **total de aprendizes** da Unidade Estudantil é $\boldsymbol{a+b+c}$. **Devemos encontrar o número mínimo para essa soma**.

"A razão entre o número de aprendizes da Turma A e o número de aprendizes da Turma B é $\frac{6}{5}$."

Logo:

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$$

Consequentemente:

$$\boldsymbol{\frac{a}{6} = \frac{b}{5}} \text{ (Equação 1)}$$

"A razão entre o número de aprendizes da Turma A e o número de aprendizes da Turma C é $\frac{5}{4}$."

Logo:

$$\frac{a}{c} = \frac{5}{4}$$

Consequentemente:

$$\frac{a}{5} = \frac{c}{4} \text{ (Equação 2)}$$

Nesse momento, **vamos tentar montar uma proporção que relaciona as incógnitas a, b e c**.

Multiplicando ambos os lados da **Equação 1** por $\frac{1}{5}$, temos:

$$\frac{a}{30} = \frac{b}{25}$$

Multiplicando ambos os lados da **Equação 2** por $\frac{1}{6}$, temos:

$$\frac{a}{30} = \frac{c}{24}$$

Logo, **temos a seguinte proporção**:

$$\frac{a}{30} = \frac{b}{25} = \frac{c}{24}$$

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção, temos:

$$\frac{a}{30} = \frac{b}{25} = \frac{c}{24} = \frac{a+b+c}{30+25+24}$$

$$\frac{a}{30} = \frac{b}{25} = \frac{c}{24} = \frac{a+b+c}{79}$$

Note que **o número mínimo para a soma $a+b+c$ é 79** pois, nesse caso, teremos uma constante de proporcionalidade inteira, bem como valores inteiros para os números de alunos a, b e c.

$$\frac{a}{30} = \frac{b}{25} = \frac{c}{24} = \frac{79}{79}$$

$$\frac{a}{30} = \frac{b}{25} = \frac{c}{24} = 1$$

Nesse caso:

$$\frac{a}{30} = 1 \rightarrow a = 30$$

$$\frac{b}{25} = 1 \rightarrow b = 25$$

$$\frac{c}{24} = 1 \rightarrow c = 24$$

Portanto, **o número mínimo de aprendizes da Unidade Estudantil é 79**.

Gabarito: Letra D.

15. (FGV/IMBEL/2021) Duas urnas contêm a mesma quantidade de fichas. Nas duas urnas só há fichas vermelhas ou azuis. Na primeira urna, a razão do número de fichas vermelhas para o número de fichas azuis é de 5:1 e, na segunda urna, de 3:1.

No total, há 45 fichas azuis.

O total de fichas vermelhas é

a) 180.

b) 175.

c) 171.

d) 165.

e) 162.

Comentários:

Considere que o número de fichas vermelhas e azuis da **primeira urna** é, respectivamente, V_1 e A_1.

Além disso, considere que o número de fichas vermelhas e azuis da **primeira segunda** é, respectivamente, V_2 e A_2.

Queremos obter o total de fichas vermelhas, isto é, queremos obter $V_1 + V_2$.

Nesse momento, vamos modelar o problema, trazendo as informações do enunciado para a linguagem matemática.

"Duas urnas contêm a mesma quantidade de fichas. Nas duas urnas só há fichas vermelhas ou azuis."

A partir dessa informação, temos:

$$V_1 + A_1 = V_2 + A_2 \text{ (Equação 1)}$$

"Na primeira urna, a razão do número de fichas vermelhas para o número de fichas azuis é de 5:1..."

A partir dessa informação, temos:

$$\frac{V_1}{A_1} = \frac{5}{1}$$

$$\rightarrow V_1 = 5A_1 \text{(Equação 2)}$$

"...e, na segunda urna, de 3:1."

A partir dessa informação, temos:

$$\frac{V_2}{A_2} = \frac{3}{1}$$

$$\rightarrow V_2 = 3A_2 \text{(Equação 3)}$$

"No total, há 45 fichas azuis."

A partir dessa informação, temos:

$$A_1 + A_2 = 45 \text{ (Equação 4)}$$

—

Agora que modelamos o problema vamos substituir as Equações 2 e 3 na Equação 1. Temos:

$$V_1 + A_1 = V_2 + A_2$$

$$5A_1 + A_1 = 3A_2 + A_2$$

$$6A_1 = 4A_2$$

$$3A_1 = 2A_2$$

$$A_1 = \frac{2}{3}A_2$$

Veja que tanto nesse resultado obtido quanto na Equação 4 temos relações entre A_1 e A_2. Substituindo esse resultado na Equação 4, temos:

$$A_1 + A_2 = 45$$

$$\frac{2}{3}A_2 + A_2 = 45$$

$$\frac{2A_2 + 3A_2}{3} = 45$$

$$\frac{5A_2}{3} = 45$$

$$A_2 = 45 \times \frac{3}{5}$$

$$\boldsymbol{A_2 = 27}$$

Além disso, como $A_1 = \frac{2}{3}A_2$, temos:

$$A_1 = \frac{2}{3} \times 27$$

$$\boldsymbol{A_1 = 18}$$

Agora que temos o número de fichas azuis de cada urna, podemos obter o número de fichas vermelhas por meio das Equações 2 e 3.

$$V_1 = 5\boldsymbol{A_1} \rightarrow V_1 = 5 \times \mathbf{18} \rightarrow \boldsymbol{V_1 = 90}$$

$$V_2 = 3\boldsymbol{A_1} \rightarrow V_2 = 3 \times \mathbf{27} \rightarrow \boldsymbol{V_2 = 81}$$

Logo, o total de fichas vermelhas é:

$$\boldsymbol{V_1 + V_2}$$

$$= 90 + 81$$

$$= \mathbf{171}$$

Gabarito: Letra C.

16.(FGV/PM SP/2021) Em um grupo de N pessoas, há 12 homens a mais do que mulheres. Retirando-se 6 homens desse grupo, a razão entre o número de homens e o número de mulheres passa a ser de $\frac{7}{5}$.

O valor de N é

a) 36.

b) 42.

c) 45.

d) 48.

e) 54.

Comentários:

Suponha que no grupo de N pessoas temos H homens e M mulheres.

"...há 12 homens a mais do que mulheres."

Nesse caso, temos:

$$H = M + 12$$

"Retirando-se 6 homens desse grupo, a razão entre o número de homens e o número de mulheres passa a ser de $\frac{7}{5}$"

Ao se retirar 6 homens, temos um total de $H - 6$ homens. A razão entre homens e mulheres fica assim:

$$\frac{H-6}{M} = \frac{7}{5}$$

Como $H = M + 12$, temos:

$$\frac{(M+12)-6}{M} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{M+6}{M} = \frac{7}{5}$$

Podemos realizar a "**multiplicação cruzada**". Ficamos com:

$$5 \times (M+6) = 7M$$

$$5M + 30 = 7M$$

$$30 = 7M - 5M$$

$$2M = 30$$

$$\boldsymbol{M = 15}$$

Logo, o total de homens que haviam originalmente é:

$$\boldsymbol{H} = M + 12 = 15 + 12 = \boldsymbol{27}$$

O total de pessoas é dado por:

$$N = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}$$

$$= 27 + 15$$

$$= 42$$

Gabarito: Letra B.

17.(FGV/IBGE/2017) Uma equipe de trabalhadores de determinada empresa tem o mesmo número de mulheres e de homens. Certa manhã, $\frac{3}{4}$ das mulheres e $\frac{2}{3}$ dos homens dessa equipe saíram para um atendimento externo.

Desses que foram para o atendimento externo, a fração de mulheres é:

a) $\frac{3}{4}$;

b) $\frac{8}{9}$;

c) $\frac{5}{7}$;

d) $\frac{8}{13}$;

e) $\frac{9}{17}$.

Comentários:

Considere que o total de trabalhadores seja T.

Como a empresa tem o mesmo número de homens e mulheres, temos $\frac{1}{2}T$ homens e $\frac{1}{2}T$ mulheres.

O **número de mulheres que foram para o atendimento externo** é:

$$\frac{3}{4}\text{ das (mulheres)}$$

$$\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{2}T\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{8}T}$$

O **número de homens que foram para o atendimento externo** é:

$$\frac{2}{3}\text{ dos (homens)}$$

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}T\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}T}$$

Logo, considerando os que foram para o atendimento externo, a fração de mulheres é:

$$\frac{\text{Mulheres que foram para o atendimento externo}}{\text{Todos que foram para o atendimento externo}}$$

$$=\frac{\boldsymbol{\frac{3}{8}T}}{\boldsymbol{\frac{3}{8}T}+\boldsymbol{\frac{1}{3}T}}$$

$$=\frac{\frac{3}{8}T}{\frac{9T+8T}{24}}=\frac{\frac{3}{8}T}{\frac{17}{24}T}=\frac{3}{8}\times\frac{24}{17}=\frac{9}{17}$$

Gabarito: Letra E.

18.(FGV/IBGE/2017) Na equipe de Mário há 6 mulheres a mais do que homens. Sabendo que essa equipe tem ao todo 60 membros, a razão do número de mulheres para o número de homens é:

a) $\frac{6}{5}$;

b) $\frac{5}{4}$;

c) $\frac{3}{5}$;

d) $\frac{20}{11}$;

e) $\frac{11}{9}$.

Comentários:

Suponha que na equipe temos H homens e M mulheres.

Sabemos que há 6 mulheres a mais do que homens. Logo:

$$\boldsymbol{M = H + 6}$$

A equipe é composta por 60 membros. Logo:

$$H + M = 60$$

Substituindo a primeira equação na segunda, temos:

$$H + \boldsymbol{M} = 60$$

$$H + (\boldsymbol{H + 6}) = 60$$

$$2H + 6 = 60$$

$$2H = 54$$

$$H = 27$$

Como temos 27 homens, o total de mulheres é:

$$\boldsymbol{M = H + 6}$$

$$M = 27 + 6$$

$$M = 33$$

A razão do número de mulheres para o número de homens é:

$$\frac{M}{H} = \frac{33}{27}$$

Simplificando o numerador e o denominador por 3, obtemos:

$$\frac{M}{H} = \frac{11}{9}$$

Gabarito: Letra E.

19. (FGV/Pref. Salvador/2017) Uma árvore é 4 m mais alta do que outra árvore. As alturas das duas árvores estão na razão $\frac{2}{3}$.

A árvore mais alta mede

a) 6 m.

b) 8 m.

c) 9 m.

d) 12 m.

e) 15 m.

Comentários:

Suponha que a árvore mais alta mede $\boldsymbol{A}$ **metros** e a árvore mais baixa mede $\boldsymbol{B}$ **metros**.

Sabemos que a árvore mais alta é 4m maior do que a mais baixa. Logo:

$$A = B + 4$$

Além disso, as alturas das duas árvores estão na razão $\frac{2}{3}$.

