Aula 00

PETROBRAS (Economia) Matemática

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

25 de Junho de 2024

Índice

AVISO IMPORTANTE!

Olá, Alunos (as)!

Passando para informá-los a respeito da **disposição das questões** dentro do nosso material didático. Informamos que a escolha das bancas, dentro dos nossos Livros Digitais, é feita de maneira estratégica e pedagógica pelos nossos professores a fim de proporcionar a melhor didática e o melhor direcionamento daquilo que mais se aproxima do formato de cobrança da banca do seu concurso.

Assim, o formato de questões divididas por tópico facilitará o seu processo de estudo, deixando mais alinhado às disposições constantes no edital.

No mais, continuaremos à disposição de todos no Fórum de dúvidas!

Atenciosamente,

Equipe Exatas

Estratégia Concursos

APRESENTAÇÃO DO CURSO

Olá, pessoal! Tudo bem?

É com grande satisfação que damos início ao nosso curso!

Os professores **Eduardo Mocellin, Francisco Rebouças** e **Vinicius Veleda** ficarão responsáveis pelo **Livro Digital**.

Antes de continuarmos, vamos apresentar os professores do material escrito:

Eduardo Mocellin: Fala, pessoal! Meu nome é Eduardo Mocellin, sou professor de Matemática e de Raciocínio Lógico do Estratégia Concursos e engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Sinto-me feliz em poder contribuir com a sua aprovação! Não deixe de me seguir no Instagram: **@edu.mocellin**

Francisco Rebouças: Fala, alunos! Aqui é o Francisco Rebouças, professor de Matemática do Estratégia Concursos. Sou Engenheiro Aeroespacial formado pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Saiba que será uma honra fazer parte da sua jornada rumo à aprovação e que estaremos sempre aqui para auxiliá-los com o que precisarem. Um grande abraço e nos vemos nas aulas!

Vinicius Veleda: Olá, caros alunos! Sou Auditor Fiscal do Estado do Rio Grande do Sul. Professor de Matemática e Matemática Financeira do Estratégia Concursos. Aprovado nos Concursos de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda dos Estados do Rio Grande do Sul (SEFAZ RS - 2019), Santa Catarina (SEFAZ SC - 2018) e Goiás (SEFAZ GO - 2018). Formado em Engenharia de Petróleo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com graduação sanduíche em Engenharia Geológica pela Universidade Politécnica de Madrid (UPM). Pela UFRJ, fui campeão sul americano do Petrobowl (Buenos Aires) e, posteriormente, Campeão Mundial (Dubai). Cursei meu ensino médio na Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx). Contem comigo nessa trajetória! **@viniciusveleda**

O material escrito em **PDF** está sendo construído para ser sua fonte **autossuficiente** de estudos. Isso significa que o livro digital será **completo** e **voltado para o seu edital**, justamente para que você não perca o seu precioso tempo "caçando por aí" o conteúdo que será cobrado na sua prova. Ademais, sempre que necessário, você poderá fazer perguntas sobre as aulas no **fórum de dúvidas**. **Bons estudos!**

TEORIA DOS CONJUNTOS

Introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição de Conjunto

Iniciaremos o nosso estudo da matemática por **Teoria dos Conjuntos**. A escolha desse conteúdo é **cuidadosamente pensada** para que você possa formar **uma base sólida** que lhe servirá de alicerce na construção de toda matemática necessária a sua prova.

A palavra "conjunto" significa exatamente o que você deve estar pensando: uma espécie de **grupo**, **lista** ou **uma coleção** de determinado objeto. Observe alguns exemplos de **como podemos representar** conjuntos na matemática:

- $A = \{a, b, c, d, e\}$
- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

O conjunto A é formado pelas **5 primeiras letras** no nosso alfabeto. O conjunto B é formado por **5 números pares**. O conjunto C é formado por **10 números ímpares**. Você pode estar se perguntando: *só podemos fazer conjuntos de números e letras?* **A resposta é não!** Podemos criar conjuntos de basicamente qualquer coisa, desde um conjunto representando **os funcionários de determinada empresa** a **conjuntos formados por outros conjuntos!** Por exemplo, o conjunto E lista alguns professores de exatas do Estratégia Concursos.