Observe que, como essa razão é menor do que 1, necessariamente ela corresponde a $\frac{B}{A}$, pois caso fosse $\frac{A}{B}$ teríamos uma razão maior do que 1. Logo:

$$\frac{B}{A} = \frac{2}{3}$$

$$B = \frac{2}{3}A$$

Substituindo $\boldsymbol{B = \frac{2}{3}A}$ na primeira equação, temos:

$$A = \boldsymbol{B} + 4$$

$$A = \boldsymbol{\frac{2}{3}A} + 4$$

$$A - \frac{2}{3}A = 4$$

$$\frac{3A - 2A}{3} = 4$$

$$\frac{A}{3} = 4$$

$$A = 12$$

Logo, a árvore mais alta mede **12 metros**.

Gabarito: Letra D.

20. (FGV/MRE/2016) Em uma reunião, as únicas pessoas presentes são políticos de três partidos: PA, PB e PC. Para cada três políticos do partido PA há dois políticos do partido PB e, para cada cinco políticos do partido PB, há quatro políticos do partido PC.

Nessa reunião, a razão entre o número de políticos do partido PB e o número total de políticos é:

a) $\frac{10}{33}$.

b) $\frac{11}{34}$.

c) $\frac{12}{35}$.

d) $\frac{13}{36}$.

e) $\frac{14}{37}$.

Comentários:

Seja o número de políticos dos partidos **PA, PB** e **PB** dado por, respectivamente, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.

"Para cada três políticos do partido PA há dois políticos do partido PB..."

Nesse caso, temos a seguinte proporção:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

"...para cada cinco políticos do partido PB, há quatro políticos do partido PC."

Nesse caso, temos a seguinte proporção:

$$\frac{b}{5} = \frac{c}{4}$$

"Nessa reunião, a razão entre o número de políticos do partido PB e o número total de políticos é..."

Veja que a questão nos pede o valor correspondente à seguinte razão:

$$\frac{b}{a+b+c}$$

Para resolver o problema, podemos escrever a e c em função de b. Perceba que, ao inserir todos os valores em função de b, o número b vai "cortar" na razão procurada.

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{2} \rightarrow a=\frac{3}{2}b$$

$$\frac{b}{5}=\frac{c}{4} \rightarrow c=\frac{4}{5}b$$

Substituindo os valores na razão procurada, temos:

$$\frac{b}{a+b+c}$$

$$=\frac{b}{\frac{3}{2}b+b+\frac{4}{5}b}$$

$$=\frac{b}{\frac{15b+10b+8b}{10}}$$

$$=\frac{b}{\frac{33}{10}b}$$

$$=\frac{1}{\frac{33}{10}}=\frac{10}{33}$$

Gabarito: Letra A.

21. (FGV/MPE RJ/2016) O carro de Joana faz 15 km por litro de gasolina e o carro de Laura faz 10 km por litro de gasolina.

Joana e Laura percorreram exatamente a mesma distância em quilômetros com seus respectivos carros.

No total, a razão entre quilômetros percorridos e o número de litros de gasolina gastos pelas duas foi igual a:

a) 11,5;

b) 12,0;

c) 12,5;

d) 13,0;

e) 13,5.

Comentários:

Suponha que Joana e Laura percorreram uma **distância $\boldsymbol{d}$** em quilômetros. Suponha também que, nessa distância percorrida, o carro de **Joana** gastou $\boldsymbol{j}$ **litros** e o carro de **Laura** gastou $\boldsymbol{l}$ **litros**.

O carro de Joana faz 15 km por litro. Logo, para Joana, temos a seguinte proporção:

$$\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{j}}$$

O carro de Laura faz 10 km por litro. Logo, para Laura, temos a seguinte proporção:

$$\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{l}}$$

A questão pede a razão entre quilômetros percorridos e o número de litros de gasolina gastos pelas duas. Isto é, a questão pede a seguinte razão:

$$\frac{d+d}{j+l} = \frac{2d}{j+l}$$

Para resolver o problema, podemos escrever j e l em função de d. Perceba que, ao inserir todos os valores em função de d, o número d vai "cortar" na razão procurada.

$$\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{j}} \rightarrow \boldsymbol{j} = \frac{\boldsymbol{d}}{\mathbf{15}}$$

$$\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{l}} \rightarrow \boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{d}}{\mathbf{10}}$$

Substituindo na razão procurada, temos:

$$\frac{2d}{\boldsymbol{j}+\boldsymbol{l}}$$

$$= \frac{2d}{\dfrac{d}{10}+\dfrac{d}{15}}$$

$$\frac{2d}{\dfrac{3d+2d}{30}}$$

$$= \frac{2d}{\frac{5d}{30}} = 2d \times \frac{30}{5d} = 2 \times \frac{30}{5} = 12$$

Gabarito: Letra B.

22. (FGV/PGE RO/2015) Duas urnas contêm apenas bolas brancas e bolas pretas. Na primeira urna, há 240 bolas e, para cada 5 bolas brancas, há 7 bolas pretas. Na segunda, há 280 bolas e, para cada 5 bolas brancas, há 9 bolas pretas. Considerando-se todas as bolas das duas urnas, para cada 5 bolas brancas, há:

a) 8 bolas pretas;

b) 10 bolas pretas;

c) 12 bolas pretas;

d) 14 bolas pretas;

e) 16 bolas pretas.

Comentários:

Considere que na **primeira urna** temos $\boldsymbol{B_1}$ **bolas brancas** e $\boldsymbol{P_1}$ **bolas pretas**. Na **segunda urna**, considere que temos $\boldsymbol{B_2}$ **bolas brancas** e $\boldsymbol{P_2}$ **bolas pretas**.

"Na primeira urna, há 240 bolas e, para cada 5 bolas brancas, há 7 bolas pretas."

Como a soma das bolas da primeira urna é 240, temos:

$$B_1 + P_1 = 240$$

Além disso, para cada 5 bolas brancas, há 7 bolas pretas. Logo:

$$\frac{B_1}{P_1} = \frac{5}{7}$$

$$B_1 = \frac{5}{7}P_1$$

Substituindo $B_1 = \frac{5}{7}P_1$ em $B_1 + P_1 = 240$, temos:

$$B_1 + P_1 = 240$$

$$\frac{5}{7}P_1 + P_1 = 240$$

$$\frac{5P_1 + 7P_1}{7} = 240$$

$$\frac{12}{7}P_1 = 240$$

$$P_1 = \frac{7}{12} \times 240$$

$$\boldsymbol{P_1 = 140}$$

Como $B_1 = \frac{5}{7}P_1$, temos:

$$B_1 = \frac{5}{7} \times 140$$

$$\boldsymbol{B_1 = 100}$$

Vamos agora analisar a segunda urna.

"Na segunda, há 280 bolas e, para cada 5 bolas brancas, há 9 bolas pretas."

Como a soma das bolas da segunda urna é 280, temos:

$$B_2 + P_2 = 280$$

Além disso, para cada 5 bolas brancas, há 9 bolas pretas. Logo:

$$\frac{B_2}{P_2} = \frac{5}{9}$$

$$B_2 = \frac{5}{9}P_2$$

Substituindo $B_2 = \frac{5}{9}P_2$ em $B_2 + P_2 = 280$, temos:

$$B_2 + P_2 = 280$$

$$\frac{5}{9}P_2 + P_2 = 280$$

$$\frac{5P_2 + 9P_2}{9} = 280$$

$$\frac{14}{9}P_2 = 280$$

$$P_2 = \frac{9}{14} \times 280$$

$$\boldsymbol{P_2 = 180}$$

Como $B_2 = \frac{5}{9}P_2$, temos:

$$B_2 = \frac{5}{9} \times 180$$

$$\boldsymbol{B_2 = 100}$$

Nesse momento, já temos os números referentes a todas as bolas pretas e brancas. Veja que o enunciado quer uma resposta do seguinte tipo:

"Considerando-se todas as bolas das duas urnas, para cada 5 bolas brancas, há X bolas pretas"

Isso significa que a questão nos pergunta **qual é a razão entre bolas brancas e pretas** considerando-se a totalidade das bolas, de forma que essa razão é descrita por $\frac{5}{X}$.

A razão entre bolas brancas e pretas, considerando-se as duas urnas, é:

$$\frac{B_1 + B_2}{P_1 + P_2} = \frac{100 + 100}{140 + 180} = \frac{200}{320}$$

Simplificando a fração por 40, obtemos:

$$\frac{B_1 + B_2}{P_1 + P_2} = \boldsymbol{\frac{5}{8}}$$

Logo, para cada 5 bolas brancas, temos **8 bolas pretas**.

Gabarito: Letra A.

23.(FGV/TJ PI/2015) Em uma urna há somente bolas brancas, bolas pretas e bolas vermelhas. Para cada bola branca há três bolas pretas e para cada duas bolas pretas há cinco bolas vermelhas.

A razão entre a quantidade de bolas pretas e a quantidade total de bolas na urna é:

a) $\frac{3}{10}$;

b) $\frac{4}{19}$;

c) $\frac{5}{21}$;

d) $\frac{6}{23}$;

e) $\frac{7}{25}$;

Comentários:

Considere que na urna temos B bolas brancas, P bolas pretas e V bolas vermelhas.

Para cada bola branca há três bolas pretas. Logo, a razão entre bolas brancas e pretas é:

$$\boldsymbol{\frac{B}{P} = \frac{1}{3}}$$

Para cada duas bolas pretas há cinco bolas vermelhas. Logo, a razão entre bolas pretas e vermelhas é:

$$\boldsymbol{\frac{P}{V} = \frac{2}{5}}$$

A questão pede **a razão entre a quantidade de bolas pretas e a quantidade total de bolas na urna**. Logo, devemos determinar o seguinte valor:

$$\frac{P}{B + P + V}$$

Veja que podemos escrever B e V em função de P:

$$\boldsymbol{\frac{B}{P} = \frac{1}{3}} \rightarrow \boldsymbol{B = \frac{1}{3}P}$$

$$\boldsymbol{\frac{P}{V} = \frac{2}{5}} \rightarrow 5P = 2V \rightarrow 2V = 5P \rightarrow \boldsymbol{V = \frac{5}{2}P}$$

Substituindo os valores de B e de V na razão procurada, temos:

$$\frac{P}{\boldsymbol{B} + P + \boldsymbol{V}}$$

$$= \frac{P}{\boldsymbol{\frac{1}{3}P} + P + \boldsymbol{\frac{5}{2}P}} = \frac{P}{\frac{2P + 6P + 15P}{6}} = \frac{P}{\frac{23P}{6}} = \frac{6}{23}$$

Logo, **a razão entre a quantidade de bolas pretas e a quantidade total de bolas na urna** é $\boldsymbol{\frac{6}{23}}$.

Gabarito: Letra D.