- $E = \{Francisco, Eduardo, Vinicius, Luana, Djefferson\}$

Primeiramente, note que um conjunto muitas vezes aparecerá com seus elementos listados dentro de um par de chaves. Por isso, sempre que for escrever algum conjuntos, não esqueça de colocar seus elementos aqui dentro: $\{\ \}$. É também usual as pessoas nomearem seus conjuntos com letras maiúsculas, mas **isso não é mandatório, nem necessário** em algumas situações.

Relação de Pertinência

Quando um elemento faz parte de determinado conjunto, dizemos que **o elemento PERTENCE ao conjunto**. Essa relação de pertinência **entre um elemento e um conjunto** é representada pelo símbolo $\in$.

- $b \in A$ -- **Lemos**: b **pertence** a A;
- $4 \in B$ -- **Lemos**: 4 **pertence** a B;
- $15 \in C$ -- **Lemos**: 15 **pertence** a C;

Atente-se à simbologia! Podemos dizer que um elemento **não pertence** a um determinado conjunto. Para isso, utilizamos o símbolo "não pertence": $\notin$.

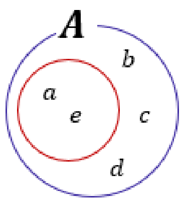
- $z \notin A$ -- z **não pertence** a A;
- $100 \notin B$ -- 100 **não pertence** a B;
- $2 \notin C$ -- 2 **não pertence** a C;
- $Beltrano \notin E$ -- $Beltrano$ **não pertence** a E.

Relação de Inclusão

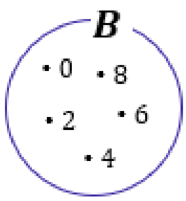
Existe mais um tipo de relação que devemos estudar: **a relação de inclusão**. Nesse tipo de relação, é estabelecido **um relacionamento entre dois conjuntos** e não mais entre um elemento e outro conjunto. Para isso, usamos uma simbologia específica que você deverá guardar: $\subset, \not\subset, \supset$ e $\not\supset$. Vamos ver com calma o que cada um deles diz! Considere $\boldsymbol{A = \{a, b, c, d, e\}}$, $\boldsymbol{B = \{0, 2, 4, 6, 8\}}$ e $\boldsymbol{C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}}$.

- $\{a, e\} \subset A$ -- **Lemos**:$\{a, e\}$ **está contido** em A;
- $\{0, 2, 8\} \subset B$ -- **Lemos**: $\{0, 2, 8\}$ **está contido** em B;
- $\{1, 3, 5, 19\} \subset C$ -- **Lemos**: $\{1, 3, 5, 19\}$ **está contido** em C;
- $\{Francisco, Eduardo\} \subset E$ -- **Lemos**: $\{Francisco, Eduardo\}$ **está contido** em E.

Perceba que agora não estamos estabelecemos uma relação entre um elemento e um conjunto. **A relação de inclusão envolve 2 conjuntos!** Diante disso, podemos introduzir um novo termo: **o subconjunto**. O subconjunto nada mais é do que **parte de um conjunto maior**. Quando dizemos, por exemplo, que $\boldsymbol{\{a, e\}}$ **está contido em** $\boldsymbol{A}$, estamos dizendo, com outras palavras, que $\{a, e\}$ é um subconjunto de $\boldsymbol{A}$.



O diagrama acima ajuda a compreender a relação de inclusão. Observe que **o conjunto** $\boldsymbol{\{a, e\}}$ **está inteiramente contido em** $\boldsymbol{A}$. Nessas condições, dizemos que $\{a, e\}$ está contido em A ou ainda que $\{a, e\}$ é um subconjunto de A. Algumas vezes, você poderá ver **o termo "parte" sendo usando como sinônimo de subconjunto**. Agora, imagine a seguinte situação:



Nesse caso, temos que $\{a, e\} \not\subset B$-- **Lemos**: $\{a, e\}$ não está contido em B ou $\{a, e\}$ não é um subconjunto de B. Vamos ver mais alguns exemplos de quando **um conjunto não está contido em outro**:

- $\{a, e, f\} \not\subset A$

- $\{1, 3, 5\} \not\subset B$
- $\{0, 1\} \not\subset C$
- $\{Sicrano, Beltrano\} \not\subset E$

Perceba que **basta um elemento do conjunto não pertencer** ao conjunto maior que **não poderemos estabelecer uma relação de inclusão** entre os dois conjuntos e portanto, dizemos que um não está contido no outro. Pessoal, **se $\{a, e\}$ está contido em A,** então também podemos dizer que **A contém $\{a, e\}$**. Quando queremos expressar essa ideia de que um conjunto maior contém determinado subconjunto, utilizamos o símbolo $\supset$.

- $A \supset \{a, e\}$ -- A **contém** $\{a, e\}$
- $B \supset \{0, 2, 8\}$ -- B **contém** $\{0, 2, 8\}$
- $C \supset \{1, 3, 5, 19\}$ -- C **contém** $\{1, 3, 5, 19\}$
- $E \supset \{Francisco, Eduardo\}$ -- E **contém** $\{Francisco, Eduardo\}$

Analogamente, podemos estender o raciocínio para quando queremos dizer que determinado conjunto **não contém outro**. Nessas situações, utilizamos $\not\supset$.

- $A \not\supset \{a, e, f\}$ -- A **não contém** $\{a, e, f\}$
- $B \not\supset \{1, 3, 5\}$ -- B **não contém** $\{1, 3, 5\}$
- $C \not\supset \{0, 1\}$ -- C **não contém** $\{0, 1\}$
- $E \not\supset \{Sicrano, Beltrano\}$ -- E **não contém** $\{Sicrano, Beltrano\}$

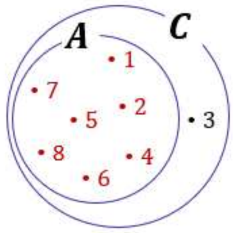
(PREF. DE PINHAIS/2019) Considerando os conjuntos $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, assinale a alternativa CORRETA:

A) O conjunto A está contido no conjunto B.
B) O conjunto B está contido no conjunto A.
C) O conjunto C está contido no conjunto B.
D) O conjunto C está contido no conjunto A.
E) O conjunto A está contido no conjunto C.

Comentários:

$$\boldsymbol{C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}$$

Observe que os elementos destacados em vermelho **são exatamente todos os elementos do conjunto A**. Perceba, portanto, que **A está contido em C**. Para facilitar a visualização, veja o diagrama a seguir.



Gabarito: Letra E.

Subconjuntos

Vamos aprofundar um pouco o nosso estudo sobre **os subconjuntos**. Para começar, tente dizer quais são os subconjuntos do conjunto $A = \{a, b\}$. *Pronto?* Observe como fica:

Conjunto	Subconjuntos
$A = \{a, b\}$	$\emptyset$
	$\{a\}$
	$\{b\}$
	$\{a, b\}$

A tabela acima lista todos os subconjuntos que podemos formar utilizando o conjunto A. Sabendo disso, podemos escrever as seguintes relações:

- $\emptyset \subset A$
- $\{a\} \subset A$
- $\{b\} \subset A$
- $\{a, b\} \subset A$

Devemos falar um pouco do **conjunto vazio e conjunto unitário**. O conjunto vazio, como o próprio nome sugere, **é um conjunto que não possui elementos**! É representado por meio do **símbolo** $\emptyset$ mas também pode aparecer como um simples par de chaves $\{\ \}$. Já **o conjunto unitário** é todo conjunto que **possui um único elemento**!

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

Seja X um conjunto genérico, então:

$$\emptyset \subset \boldsymbol{X} \qquad ou \qquad \{\ \} \subset \boldsymbol{X}$$

Observe que $\{a, b\} \subset A$, indicando que qualquer conjunto é também um subconjunto de si mesmo! Seja $B = \{a, b, c\}$. Vamos listar os seus subconjuntos também?