24.(FGV/Pref. Osasco/2014) Em uma equipe operacional com 24 membros, a razão entre o número de mulheres e o número de homens é $\frac{3}{5}$.

Nessa equipe, o número de homens a mais do que o de mulheres é de:

a) 3;

b) 4;

c) 5;

d) 6;

e) 8.

Comentários:

Suponha que na equipe temos H homens e M mulheres.

A equipe é composta por 24 membros. Logo:

$$H + M = 24$$

A razão entre o número de mulheres e o número de homens é $\frac{3}{5}$. Logo:

$$\frac{M}{H} = \frac{3}{5}$$

$$M = \frac{3}{5}H$$

Substituindo $\boldsymbol{M = \frac{3}{5}H}$ em $H + M = 24$, temos:

$$H + \boldsymbol{M} = 24$$

$$H + \boldsymbol{\frac{3}{5}H} = 24$$

$$\frac{5H + 3H}{5} = 24$$

$$\frac{8H}{5} = 24$$

$$H = \frac{5}{8} \times 24$$

$$\boldsymbol{H = 15}$$

Substituindo o valor de H em $H + M = 24$, temos:

$$H + M = 24$$

$$15 + M = 24$$

$$M = 24 - 15$$

$$\boldsymbol{M = 9}$$

Logo, o número de homens a mais do que o de mulheres é de:

$$H - M$$

$$= 15 - 9 = 6$$

Gabarito: Letra D.

25. (FGV/TCE-BA/2014) Em uma sala há advogados, juízes e desembargadores, e apenas eles. Para cada dois desembargadores há três juízes e para cada quatro juízes há sete advogados.

A razão entre a quantidade de juízes e a quantidade total de pessoas na sala é

a) $\frac{11}{39}$

b) $\frac{12}{41}$

c) $\frac{14}{43}$

d) $\frac{13}{45}$

e) $\frac{15}{47}$

Comentários:

Considere que na sala temos A advogados, J juízes e D desembargadores.

Para cada dois desembargadores há três juízes. Logo, a razão entre desembargadores e juízes é:

$$\boldsymbol{\frac{D}{J} = \frac{2}{3}}$$

Para cada quatro juízes há sete advogados. Logo, a razão entre juízes e advogados é:

$$\boldsymbol{\frac{J}{A} = \frac{4}{7}}$$

A questão pede **a razão entre a quantidade de juízes e a quantidade total de pessoas na sala**. Logo, devemos determinar o seguinte valor:

$$\frac{J}{A + J + D}$$

Veja que podemos escrever A e D em função de J:

$$\boldsymbol{\frac{D}{J} = \frac{2}{3}} \rightarrow \boldsymbol{D = \frac{2}{3}J}$$

$$\boldsymbol{\frac{J}{A} = \frac{4}{7}} \rightarrow 7J = 4A \rightarrow 4A = 5J \rightarrow \boldsymbol{A = \frac{7}{4}J}$$

Substituindo os valores de A e de D na razão procurada, temos:

$$\frac{J}{\boldsymbol{A} + J + \boldsymbol{D}}$$

$$= \frac{J}{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{J} + J + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{J}} = \frac{J}{\frac{21J + 12J + 8J}{12}} = \frac{J}{\frac{41}{12}J} = \frac{12}{41}$$

Logo, **a razão entre a quantidade de juízes e a quantidade total de pessoas na sala** é $\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{41}}$.

Gabarito: Letra B.

Questões Comentadas – FGV

Proporcionalidade

1.(FGV/PPBA/2024) Um total de 96 bombons será repartido entre 3 irmãs em quantidades proporcionais a 4, 5 e 7.

Comparada àquela que recebeu a menor quantidade, a irmã que recebeu a maior quantidade terá

a) 6 bombons a mais.

b) 12 bombons a mais.

c) 15 bombons a mais

d) 16 bombons a mais.

e) 18 bombons a mais.

Comentários:

Queremos dividir 96 bombons em <u>partes diretamente proporcionais</u> a 4, 5 e 7. Suponha que essas partes sejam, respectivamente, a, b e c. Nesse caso:

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = k$$

Sabemos que a soma das partes corresponde aos 96 bombons. Logo, $a + b + c = 96$.

Aplicando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção anterior, temos:

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{4+5+7}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{96}{16}$$

$$\boxed{\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = 6}$$

A **maior quantidade recebida** é aquela que é diretamente proporcional ao maior número (7):

$$\frac{c}{7} = 6 \rightarrow c = 7 \times 6 \rightarrow \boldsymbol{c = 42\ \text{bombons}}$$

A **menor quantidade recebida** é aquela que é diretamente proporcional ao menor número (4):

$$\frac{a}{4} = 6 \rightarrow a = 3 \times 6 \rightarrow \boldsymbol{a = 24\ \text{bombons}}$$

Logo, comparada àquela que recebeu a menor quantidade, a irmã que recebeu a maior quantidade terá 42−24 = **18 bombons a mais**.

Gabarito: letra E.

2. (FGV/ALE TO/2024) As filhas de Nepomuceno têm 5 e 9 anos de idade. Ele dividirá R$420,00 entre elas de forma inversamente proporcional às suas idades.

Logo

a) a mais nova receberá R$120,00 a mais que a mais velha.

b) a mais nova receberá R$150,00 a mais que a mais velha.

c) a mais nova receberá R$270,00 a mais que a mais velha.

d) a mais velha receberá R$120,00 a mais que a mais nova.

e) a mais velha receberá R$150,00 a mais que a mais nova.

Comentários:

Devemos **dividir R$420,00** em partes **inversamente proporcionais** às **idades das filhas**, **5 e 9 anos**. Suponha que essas partes sejam, **respectivamente**, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Nesse caso:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{9}} = k$$

A soma das partes totaliza R$420,00. Logo, $a + b = 420$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{9}} = k$, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{9}} = \frac{a+b}{\frac{1}{5}+\frac{1}{9}}$$

$$5a = 9b = \frac{420}{\frac{9+5}{45}}$$

$$5a = 9b = \frac{420}{\frac{14}{45}}$$

$$5a = 9b = 420 \times \frac{45}{14}$$

$$5a = 9b = 30 \times \frac{45}{1}$$

$$\boxed{5a = 9b = 1350}$$

Portanto, as partes recebidas são tais que:

$$5a = 1350 \rightarrow a = \frac{1350}{5} \rightarrow a = \text{R\$ } 270{,}00$$

$$9b = 1350 \rightarrow b = \frac{1350}{9} \rightarrow b = \text{R\$ } 150{,}00$$

Logo, a filha mais nova recebeu a = R$270,00 e a filha mais velha recebeu b = R$ 150,00. Portanto, é correto afirmar que **a mais nova receberá 270−150 = R$120,00 a mais que a mais velha**.

Gabarito: Letra A.

3.(FGV/SEFAZ-MG/2023) Uma grandeza A é diretamente proporcional à grandeza B que, por sua vez, é inversamente proporcional ao quadrado da grandeza C.

Quando A = 12, tem-se B = 4 e C = 6.

Quando C = 4, o valor de A é

a) 144.

b) 72.

c) 27.

d) 18.

e) 12.

Comentários:

Sabemos que a grandeza A é diretamente proporcional à grandeza B. Logo, sendo k_1 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{A}{B} = k_1$$

Além disso, a grandeza B é inversamente proporcional ao quadrado da grandeza C Logo, sendo k_2 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{B}{\frac{1}{C^2}} = k_2$$

$$BC^2 = k_2$$

Quando $A = 12$, tem-se $B = 4$ e $C = 6$. Logo:

$$\frac{A}{B} = k_1 \rightarrow \frac{12}{4} = k_1 \rightarrow \boldsymbol{k_1 = 3}$$

$$BC^2 = k_2 \rightarrow 4 \times 6^2 = k_2 \rightarrow \boldsymbol{k_2 = 144}$$

A questão pergunta pelo valor de A quando $C = 4$. Para obter o valor de A, vamos utilizar os valores das constantes obtidas.

$$BC^2 = k_2 \rightarrow B \times 4^2 = 144 \rightarrow B = \frac{144}{16} \rightarrow \boldsymbol{B = 9}$$

$$\frac{A}{B} = k_1 \rightarrow \frac{A}{9} = 3 \rightarrow \boldsymbol{A = 27}$$

Logo, quando $C = 4$, **o valor de A é 27**.

Gabarito: Letra C.

4.(FGV/CM Taubaté/2022) Sobre 3 grandezas X, Y e Z sabe-se que X é diretamente proporcional a Y e que Z é inversamente proporcional a X.

Quando Y = 3, tem-se X = 6 e Z = 1/2.

Quando X = 3, o valor de Y + Z é

a) 5/2.

b) 3/2.

c) 4.

d) 4/3.

e) 7/3.

Comentários:

Sabemos que a grandeza X é diretamente proporcional à grandeza Y. Logo, sendo k_1 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{X}{Y} = k_1$$

Além disso, a grandeza Z é inversamente proporcional à grandeza X. Logo, sendo k_2 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$ZX = k_2$$

Quando $Y = 3$, tem-se $X = 6$ e $z = 1/2$. Logo:

$$\frac{X}{Y} = k_1 \rightarrow \frac{6}{\mathbf{3}} = k_1 \rightarrow \boldsymbol{k_1} = \mathbf{2}$$

$$ZX = k_2 \rightarrow \frac{1}{2} \times 6 = k_2 \rightarrow \boldsymbol{k_2} = \mathbf{3}$$

Devemos determinar o valor de $Y + Z$ para o caso em que $X = 3$.

$$\frac{X}{Y} = k_1 \rightarrow \frac{\mathbf{3}}{Y} = 2 \rightarrow \boldsymbol{Y} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

$$ZX = k_2 \rightarrow Z \times \mathbf{3} = 3 \rightarrow \boldsymbol{Z} = \mathbf{1}$$

Logo, **para $X = 3$**, temos:

$$Y + Z = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} + \mathbf{1}$$

$$= \frac{3+2}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

Gabarito: Letra A.

5.(FGV/TRT MA/2022) Uma grandeza A é diretamente proporcional a B e inversamente proporcional a C. Quando B = 30 e C = 20, o valor de A é 60.

Quando o valor de C é o dobro do valor de B, o valor de A é

a) 10.

b) 20.

c) 30.

d) 40.

e) 50.

Comentários:

Sabemos que a grandeza A é <u>diretamente proporcional</u> à grandeza B e <u>inversamente proporcional</u> à grandeza C. Logo, sendo k uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{A}{B \times \frac{1}{C}} = k$$

$$\frac{AC}{B} = k$$

Quando $B = 30$ e $C = 20$, tem-se $A = 60$. Logo:

$$\frac{AC}{B} = k$$

$$\frac{60 \times 20}{30} = k$$

$$k = 40$$

Devemos determinar o valor de A para o caso em que C é o dobro do valor de B.

$$\frac{AC}{B} = k$$

$$\frac{A \times 2B}{B} = 40$$

$$2A = 40$$

$$A = 20$$

Gabarito: Letra B.

6.(FGV/TRT-PB/2022) Uma distribuidora de produtos químicos recebeu 1600 litros de certo composto e deve distribuir toda essa quantidade entre 5 laboratórios em partes proporcionais aos números 3, 4, 5, 6 e 7.

O laboratório que receber a menor quantidade receberá

a) 190 litros.

b) 192 litros.

c) 194 litros.

d) 196 litros.

e) 198 litros.

Comentários:

Os 1.600 litros do composto foram divididos em partes proporcionais a 3, 4, 5, 6 e 7. Se as partes forem respectivamente a, b, c, d e e, então:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{d}{6} = \frac{e}{7} = k$$

A soma das partes totaliza 1.600 litros. Logo, $a + b + c + d + e = 1.600$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{d}{6}=\frac{e}{7}$, temos:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{d}{6}=\frac{e}{7}=\frac{a+b+c+d+e}{3+4+5+6+7}$$

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{d}{6}=\frac{e}{7}=\frac{1.600}{25}$$

$$\boxed{\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{d}{6}=\frac{e}{7}=64}$$

O laboratório que irá receber a menor parte é aquele que receberá uma quantidade de litros diretamente proporcional a 3. Logo:

$$\frac{a}{3}=64$$

$$a=3\times 64$$

$$a=192 \text{ litros}$$

Gabarito: Letra B.

7.(FGV/TRT MA/2022) Uma empresa de engenharia está realizando as obras X, Y e Z. Foram comprados 360 sacos de cimento que deverão ser repartidos entre as obras X, Y e Z em partes proporcionais aos números 4, 7 e 9, respectivamente.

O número de sacos de cimento que a obra Y receberá é

a) 108.

b) 112.

c) 120.

d) 126.

e) 144.

Comentários:

Devemos dividir 360 sacos em partes diretamente proporcionais a 4, 7 e 9. Suponha que essas partes correspondentes às obras X, Y e Z sejam, respectivamente, x, y e z. Nesse caso:

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z}{9}=k$$

A soma das partes totaliza 360 sacos. Logo, $x+y+z=360$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9} = k$, temos:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9} = \frac{x + y + z}{4 + 7 + 9}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9} = \frac{360}{20}$$

$$\boxed{\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9} = 18}$$

O número de sacos de cimento que a obra Y receberá é:

$$\frac{y}{7} = 18$$

$$y = 18 \times 7$$

$$y = 126$$

Gabarito: Letra D.

8.(FGV/TRT MA/2022) Um terreno de 1280 m² foi dividido em 3 partes, proporcionais aos números: 2, 5/2 e 7/2.

A área da maior parte, em m², é

a) 400.

b) 440.

c) 480.

d) 520.

e) 560.

Comentários:

Devemos dividir 1280 m² em partes diretamente proporcionais a 2, 5/2 e 7/2. Suponha que essas partes sejam, respectivamente, a, b e c. Nesse caso:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = k$$

A soma das partes totaliza 1280 m². Logo, $a + b + c = 1280$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = k$, temos:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = \frac{a+b+c}{2+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = \frac{1280}{\frac{4+5+7}{2}}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = \frac{1280}{\frac{16}{2}}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = \frac{1280}{8}$$

$$\boxed{\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = 160}$$

Como estamos dividindo em partes diretamente proporcionais, a parte de maior área será a parte correspondente a 7/2, pois esse número é o maior entre 2, 5/2 e 7/2. Logo, a parte de maior área é c. Temos:

$$\frac{c}{\frac{7}{2}} = 160$$

$$c = 160 \times \frac{7}{2}$$

$$c = 560 \text{ m}^2$$

Gabarito: Letra E.

9. (FGV/SEFAZ BA/2022) Três grandezas L, M e N são tais que L é diretamente proporcional a M, e M é inversamente proporcional a N.

Quando M = 4 e N = 18, tem-se L = 60.

Quando L = 45, o valor de M + N é

a) 25.

b) 26.

c) 27.

d) 28.

e) 29.

Comentários:

Sabemos que a grandeza L é diretamente proporcional à grandeza M. Logo, sendo k_1 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{L}{M} = k_1$$

Além disso, a grandeza M é inversamente proporcional à grandeza N. Logo, sendo k_2 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$MN = k_2$$

Quando $M = 4$ e $N = 18$, tem-se $L = 60$. Logo:

$$\frac{L}{M} = k_1 \rightarrow \frac{60}{4} = k_1 \rightarrow \boldsymbol{k_1 = 15}$$

$$MN = k_2 \rightarrow 4 \times 18 = k_2 \rightarrow \boldsymbol{k_2 = 72}$$

Devemos determinar o valor de $M + N$ para o caso em que $L = 45$.

$$\frac{L}{M} = k_1 \rightarrow \frac{\mathbf{45}}{M} = 15 \rightarrow M = \frac{45}{15} \rightarrow \boldsymbol{M = 3}$$

$$MN = k_2 \rightarrow \mathbf{3} \times N = 72 \rightarrow \boldsymbol{N = 24}$$

Logo, **para $L = 45$**, temos:

$$M + N = 3 + 24$$

$$= 27$$

Gabarito: Letra C.

10.(FGV/PM SP/2021) Em certa cidade, verificou-se que a quantidade de assaltos ocorridos em cada mês era inversamente proporcional ao número de policiais presentes no patrulhamento das ruas nesse mês.

Sabe-se que, em abril, 400 policiais estiveram presentes no patrulhamento e 30 assaltos ocorreram, e que, em maio, o número de assaltos caiu para 24.

O número de policiais que estiveram presentes no patrulhamento no mês de maio foi

a) 320.

b) 360.

c) 420.

d) 460.

e) 500.

Comentários:

A quantidade de assaltos e o número de policiais são grandezas inversamente proporcionais. Isso significa que o produto das duas grandezas é uma constante.

$$(\text{Assaltos}) \times (\text{Policiais}) = k$$

Em abril temos 400 policiais e 30 assaltos. Logo:

$$30 \times 400 = k$$

$$k = 12.000$$

Em maio, temos um total de 24 assaltos e queremos saber o total de policiais.

$$(\text{Assaltos}) \times (\text{Policiais}) = k$$

$$24 \times (\text{Policiais}) = 12.000$$

$$(\text{Policiais}) = \frac{12.000}{24}$$

$$(\text{Policiais}) = 500$$

Gabarito: Letra E.

11.(FGV/BANESTES/2018) Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

Comentários:

Considere que temos N_{10} cédulas de 10 reais, N_{20} cédulas de 20 reais e N_{50} cédulas de 50 reais.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores. Logo:

$$\frac{N_{10}}{\frac{1}{10}} = \frac{N_{20}}{\frac{1}{20}} = \frac{N_{50}}{\frac{1}{50}} = k$$

O total de cédulas é 272. Logo, $N_{10} + N_{20} + N_{50} = 272$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{N_{10}}{\frac{1}{10}} = \frac{N_{20}}{\frac{1}{20}} = \frac{N_{50}}{\frac{1}{50}}$, temos:

$$\frac{N_{10}}{\frac{1}{10}} = \frac{N_{20}}{\frac{1}{20}} = \frac{N_{50}}{\frac{1}{50}} = \frac{N_{10} + N_{20} + N_{50}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{50}}$$

$$10N_{10} = 20N_{20} = 50N_{50} = \frac{272}{\frac{10+5+2}{100}}$$

$$10N_{10} = 20N_{20} = 50N_{50} = \frac{272}{\frac{17}{100}}$$

$$10N_{10} = 20N_{20} = 50N_{50} = 272 \times \frac{100}{17}$$

$$\boxed{10N_{10} = 20N_{20} = 50N_{50} = 1600}$$

O número de cédulas de cada tipo é:

$$10N_{10} = 1600 \ \rightarrow N_{10} = \frac{1600}{10} \rightarrow N_{10} = 160$$

$$20N_{20} = 1600 \ \rightarrow N_{20} = \frac{1600}{20} \rightarrow N_{20} = 80$$

$$50N_{50} = 1600 \ \rightarrow N_{50} = \frac{1600}{50} \rightarrow N_{50} = 32$$

A quantidade total de dinheiro armazenado é:

$$10 \times N_{10} + 20 \times N_{20} + 50 \times N_{50}$$

$$= 10 \times 160 + 20 \times 80 + 50 \times 32$$

$$= 1.600 + 1.600 + 1.600$$

$$= R\$ \ 4.800$$

Gabarito: Letra E.

12.(FGV/IBGE/2017) A quantia de 900 mil reais deve ser dividida em partes proporcionais aos números 4, 5 e 6.

A menor dessas partes corresponde a:

a) 210 mil reais;

b) 240 mil reais;

c) 270 mil reais;

d) 300 mil reais;

e) 360 mil reais.

Comentários:

A quantia total foi dividida em partes proporcionais a 4, 5 e 6. Se as partes forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k$$

A soma das partes totaliza 900 mil reais. Logo, $a + b + c = 900.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$, temos:

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = \frac{a + b + c}{4 + 5 + 6}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = \frac{900.000}{15}$$

$$\boxed{\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = 60.000}$$

A menor parte corresponde àquela que é diretamente proporcional ao menor número (4). Logo:

$$\frac{a}{4} = 60.000$$

$$a = R\$\ 240.000$$

Gabarito: Letra B.

13.(FGV/Pref. Paulínia/2016) A força do vento sobre a vela de um veleiro varia diretamente proporcional à área da vela e ao quadrado da velocidade do vento.

Considere que a força exercida pelo vento a 25 km/h sobre uma área de 1 m² seja de 10 libras.

Quando a força sobre uma área de 16 m² é de 40 libras, a velocidade do vento, em km/h, é de

a) 6,25.

b) 8,0.

c) 12,5.

d) 16,5.

e) 20,0.

Comentários:

A força do vento sobre a vela de um veleiro varia de modo **diretamente proporcional** à área da vela e ao quadrado da velocidade do vento. Nesse caso, podemos modelar o problema assim:

$$\frac{Força}{(Área) \times (Velocidade)^2} = k$$

A força exercida pelo vento a 25 km/h sobre uma área de 1 m² é de 10 libras. Com essas informações, podemos determinar a constante k:

$$\frac{10}{1 \times 25^2} = k$$

$$k = \frac{10}{25^2}$$

Observe que essa constante serve para o caso em que estamos lidando com força em libras, área em metros quadrados e velocidade em km/h.