Conjunto	Subconjuntos

$B = \{a, b, c\}$	$\emptyset$
	$\{a\}$
	$\{b\}$
	$\{c\}$
	$\{a, b\}$
	$\{a, c\}$
	$\{b, c\}$
	$\{a, b, c\}$

Quando um subconjunto de B é diferente do próprio B, chamamos ele de **subconjunto próprio de B**. Por exemplo, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ são subconjuntos próprios de B. Já o subconjunto $\{a, b, c\}$ é denominado **impróprio** pois é igual ao próprio B! Com os conjuntos listados na tabela acima são subconjuntos de B, então podemos escrever:

- $\emptyset \subset B$
- $\{a\} \subset B$
- $\{b\} \subset B$
- $\{c\} \subset B$
- $\{a, b\} \subset B$
- $\{a, c\} \subset B$
- $\{b, c\} \subset B$
- $\{a, b, c\} \subset B$

Pessoal, observe que **os subconjuntos de um conjunto são apenas diferentes combinações de seus elementos**. Portanto, se você precisar listar os subconjuntos, siga os seguintes passos:

1. O primeiro conjunto que você deve anotar como subconjunto é o **conjunto vazio**.
2. Depois, transforme em subconjunto cada elemento, um por um.
3. Em seguida, escreva os subconjuntos formado por pares de elementos.
4. Acabando os pares, pegue os trios e assim sucessivamente.

Seguindo essa receita, vamos listar os subconjuntos de $C = \{1, 2, 3\}$?

Passo 1: Você não deve esquecer que **o conjunto vazio é subconjunto de qualquer vazio**, portanto:

$$\emptyset$$

Passo 2: Transformando cada elemento em um subconjunto, **um por um**.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$$

Passo 3: Escrever os subconjuntos formado por **pares** de elementos.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}$$

Passo 4: Ir para os trios.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}, \{1, 2, 3\}$$

Como o conjunto C só possui 3 elementos, encerramos por aqui! Listamos todos os subconjuntos dele. Observe que quando tínhamos um conjunto com **2 elementos, obtivemos 4 subconjuntos**. Ao aumentar um elemento no conjunto, **passamos a ter 8 subconjuntos**. Será que é possível estabelecer uma fórmula para calcular **o número de subconjuntos baseado na quantidade de elementos de um conjunto**?

É possível sim e **a fórmula é bem simples**. Seja $\boldsymbol{n(A)}$ **o número de elementos de um conjunto** $\boldsymbol{A}$. Então, **o número de subconjuntos de** $\boldsymbol{A}$**,** $\boldsymbol{nS_A}$, é dado por:

$$\boxed{nS_A = 2^{n(A)}}$$

(IDAF-AC/2020) Quantos subconjuntos possui o conjunto das vogais?

A) 10

B) 25

C) 32

D) 50

E) 56

Comentários

Seja $\boldsymbol{V}$ o conjunto formado por **todas as vogais**, então temos que:

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

O conjunto acima **possui 5 elementos**, sabemos que o número de subconjuntos de um conjunto depende da quantidade de elementos e é dado através de uma fórmula.

$$nS_V = 2^{n(V)}$$
$$nS_V = 2^5$$
$$nS_V = 32$$

Gabarito: Letra C.

Conjunto das Partes

Você sabia que **podemos juntar todos os subconjuntos de um conjunto para formar um novo conjunto**? Esse novo conjunto formado é denominado **conjunto das partes** e é representado pelo **símbolo** $\wp$. Por exemplo, os **conjuntos das partes** de $A = \{a, b\}$ e de $B = \{a, b, c\}$ são:

$$\wp(A) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\wp(B) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Observe que $\wp(A)$ e $\wp(B)$ são **conjuntos formados por outros conjuntos**! Note ainda que **a sua quantidade de elementos é exatamente a quantidade de subconjuntos** calculada pela fórmula $\boldsymbol{nS_A = 2^{n(A)}}$. Um outro ponto que chamamos atenção é que, no conjunto das partes, listamos **o conjunto vazio** $\{\ \}$ explicitamente com um dos seus elementos.