A questão nos pergunta a velocidade do vento para quando a **área** é **16m²** e a **força** é de **40 libras**.

$$\frac{Força}{(Área) \times (Velocidade)^2} = k$$

$$\frac{40}{16 \times (Velocidade)^2} = \frac{10}{25^2}$$

$$\frac{40 \times 25^2}{16 \times 10} = (Velocidade)^2$$

$$\frac{4 \times 25^2}{16} = (Velocidade)^2$$

$$(Velocidade)^2 = \frac{25^2}{4}$$

$$(Velocidade) = \sqrt{\frac{25^2}{2^2}}$$

$$(Velocidade) = \frac{25}{2}$$

$$(Velocidade) = 12{,}5$$

Portanto, a velocidade em **km/h** é **12,5**.

Gabarito: Letra C.

14.(FGV/IBGE/2016) A grandeza G é diretamente proporcional à grandeza A e inversamente proporcional à grandeza B. Sabe-se que quando o valor de A é o dobro do valor de B, o valor de G é 10.

Quando A vale 144 e B vale 40, o valor de G é:

a) 15;

b) 16;

c) 18;

d) 20;

e) 24.

Comentários:

A grandeza G é diretamente proporcional à grandeza A e inversamente proporcional à grandeza B. Temos, então, a seguinte situação:

$$\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{A} \times \frac{1}{\mathrm{B}}} = k$$

Quando o valor de A é o dobro do valor de B, o valor de G é 10. Logo:

$$\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{A} \times \frac{1}{\mathrm{B}}} = k$$

$$\frac{10}{2\mathrm{B} \times \frac{1}{\mathrm{B}}} = k$$

$$\frac{10}{2} = k \ \rightarrow \boldsymbol{k = 5}$$

Devemos determinar o valor de G quando A vale 144 e B vale 40.

$$\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{A}\times\frac{1}{\mathrm{B}}}=k$$

$$\frac{\mathrm{G}}{144\times\frac{1}{40}}=\mathbf{5}$$

$$G=5\times144\times\frac{1}{40}$$

$$G=18$$

Gabarito: Letra C.

15.(FGV/CODEMIG/2015) Pela falta de energia, no dia 01 de junho todos os geradores de energia elétrica de uma fábrica foram ligados e o estoque de combustível que a fábrica possuía permitiria manter os geradores funcionando por 30 dias. Entretanto, depois de 10 dias de funcionamento de todos os geradores, a metade deles foi desligada.

O combustível restante permitiu que os outros geradores continuassem a funcionar até o dia:

a) 10 de julho;

b) 15 de julho;

c) 20 de julho;

d) 25 de julho;

e) 30 de julho.

Comentários:

Note que, inicialmente, temos um **combustível C** para manter **G geradores** funcionando por **30 dias**.

Passados 10 dias de funcionamento (10 de junho), $\frac{1}{3}$ do combustível foi consumido. Assim, após esse período, temos um **combustível $\frac{2}{3}C$** para manter **G geradores** funcionando por **20 dias**.

Ocorre, porém, que após esses 10 dias de operação, **metade dos geradores foram desligados**. Isso significa que, nesse momento, temos um **combustível $\frac{2}{3}C$** para manter **$\frac{G}{2}$ geradores**. Por quanto tempo conseguimos manter esses geradores operando?

O tempo de operação é uma grandeza **inversamente proporcional** ao número de geradores. Como dividimos o número de geradores por 2, o tempo em que uma mesma quantidade de combustível pode fazer operar os geradores deve ser multiplicado por 2. Logo, o **combustível $\frac{2}{3}C$** é suficiente para manter **$\frac{G}{2}$ geradores** por 2×20 = **40 dias**.

Ao acrescer **40 dias** à data de **10 de junho**, chega-se em **20 de julho**. O gabarito, portanto, é **letra C**.

Gabarito: Letra C.

16. (FGV/SSP AM/2015) José tem em sua microempresa três empregados cujos salários são proporcionais ao número de horas que trabalham por dia.

Empregado	Horas de trabalho por dia
Alex	5
Breno	7
Caio	8

José paga mensalmente R$ 5.200,00 pelos salários desses três empregados.

O salário de Caio é:

a) R$ 1.300,00;

b) R$ 1.820,00;

c) R$ 2.080,00;

d) R$ 2.220,00;

e) R$ 2.340,00.

Comentários:

O valor mensal deve ser dividido em partes proporcionais a 5, 7 e 8. Se os valores recebidos por Alex, Breno e Caio forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8} = k$$

A soma das partes totaliza 5.200 reais. Logo, $a + b + c = 5.200$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8}$, temos:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8} = \frac{a+b+c}{20}$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8} = \frac{5200}{20}$$

$$\boxed{\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8} = 260}$$

O salário de Caio é:

$$\frac{c}{8} = 260$$

$$c = R\$ \, 2.080$$

Gabarito: Letra C.

17. (FGV/BNB/2014) Francisco não tinha herdeiros diretos e assim, no ano de 2003, no dia do seu aniversário, fez seu testamento. Nesse testamento declarava que o saldo total da caderneta de poupança que possuía deveria ser dividido entre seus três sobrinhos em partes proporcionais às idades que tivessem no dia de sua morte. No dia em que estava redigindo o testamento, seus sobrinhos tinham 12, 18 e 20 anos. Francisco morreu em 2013, curiosamente, no dia do seu aniversário e, nesse dia, sua caderneta de poupança tinha exatamente R$ 300.000,00. Feita a divisão de acordo com o testamento, o sobrinho mais jovem recebeu:

a) R$ 72.000,00

b) R$ 82.500,00

c) R$ 94.000,00

d) R$ 112.500,00

e) R$ 120.000,00

Comentários:

Francisco morreu em 2013, **10 anos** após escrever o seu testamento. Nesse ano, seus sobrinhos tinham **22**, **28** e **30** anos.

Devemos dividir R$ 300.000 em partes diretamente proporcionais a 22, 28 e 30. Suponha que essas partes sejam, respectivamente, a, b e c. Nesse caso:

$$\frac{a}{22} = \frac{b}{28} = \frac{c}{30} = k$$

A soma das partes totaliza 300.000 reais. Logo, $a + b + c = 300.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a}{22} = \frac{b}{28} = \frac{c}{30}$, temos:

$$\frac{a}{22} = \frac{b}{28} = \frac{c}{30} = \frac{a+b+c}{22+28+30}$$

$$\frac{a}{22} = \frac{b}{28} = \frac{c}{30} = \frac{300.000}{80}$$

$$\boxed{\frac{a}{22} = \frac{b}{28} = \frac{c}{30} = 3.750}$$

O sobrinho mais jovem tem 22 anos. A quantia recebida por ele é:

$$\frac{a}{22} = 3750$$

$$a = R\$\, 82.500$$

Gabarito: Letra B.

18. (FGV/CGE MA/2014) Os irmãos Davi, Lorena e Pedro, com idades de 42, 48 e 60 anos, respectivamente, receberam uma determinada quantia como herança de seus pais. Fizeram um acordo e resolveram dividir a herança em partes diretamente proporcionais ao número de anos esperados de vida de cada um, baseados em uma expectativa de vida de 72 anos para os homens e de 78 anos para as mulheres.

Lorena recebeu R$ 240.000,00.

Davi e Pedro receberam, respectivamente,

a) R$ 210.000,00 e R$ 300.000,00.

b) R$ 210.000,00 e R$ 240.000,00.

c) R$ 240.000,00 e R$ 210.000,00.

d) R$ 240.000,00 e R$ 96.000,00.

e) R$ 300.000,00 e R$ 210.000,00.

Comentários:

Primeiramente, devemos determinar o número de anos esperados de vida dos três irmãos:

- Davi $\rightarrow 72 - 42 = 30;$
- Lorena $\rightarrow 78 - 48 = 30;$
- Pedro $\rightarrow 72 - 60 = 12.$

Logo, as quantias recebidas por Davi, Lorena e Pedro, que chamaremos de d, l e p, são diretamente proporcionais a 30, 30 e 12. Portanto:

$$\frac{d}{30} = \frac{l}{30} = \frac{p}{12} = k$$

Note que o enunciado nos diz que Lorena recebeu R$ 240.000, isto é, $l = 240.000$.

$$\frac{d}{30} = \frac{240.000}{30} = \frac{p}{12}$$

O valor recebido por Davi é:

$$\frac{d}{30} = \frac{240.000}{30} \rightarrow \boldsymbol{d = \text{R\$ } 240.000,00}$$

O valor recebido por Pedro é:

$$\frac{p}{12} = \frac{240.000}{30}$$

$$p = 12 \times \frac{240.000}{30}$$

$$\mathbf{p = \text{R\$ } 96.000,00}$$

Portanto, Davi e Pedro receberam, respectivamente, **R$ 240.000,00** e **R$ 96.000,00**.

Gabarito: Letra D.

19. (FGV/BNB/2014) Três grandezas A, B e C, são tais que A é diretamente proporcional a B e inversamente proporcional ao quadrado de C.

Quando B = 6 e C = 3 tem-se A = 1.

Quando A = 3 e C = 2, o valor de B é:

a) 1

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

Comentários:

A grandeza A é diretamente proporcional a B e inversamente proporcional ao quadrado de C. Temos, então, a seguinte situação:

$$\frac{A}{B \times \frac{1}{C^2}} = k$$

$$\boldsymbol{\frac{AC^2}{B} = k}$$

Quando B = 6 e C = 3 tem-se A = 1. Logo:

$$\frac{1 \times 3^2}{6} = k$$

$$\frac{9}{6} = k$$

$$\boldsymbol{k = \frac{3}{2}}$$

Devemos determinar o valor de B quando A = 3 e C = 2.

$$\boldsymbol{\frac{AC^2}{B} = k}$$

$$\frac{AC^2}{B} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3 \times 2^2}{B} = \frac{3}{2}$$

$$3 \times 2^2 \times \frac{2}{3} = B$$

$$B = 8$$

Gabarito: Letra E.

20. (FGV/ALBA/2014) Sobre três grandezas X, Y e Z, sabe-se que Z é diretamente proporcional ao quadrado de X e que X é inversamente proporcional a Y. Sabe-se ainda que quando X é igual a 10, Z é igual a 300 e Y é igual a 9.

Quando Z é igual a 243, tem-se

a) Y = 12.

b) X = 12.

c) Y = 10.

d) X = 10.

e) X = 8.

Comentários:

Pessoal, essa questão apresenta uma dificuldade mais elevada, pois apresenta duas proporções ao mesmo tempo.

Primeiramente, temos que **Z é diretamente proporcional ao quadrado de X**. Podemos modelar essa informação do seguinte modo:

$$\boldsymbol{\frac{Z}{X^2} = k_1}$$

Além disso, **X é inversamente proporcional a Y**. Logo:

$$\frac{X}{\frac{1}{Y}} = k_2$$

$$\boldsymbol{XY = k_2}$$

Sabe-se que quando **X é igual a 10**, **Z é igual a 300** e **Y é igual a 9**. A partir dessa informação, podemos determinar as duas constantes de proporcionalidade, k_1 e k_2.

$$\boldsymbol{\frac{Z}{X^2} = k_1}$$

$$\frac{300}{10^2} = k_1$$

$$\boldsymbol{k_1 = 3}$$

$$\boldsymbol{XY = k_2}$$

$$10 \times 9 = k_2$$

$$\boldsymbol{k_2 = 90}$$

Agora que determinamos as constantes de proporcionalidade , vamos determinar os valores de X e de Y quando **Z é igual a 243**.

$$\boldsymbol{\frac{Z}{X^2} = k_1}$$

$$\frac{243}{X^2} = \boldsymbol{3}$$

$$X^2 = \frac{243}{3}$$

$$X^2 = 81$$

$$X = 9$$

Agora que temos que **X é igual a 9** quando **Z é igual a 243**, podemos determinar o valor de **Y**.

$$\boldsymbol{XY = k_2}$$

$$9 \times Y = \boldsymbol{90}$$

$$Y = \frac{90}{9}$$

$$Y = 10$$

Logo, **quando Z é igual a 243**, **tem-se** $X = 9$ e $\mathbf{Y = 10}$.

Gabarito: Letra C.

LISTA DE QUESTÕES – FGV

Frações

1.(FGV/PMSP/2024) Um dado número somado com a sua terça parte dá como resultado 228. A soma dos algarismos do número dado é

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

e) 9.

2.(FGV/PMSP/2024) Seja $\frac{p}{q} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{3}{8}$, em que p e q são primos entre si, isto é, a fração está em sua forma irredutível.

O valor de $p + q$ é

a) 0.

b) 11.

c) 77.

d) 85.

e) 163.

3.(FGV/ALESC/2024) Um terreno de 1400m^2 foi dividido em três partes e suas áreas são representadas por A, B e C. Sabe-se que B é igual a dois terços de A e que C é igual a cinco sextos de B. A área do menor terreno é igual a

a) 280m^2.

b) 320m^2.

c) 350m^2.

d) 420m^2.

e) 630m^2.

4. (FGV/ALEP PR/2024) Uma turma do terceiro ano do ensino médio possui 40 estudantes, dos quais 16 são meninas e 24 são meninos. Uma professora da turma realizou uma enquete para saber se seus

estudantes preferiam disciplinas de ciências exatas ou de ciências humanas. Todos os estudantes da turma responderam à enquete indicando uma única dentre essas duas opções.

Do total de meninas da turma, 3/8 disseram preferir ciências humanas e as demais afirmaram preferir ciências exatas. Já do total de meninos, 1/4 responderam que preferem ciências exatas e os demais declararam preferência por ciências humanas.

Segundo essa enquete, assinale a fração do total de estudantes da turma preferem ciências exatas.

a) 1/2.

b) 2/5.

c) 3/5.

d) 5/8.

e) 7/8.

5.(FGV/PMERJ/2024) Duas fazendas A e B são vizinhas. Sabe-se que 3⁄4 da área da fazenda A está plantada com soja e que 2⁄5 da área da fazenda B está plantada com soja. Sabe-se ainda que a área da fazenda B é uma vez e meia a área da fazenda A.

A fração da área total das duas fazendas que está plantada com soja é:

a) $\frac{8}{15}$

b) $\frac{13}{20}$

c) $\frac{14}{25}$

d) $\frac{33}{40}$

e) $\frac{27}{50}$

6.(FGV/TRT-PB/2022)

$$\boldsymbol{a = \frac{5}{6}, b = \frac{7}{9}, c = \frac{13}{18}}$$

Colocando essas frações em ordem crescente a sequência correta é

a) $a < b < c$.

b) $b < a < c$.

c) $b < c < a$.

d) $c < a < b$.

e) $c < b < a$.

7.(FGV/PM SP/2022) Considere os produtos:

$$S = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2022}\right)$$

$$D = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2022}\right)$$

O produto SD é igual a

a) 2023/2022.

b) 2023/4044.

c) 2022/2023.

d) 4044/2023.

e) 1.

8.(FGV/CBM-RJ/2022) João recebeu certa quantia. Com a terça parte da quantia, pagou os gastos com o cartão de crédito, e pagou o aluguel com a quinta parte do restante.

Da quantia recebida, a fração que representa a parte que João ainda tem disponível é

a) 2/5

b) 3/5

c) 7/15

d) 8/15

e) 17/30

9.(FGV/CM Taubaté/2022) Marlene gasta 1/4 do seu salário com aluguel e, do que sobra, ela gasta 1/3 com alimentação. Após pagar o aluguel e a alimentação, a fração do salário de Marlene que sobra para as outras despesas é:

a) 5/7.

b) 5/12.

c) 1/2.

d) 2/7.

e) 2/5.

10.(FGV/CM Taubaté/2022) Benedito determinou em testamento que a quantia que estava na sua poupança fosse dividida entre seus 4 filhos, em ordem decrescente de idade, da seguinte forma: 1/3 para

o primeiro, 1/4 para o segundo, 1/5 para o terceiro e 1/6 para o quarto. Determinou ainda que a quantia restante fosse dada ao advogado que cuidou da questão.

A fração do total que o advogado recebeu foi

a) 1/10.

b) 1/12.

c) 1/15.

d) 1/18.

e) 1/20.

11.(FGV/PM SP/2022) Em uma caixa há várias bolas, cada uma de uma cor. As cores das bolas são: vermelho, azul, verde e rosa. Há, pelo menos, uma bola de cada cor.

Um terço das bolas são vermelhas, um quinto são azuis e 10 bolas são verdes.

O número mínimo de bolas rosas na caixa é

a) 1.

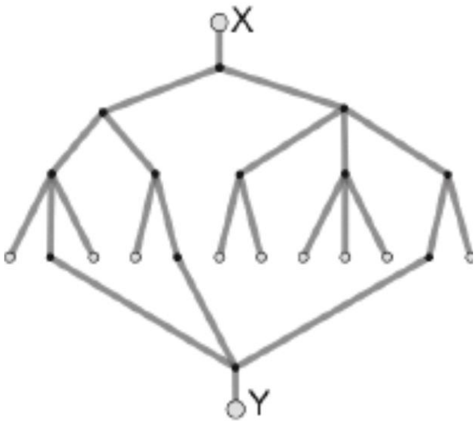
b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

12. (FGV/SEFAZ ES/2022) A figura a seguir mostra uma rede de canos de água em um plano vertical. Qualquer quantidade de água colocada na abertura X desce e divide-se em partes iguais em cada um dos pontos de divisão. Os pontos brancos no final de cada percurso são saídas.



A fração da quantidade de água que, colocada em X, sai por Y é

a) 1/3.

b) 3/8.

c) 5/12.

d) 5/24.

e) 7/24.

13. (FGV/PC RJ/2022) Considere a soma

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}+\frac{7}{10}=\frac{a}{b}$$

sendo os números naturais a e b primos entre si.

O valor da soma $a+b$ é:

a) 35;

b) 47;

c) 181;

d) 227;

e) 269.

14. (FGV/PC AM/2022) Geraldo resolveu se desfazer de sua coleção de miniaturas. Assim, ele deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson; das que sobraram, ele deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson e as 48 restantes ele deu para sua irmã Glória.

O número de miniaturas que Gilson recebeu foi

a) 12.

b) 16.

c) 18.

d) 24.

e) 48.

15. (FGV/SSP AM/2022) Os alunos de uma turma estavam se preparando para um concurso. Constatou-se que: a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC, a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM, e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol.

O número de alunos dessa turma que torcem pelo Manaus FC é

a) 21.

b) 25.

c) 26.

d) 28.

e) 35.

16.(FGV/Pref. Angra/2019) Se a soma das frações 1/4 + 2/5 é igual a n/100, o valor de n é

a) 55.

b) 65.

c) 75.

d) 85.

e) 95.

17. (FGV/Pref. Boa Vista/2018) O piso do pátio da escola será pintado com tinta antiderrapante. Na quinta-feira os operários realizaram a quarta parte do trabalho e, na sexta-feira, pintaram a terça parte do restante.

A fração do trabalho que ficou para a semana seguinte foi:

a) 1/2;

b) 1/3;

c) 2/3;

d) 3/4;

e) 5/6.

18.(FGV/ALERO/2018) João recebeu seu salário e fez três gastos sucessivos. Primeiro, gastou a terça parte do que recebeu, depois gastou a quarta parte do restante e, em seguida, gastou dois quintos do restante. A quantia que restou do salário de João é representada pela fração

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{3}{10}$

19. (FGV/Pref. Salvador/2017) Uma piscina infantil contém 1000 litros de água. Devido a um pequeno vazamento, a cada dia, um décimo da quantidade de água existente na piscina no início do dia é perdido. Se nenhuma água adicional é retirada ou colocada na piscina, ao fim de três dias, o volume de água na piscina será de

a) 700 litros.

b) 710 litros.

c) 729 litros.

d) 732 litros.

e) 744 litros.

20.(FGV/IBGE/2017) Em certo concurso inscreveram-se 192 pessoas, sendo a terça parte, homens. Desses, apenas a quarta parte passou.

O número de homens que passaram no concurso foi:

a) 12;

b) 15;

c) 16;

d) 18;

e) 20.

21.(FGV/IBGE/2016) Um segmento de reta de comprimento C é dividido em cinco partes iguais, e a segunda e a quarta partes são retiradas. A seguir, cada uma das partes restantes é também dividida em cinco partes iguais, e as segundas e as quartas partes são retiradas. A soma dos comprimentos das partes restantes é:

a) $\frac{9C}{25}$;

b) $\frac{8C}{25}$;

c) $\frac{6C}{25}$;

d) $\frac{4C}{25}$;

e) $\frac{3C}{25}$;

22. (FGV/TJ PI/2015) Francisco vendeu seu carro e, do valor recebido, usou a quarta parte para pagar dívidas, ficando então com R$ 21.600,00. Francisco vendeu seu carro por:

a) R$ 27.600,00;

b) R$ 28.400,00;

c) R$ 28.800,00;

d) R$ 29.200,00;

e) R$ 29.400,00.

23. (FGV/TJ PI/2015) Em uma determinada empresa, metade de seus funcionários vai para casa de ônibus, um quinto vai de carro, um oitavo vai de bicicleta e os demais vão a pé.

A fração dos funcionários que vai para casa a pé equivale a:

a) $\frac{4}{5}$;

b) $\frac{3}{15}$;

c) $\frac{7}{15}$;

d) $\frac{3}{40}$;

e) $\frac{7}{40}$;

24. (FGV/SEDUC AM/2014) Se $\frac{3}{5}$ de uma dúzia de bananas vale tanto quanto quatro maçãs, então $\frac{1}{3}$ de cinco maçãs vale tanto quanto

a) uma banana.

b) duas bananas.

c) três bananas.

d) quatro bananas.

e) cinco bananas.