(PREF. PETROLINA/2019) Dado um conjunto A, representa-se por $\wp(A)$ o conjunto formado por todos os subconjuntos de A – o chamado conjunto das partes que também costuma ser representado por 2^A. Se $A = \{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}\}$, qual das alternativas seguintes NÃO é elemento de $\wp(A)$?

A) ϕ

B) $\{\phi, 1\}$

C) $\{1, \{\phi, 1\}\}$

D) $\{\phi, \{\phi\}\}$

E) $\{1, \{1\}\}$

Comentários:

O jeito mais imediato de resolver a questão **é listar todos os subconjuntos de $\boldsymbol{A}$**. Perceba que teremos $2^4 =$ **16 subconjuntos**. Para nos auxiliar, vamos usar uma tabela.

Vale também destacar que $\boldsymbol{\phi}$ **representa o conjunto vazio** e você deve lembrar que **o conjunto vazio é sempre subconjunto** de qualquer conjunto.

Conjunto	Subconjuntos	
$\{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}\}$	ϕ	$\{\{\phi\}, 1\}$
	$\{\phi\}$	$\{\{\phi\}, \{1\}\}$
	$\{\{\phi\}\}$	$\{1, \{1\}\}$
	$\{1\}$	$\{\phi, \{\phi\}, 1\}$
	$\{\{1\}\}$	$\{\phi, 1, \{1\}\}$
	$\{\phi, \{\phi\}\}$	$\{\phi, \{\phi\}, \{1\}\}$
	$\{\phi, 1\}$	$\{\{\phi\}, 1, \{1\}\}$
	$\{\phi, \{1\}\}$	$\{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}$

Ao listar os subconjuntos do conjunto A, percebemos que apenas o conjunto $\{1, \{\phi, 1\}\}$ não é elemento de $\wp(A)$. Isso acontece pois o conjunto $\{\phi, 1\}$ **não é elemento de A**.

Gabarito: Letra C.

INDO MAIS FUNDO!

Observe o conjunto F exemplificado abaixo.

$$F = \{1, 2, 3, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{W\}\}$$

Assim como o conjunto das partes, **F é um conjunto que possui como elemento outros conjuntos**. Note que o conjunto $\{a, b, c\}$ **é um elemento de F**. Nessas situações, e somente nelas, podemos escrever $\{a, b, c\} \in F$. Galera, muita atenção aqui! **$\{a, b, c\}$ não é um subconjunto de F, é um elemento!** Perceba que ele está listado juntamente com os demais elementos!

- $1 \in F$
- $2 \in F$
- $3 \in F$
- $\{a, b, c\} \in F$
- $\{d, e, f\} \in F$
- $\{W\} \in F$

E nesses casos, *quando usaremos a relação de inclusão?* Veja alguns exemplos de subconjuntos de F:

- $\{1\} \subset F$
- $\{1, 2\} \subset F$
- $\{1, 2, 3\} \subset F$
- $\{\{a, b, c,\}\} \subset F$
- $\{\{W\}\} \subset F$
- $\{\{a, b, c,\}, \{d, e, f\}, \{W\}\} \subset F$

Observe que, para representar os subconjuntos que contém outros conjuntos, utilizamos, sem problema algum, dois pares de chaves. Tenha bastante cuidado em questões que tragam esse tipo de abordagem! Já vi muitas bancas se enrolarem ao cobrar questões com essa temática pois desconhecem que conjuntos podem sim ser elementos de outros conjuntos e que podemos estabelecer uma relação de pertinência nessas situações.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. JEQUIÉ/2018) Considerando o conjunto $A = \{\Omega, \Delta, \{\Delta\}\}$ qual das afirmações abaixo não está correta?