Gabarito – FGV

Frações

1. LETRA E
2. LETRA E
3. LETRA C
4. LETRA B
5. LETRA E
6. LETRA E
7. LETRA B
8. LETRA D
9. LETRA C
10. LETRA E
11. LETRA D
12. LETRA E
13. LETRA E
14. LETRA D
15. LETRA D
16. LETRA B
17. LETRA A
18. LETRA E
19. LETRA C
20. LETRA C
21. LETRA A
22. LETRA C
23. LETRA E
24. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES – FGV

Razão e proporção

1.(FGV/TCE PA/2024) Na cidade de Belém, o Bosque Rodrigues Alves tem a forma de um retângulo.

Em um mapa na escala 1:20.000 esse retângulo possui lados medindo 2,5cm e 1,6cm.

A área do Bosque em metros quadrados é

a) 4.000.

b) 16.000.

c) 40.000.

d) 160.000.

e) 400.000.

2. (FGV/PMSP/2024) Em um encontro de 57 Policiais Militares, há apenas sargentos, cabos e soldados. Para cada cabo, há 5 soldados, e para cada sargento, há 3 cabos.

O número de soldados nesse encontro é igual a

a) 50.

b) 48.

c) 45.

d) 42.

e) 40.

3. (FGV/ALEP PR/2024) As grandes distancias entre objetos astronômicos (estrelas, planetas, etc.) são, em geral, expressas por meio da distância que a luz percorre em determinada unidade de tempo no vácuo. Por exemplo, um ano-luz é a distância que a luz percorre em um ano, um minuto-luz é a distância que a luz percorre em um minuto no vácuo.

Assim expressamos a distância média entre a Terra e Sol, que é de, aproximadamente, 8,3 minutos-luz. Já a distância média entre a Terra e Lua é de, aproximadamente, 1,3 segundos-luz.

Considerando esses valores, assinale a o número que melhor aproxima a razão entre as distâncias entre a Terra e o Sol e entre a Terra e a Lua.

a) 6,38

b) 70,00

c) 100,79

d) 283,70

e) 383,07

4. (FGV/ALEP PR/2024) Marcela e Caio estão treinando para participar de uma meia maratona. Marcela consegue fazer um percurso próximo à sua casa em 45 minutos, a uma velocidade média de 20km/h.

Caio faz o mesmo percurso em 1 hora e 15 minutos.

Assinale a opção que indica a velocidade média de Caio nesse percurso.

a) 10km/h

b) 12km/h

c) 15km/h

d) 16km/h

e) 25km/h

5.(FGV/Câmara dos Deputados/2023) Álvaro e Léo correm em uma pista circular em sentido horário. Eles partem de pontos diametralmente opostos. Álvaro tem o triplo da velocidade de Léo, e dá 24 voltas na pista.

O número de vezes que Álvaro ultrapassa Léo é igual a

a) 16.

b) 18.

c) 20.

d) 22.

e) 24.

6.(FGV/Câmara dos Deputados/2023) Duas moscas partem ao mesmo tempo de um ponto do chão de uma sala e voam em linha vertical reta em direção ao teto. A primeira mosca, que tem o dobro da velocidade da segunda, bate no teto e volta pelo mesmo caminho.

Quando elas se encontram, elas estão

a) a igual distância do teto e do chão.

b) duas vezes mais perto do teto do que do chão.

c) duas vezes mais perto do chão do que do teto.

d) três vezes mais perto do teto do que do chão.

e) três vezes mais perto do chão do que do teto.

7.(FGV/TRT-PB/2022) Sobre 4 grandezas X, Y, Z e W sabe-se que:

A razão de W para X é 4:3

A razão de Y para Z é 3:2

A razão de Z para X é 1:6

A razão de X+Y para Z+W é

a) 5:6

b) 4:7

c) 3:5

d) 6:11

e) 8:11

8. (FGV/TRT-PB/2022) Em uma reunião de condomínio, há jovens com até 21 anos, adultos com mais de 21 e menos de 60 anos, e idosos com 60 anos ou mais. Para cada 2 jovens há 5 adultos e para cada 7 adultos há 3 idosos.

A razão entre o número de jovens e o número total de pessoas presentes a essa reunião é

a) 2/15.

b) 7/15.

c) 3/14.

d) 2/17.

e) 7/32.

9.(FGV/TRT MA/2022) Michael coleciona moedas brasileiras, americanas e francesas. Para cada 3 moedas americanas Michael tem 7 moedas brasileiras e para cada 5 moedas brasileiras, ele tem 2 francesas.

Com relação às moedas de Michael, a razão entre a quantidade de moedas brasileiras e a quantidade de moedas não brasileiras é igual a

a) 7/5.

b) 12/7.

c) 25/19.

d) 30/23.

e) 35/29.

10.(FGV/SEAD-AP/2022) Em uma urna há apenas bolas azuis, brancas e verdes. Para cada 2 bolas azuis há 5 bolas brancas. Para cada 3 bolas verdes há uma bola azul.

A razão entre o número de bolas brancas e o número total de bolas nessa urna é igual a

a) 3/8.

b) 4/9.

c) 5/13.

d) 6/11.

e) 7/15.

11.(FGV/SEAD-AP/2022) O Professor Manoel mora em Macapá e sabe que o índice pluviométrico de cada mês na região varia bastante ao longo do ano. Para facilitar seu estudo desse tema Manoel criou a Escala pluviométrica Amapaense cuja unidade é o "grau PA" (°PA). A escala é linear e o zero e o 100 dessa escala correspondem, respectivamente, ao menor e ao maior índice pluviométrico ocorrido em algum mês, em milímetros de chuva. A relação entre a escala PA e o índice pluviométrico está no quadro abaixo.

Escala PA	Quantidade de chuva em 1 mês em mm
0	30
100	400

O mês de agosto do ano passado foi atípico tendo ocorrido mais chuvas que o esperado normalmente. Nesse mês, Manoel registrou em sua escala 55°PA. Nesse referido mês, a quantidade de chuvas em mm foi, aproximadamente,

a) 234.

b) 245.

c) 252.

d) 264.

e) 271.

12.(FGV/SEJUSP-MG/2022) Em um grupo de 120 pessoas, 50 são adultos (de 21 a 60 anos) e para cada 2 jovens (até 20 anos) há 5 idosos (acima de 60 anos).

Nesse grupo, o número total de vacinados contra a COVID-19 é o triplo do número de não vacinados. Além disso, metade dos vacinados são idosos e 1/3 dos vacinados são adultos.

É correto concluir que nesse grupo de pessoas há

a) 20 adultos não vacinados.

b) 20 jovens vacinados.

c) 50 idosos vacinados.

d) 10 idosos não vacinados.

e) 10 jovens não vacinados.

13. (FGV/CBM AM/2022) Em um grupo de pessoas, o número de homens é igual ao número de mulheres. Selecionam-se então $\frac{2}{5}$ dos homens $\frac{3}{4}$ das mulheres e forma-se um novo grupo.

Nesse novo grupo, em relação ao total de pessoas, as mulheres representam

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{7}{20}$

d) $\frac{15}{23}$

e) $\frac{17}{25}$

14.(FGV/CBM AM/2022) Em uma Unidade Estudantil há 3 turmas de aprendizes: Turma A, Turma B e Turma C. A razão entre o número de aprendizes da Turma A e o número de aprendizes da Turma B é $\frac{6}{5}$. A razão entre o número de aprendizes da Turma A e o número de aprendizes da Turma C é $\frac{5}{4}$.

O número mínimo de aprendizes nessa Unidade Estudantil é

a) 76.

b) 77.

c) 78.

d) 79.

e) 80.

15. (FGV/IMBEL/2021) Duas urnas contêm a mesma quantidade de fichas. Nas duas urnas só há fichas vermelhas ou azuis. Na primeira urna, a razão do número de fichas vermelhas para o número de fichas azuis é de 5:1 e, na segunda urna, de 3:1.

No total, há 45 fichas azuis.

O total de fichas vermelhas é

a) 180.

b) 175.

c) 171.

d) 165.

e) 162.

16.(FGV/PM SP/2021) Em um grupo de N pessoas, há 12 homens a mais do que mulheres. Retirando-se 6 homens desse grupo, a razão entre o número de homens e o número de mulheres passa a ser de $\frac{7}{5}$.

O valor de N é

a) 36.

b) 42.

c) 45.

d) 48.

e) 54.

17.(FGV/IBGE/2017) Uma equipe de trabalhadores de determinada empresa tem o mesmo número de mulheres e de homens. Certa manhã, $\frac{3}{4}$ das mulheres e $\frac{2}{3}$ dos homens dessa equipe saíram para um atendimento externo.

Desses que foram para o atendimento externo, a fração de mulheres é:

a) $\frac{3}{4}$;

b) $\frac{8}{9}$;

c) $\frac{5}{7}$;

d) $\frac{8}{13}$;

e) $\frac{9}{17}$.

18.(FGV/IBGE/2017) Na equipe de Mário há 6 mulheres a mais do que homens. Sabendo que essa equipe tem ao todo 60 membros, a razão do número de mulheres para o número de homens é:

a) $\frac{6}{5}$;

b) $\frac{5}{4}$;

c) $\frac{3}{5}$;

d) $\frac{20}{11}$;

e) $\frac{11}{9}$.

19. (FGV/Pref. Salvador/2017) Uma árvore é 4 m mais alta do que outra árvore. As alturas das duas árvores estão na razão $\frac{2}{3}$.

A árvore mais alta mede

a) 6 m.

b) 8 m.

c) 9 m.

d) 12 m.

e) 15 m.

20. (FGV/MRE/2016) Em uma reunião, as únicas pessoas presentes são políticos de três partidos: PA, PB e PC. Para cada três políticos do partido PA há dois políticos do partido PB e, para cada cinco políticos do partido PB, há quatro políticos do partido PC.

Nessa reunião, a razão entre o número de políticos do partido PB e o número total de políticos é:

a) $\frac{10}{33}$.

b) $\frac{11}{34}$.

c) $\frac{12}{35}$.

d) $\frac{13}{36}$.

e) $\frac{14}{37}$.

21. (FGV/MPE RJ/2016) O carro de Joana faz 15 km por litro de gasolina e o carro de Laura faz 10 km por litro de gasolina.

Joana e Laura percorreram exatamente a mesma distância em quilômetros com seus respectivos carros.

No total, a razão entre quilômetros percorridos e o número de litros de gasolina gastos pelas duas foi igual a:

a) 11,5;

b) 12,0;

c) 12,5;

d) 13,0;

e) 13,5.

22. (FGV/PGE RO/2015) Duas urnas contêm apenas bolas brancas e bolas pretas. Na primeira urna, há 240 bolas e, para cada 5 bolas brancas, há 7 bolas pretas. Na segunda, há 280 bolas e, para cada 5 bolas brancas, há 9 bolas pretas. Considerando-se todas as bolas das duas urnas, para cada 5 bolas brancas, há:

a) 8 bolas pretas;

b) 10 bolas pretas;

c) 12 bolas pretas;

d) 14 bolas pretas;

e) 16 bolas pretas.

23.(FGV/TJ PI/2015) Em uma urna há somente bolas brancas, bolas pretas e bolas vermelhas. Para cada bola branca há três bolas pretas e para cada duas bolas pretas há cinco bolas vermelhas.

A razão entre a quantidade de bolas pretas e a quantidade total de bolas na urna é:

a) $\frac{3}{10}$;

b) $\frac{4}{19}$;

c) $\frac{5}{21}$;

d) $\frac{6}{23}$;

e) $\frac{7}{25}$;

24.(FGV/Pref. Osasco/2014) Em uma equipe operacional com 24 membros, a razão entre o número de mulheres e o número de homens é $\frac{3}{5}$.

Nessa equipe, o número de homens a mais do que o de mulheres é de:

a) 3;

b) 4;

c) 5;

d) 6;

e) 8.

25. (FGV/TCE-BA/2014) Em uma sala há advogados, juízes e desembargadores, e apenas eles. Para cada dois desembargadores há três juízes e para cada quatro juízes há sete advogados.

A razão entre a quantidade de juízes e a quantidade total de pessoas na sala é

a) $\frac{11}{39}$

b) $\frac{12}{41}$

c) $\frac{14}{43}$

d) $\frac{13}{45}$

e) $\frac{15}{47}$

GABARITO – FGV

Razão e proporção

1. LETRA D
2. LETRA C
3. LETRA E
4. LETRA B
5. LETRA A
6. LETRA B
7. LETRA A
8. LETRA E
9. LETRA E
10. LETRA C
11. LETRA A
12. LETRA A
13. LETRA D
14. LETRA D
15. LETRA C
16. LETRA B
17. LETRA E
18. LETRA E
19. LETRA D
20. LETRA A
21. LETRA B
22. LETRA A
23. LETRA D
24. LETRA D
25. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES – FGV

Proporcionalidade

1.(FGV/PPBA/2024) Um total de 96 bombons será repartido entre 3 irmãs em quantidades proporcionais a 4, 5 e 7.

Comparada àquela que recebeu a menor quantidade, a irmã que recebeu a maior quantidade terá

a) 6 bombons a mais.

b) 12 bombons a mais.

c) 15 bombons a mais

d) 16 bombons a mais.

e) 18 bombons a mais.

2. (FGV/ALE TO/2024) As filhas de Nepomuceno têm 5 e 9 anos de idade. Ele dividirá R$420,00 entre elas de forma inversamente proporcional às suas idades.

Logo

a) a mais nova receberá R$120,00 a mais que a mais velha.

b) a mais nova receberá R$150,00 a mais que a mais velha.

c) a mais nova receberá R$270,00 a mais que a mais velha.

d) a mais velha receberá R$120,00 a mais que a mais nova.

e) a mais velha receberá R$150,00 a mais que a mais nova.

3.(FGV/SEFAZ-MG/2023) Uma grandeza A é diretamente proporcional à grandeza B que, por sua vez, é inversamente proporcional ao quadrado da grandeza C.

Quando A = 12, tem-se B = 4 e C = 6.

Quando C = 4, o valor de A é

a) 144.

b) 72.

c) 27.

d) 18.

e) 12.

4. (FGV/CM Taubaté/2022) Sobre 3 grandezas X, Y e Z sabe-se que X é diretamente proporcional a Y e que Z é inversamente proporcional a X.

Quando Y = 3, tem-se X = 6 e Z = 1/2.

Quando X = 3, o valor de Y + Z é

a) 5/2.

b) 3/2.

c) 4.

d) 4/3.

e) 7/3.

5.(FGV/TRT MA/2022) Uma grandeza A é diretamente proporcional a B e inversamente proporcional a C. Quando B = 30 e C = 20, o valor de A é 60.

Quando o valor de C é o dobro do valor de B, o valor de A é

a) 10.

b) 20.

c) 30.

d) 40.

e) 50.

6.(FGV/TRT-PB/2022) Uma distribuidora de produtos químicos recebeu 1600 litros de certo composto e deve distribuir toda essa quantidade entre 5 laboratórios em partes proporcionais aos números 3, 4, 5, 6 e 7.

O laboratório que receber a menor quantidade receberá

a) 190 litros.

b) 192 litros.

c) 194 litros.

d) 196 litros.

e) 198 litros.

7.(FGV/TRT MA/2022) Uma empresa de engenharia está realizando as obras X, Y e Z. Foram comprados 360 sacos de cimento que deverão ser repartidos entre as obras X, Y e Z em partes proporcionais aos números 4, 7 e 9, respectivamente.

O número de sacos de cimento que a obra Y receberá é

a) 108.

b) 112.

c) 120.

d) 126.

e) 144.

8.(FGV/TRT MA/2022) Um terreno de 1280 m² foi dividido em 3 partes, proporcionais aos números: 2, 5/2 e 7/2.

A área da maior parte, em m², é

a) 400.

b) 440.

c) 480.

d) 520.

e) 560.

9. (FGV/SEFAZ BA/2022) Três grandezas L, M e N são tais que L é diretamente proporcional a M, e M é inversamente proporcional a N.

Quando M = 4 e N = 18, tem-se L = 60.

Quando L = 45, o valor de M + N é

a) 25.

b) 26.

c) 27.

d) 28.

e) 29.

10.(FGV/PM SP/2021) Em certa cidade, verificou-se que a quantidade de assaltos ocorridos em cada mês era inversamente proporcional ao número de policiais presentes no patrulhamento das ruas nesse mês.

Sabe-se que, em abril, 400 policiais estiveram presentes no patrulhamento e 30 assaltos ocorreram, e que, em maio, o número de assaltos caiu para 24.

O número de policiais que estiveram presentes no patrulhamento no mês de maio foi

a) 320.

b) 360.

c) 420.

d) 460.

e) 500.

11.(FGV/BANESTES/2018) Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

12.(FGV/IBGE/2017) A quantia de 900 mil reais deve ser dividida em partes proporcionais aos números 4, 5 e 6.

A menor dessas partes corresponde a:

a) 210 mil reais;

b) 240 mil reais;

c) 270 mil reais;

d) 300 mil reais;

e) 360 mil reais.

13.(FGV/Pref. Paulínia/2016) A força do vento sobre a vela de um veleiro varia diretamente proporcional à área da vela e ao quadrado da velocidade do vento.

Considere que a força exercida pelo vento a 25 km/h sobre uma área de 1 m^2 seja de 10 libras.

Quando a força sobre uma área de 16 m^2 é de 40 libras, a velocidade do vento, em km/h, é de

a) 6,25.

b) 8,0.

c) 12,5.

d) 16,5.

e) 20,0.

14.(FGV/IBGE/2016) A grandeza G é diretamente proporcional à grandeza A e inversamente proporcional à grandeza B. Sabe-se que quando o valor de A é o dobro do valor de B, o valor de G é 10.

Quando A vale 144 e B vale 40, o valor de G é:

a) 15;

b) 16;

c) 18;

d) 20;

e) 24.

15.(FGV/CODEMIG/2015) Pela falta de energia, no dia 01 de junho todos os geradores de energia elétrica de uma fábrica foram ligados e o estoque de combustível que a fábrica possuía permitiria manter os geradores funcionando por 30 dias. Entretanto, depois de 10 dias de funcionamento de todos os geradores, a metade deles foi desligada.

O combustível restante permitiu que os outros geradores continuassem a funcionar até o dia:

a) 10 de julho;

b) 15 de julho;

c) 20 de julho;

d) 25 de julho;

e) 30 de julho.

16. (FGV/SSP AM/2015) José tem em sua microempresa três empregados cujos salários são proporcionais ao número de horas que trabalham por dia.

Empregado	Horas de trabalho por dia
Alex	5
Breno	7
Caio	8

José paga mensalmente R$ 5.200,00 pelos salários desses três empregados.

O salário de Caio é:

a) R$ 1.300,00;

b) R$ 1.820,00;

c) R$ 2.080,00;

d) R$ 2.220,00;

e) R$ 2.340,00.

17. (FGV/BNB/2014) Francisco não tinha herdeiros diretos e assim, no ano de 2003, no dia do seu aniversário, fez seu testamento. Nesse testamento declarava que o saldo total da caderneta de poupança que possuía deveria ser dividido entre seus três sobrinhos em partes proporcionais às idades que tivessem no dia de sua morte. No dia em que estava redigindo o testamento, seus sobrinhos tinham 12, 18 e 20 anos. Francisco morreu em 2013, curiosamente, no dia do seu aniversário e, nesse dia, sua caderneta de poupança tinha exatamente R$ 300.000,00. Feita a divisão de acordo com o testamento, o sobrinho mais jovem recebeu:

a) R$ 72.000,00

b) R$ 82.500,00

c) R$ 94.000,00

d) R$ 112.500,00

e) R$ 120.000,00

18. (FGV/CGE MA/2014) Os irmãos Davi, Lorena e Pedro, com idades de 42, 48 e 60 anos, respectivamente, receberam uma determinada quantia como herança de seus pais. Fizeram um acordo e resolveram dividir a herança em partes diretamente proporcionais ao número de anos esperados de vida de cada um, baseados em uma expectativa de vida de 72 anos para os homens e de 78 anos para as mulheres.

Lorena recebeu R$ 240.000,00.

Davi e Pedro receberam, respectivamente,

a) R$ 210.000,00 e R$ 300.000,00.

b) R$ 210.000,00 e R$ 240.000,00.

c) R$ 240.000,00 e R$ 210.000,00.

d) R$ 240.000,00 e R$ 96.000,00.

e) R$ 300.000,00 e R$ 210.000,00.

19. (FGV/BNB/2014) Três grandezas A, B e C, são tais que A é diretamente proporcional a B e inversamente proporcional ao quadrado de C.

Quando B = 6 e C = 3 tem-se A = 1.

Quando A = 3 e C = 2, o valor de B é:

a) 1

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

20. (FGV/ALBA/2014) Sobre três grandezas X, Y e Z, sabe-se que Z é diretamente proporcional ao quadrado de X e que X é inversamente proporcional a Y. Sabe-se ainda que quando X é igual a 10, Z é igual a 300 e Y é igual a 9.

Quando Z é igual a 243, tem-se

a) Y = 12.

b) X = 12.

c) Y = 10.

d) X = 10.

e) X = 8.

GABARITO – FGV

Proporcionalidade

1. LETRA E
2. LETRA A
3. LETRA C
4. LETRA A
5. LETRA B
6. LETRA B
7. LETRA D
8. LETRA E
9. LETRA C
10. LETRA E
11. LETRA E
12. LETRA B
13. LETRA C
14. LETRA C
15. LETRA C
16. LETRA C
17. LETRA B
18. LETRA D
19. LETRA E
20. LETRA C

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.