A) $\Omega \in \mathrm{A}$

B) $\Omega \subset \mathrm{A}$

C) $\{\Delta\} \subset A$

D) $\{\Delta\} \in A$

Comentários:

Os elementos de A são: Δ, $\{\Delta\}$ e Ω. Logo: $\begin{cases} \Delta \in \mathrm{A}; \\ \{\Delta\} \in A; \\ \Omega \in \mathrm{A}. \end{cases}$

Essa pequena análise permite concluir que **as alternativas A e D estão corretas** e, portanto, não podem ser nosso gabarito, já que **ele procura a alternativa incorreta**. Observe que como **Δ é um elemento de A**, então podemos dizer que **$\{\Delta\}$ é um subconjunto de A**. Dessa forma, é também correto escrever que $\{\Delta\} \subset \mathrm{A}$. *Opa, espere aí, professor! Então podemos dizer nessa situação que $\{\Delta\} \subset A$ e $\{\Delta\} \in A$?* Isso! **Essa conclusão somente é válida pois Δ e $\{\Delta\}$ são elementos de um mesmo conjunto**!

Ao escrever que $\{\Delta\} \subset \mathrm{A}$ estamos nos referindo ao subconjunto $\{\Delta\}$ que existe pois <u>Δ é um elemento de A</u>. **Quando escrevemos $\{\Delta\} \in A$, estamos nos referindo <u>ao elemento $\{\Delta\}$, que é explicitamente declarado</u>**. O subconjunto associado ao elemento $\{\Delta\}$ é representado com mais um par de chaves: $\{\{\Delta\}\}$. Nessa situação, dizemos que $\{\{\Delta\}\} \subset A$. Com isso, a única alternativa que pode estar errada é a letra B, pois **Ω é um elemento de A e, portanto, o correto seria $\Omega \in \mathrm{A}$**.

Gabarito: Letra B.

(PREF. RESENDE/2019) Dado o conjunto $C = \{a, \{b\}, c\}$, observe as afirmações e marque o item CORRETO.

I. $a \in C$.

II. $\{b\} \in C$.

III. $c \subset C$.

IV. $\emptyset \subset C$.

A) Apenas a afirmação III é falsa.

B) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
C) Apenas as afirmações II e IV são verdadeiras.
D) Apenas as afirmações I e IV são verdadeiras.

Comentários:

É uma questão que envolve basicamente todos os conceitos que vimos até agora.

$$\boldsymbol{C = \{a, \{b\}, c\}}$$

I. $a \in C$.
Afirmação verdadeira. a é um elemento de C e, por esse motivo, podemos estabelecer uma **relação de pertinência entre o elemento e o conjunto**.

II. $\{b\} \in C$.
Afirmação verdadeira. Observe que $\{b\}$ está listado explicitamente como um elemento de C. Com isso, podemos estabelecer **uma relação de pertinência entre $\{b\}$ e o conjunto C**.

III. $c \subset C$.
Afirmação falsa. c é um elemento de C e sabemos que **não é possível estabelecer relação de inclusão entre um elemento e um conjunto**. **Apenas um conjunto pode estar contido em outro**.

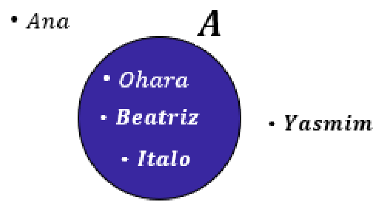
IV. $\emptyset \subset C$.
Afirmação verdadeira. Como vimos, **o conjunto vazio $\emptyset$ é sempre subconjunto de qualquer conjunto**.

Gabarito: Letra A.
Gabarito da Banca: Letra D -- A banca certamente se equivocou ao considerar a afirmativa II errada.

União, Intersecção, Complementar e Diferença

Representação por Diagramas

Você deve ter visto ao longo da aula que **apareceram alguns conjuntos na forma de diagramas**. Esse tipo de representação é extremamente útil na resolução de questões, pois **possibilita uma melhor compreensão do problema**. Por exemplo, seja $\boldsymbol{A}$ o conjunto de funcionários de uma determinada empresa.



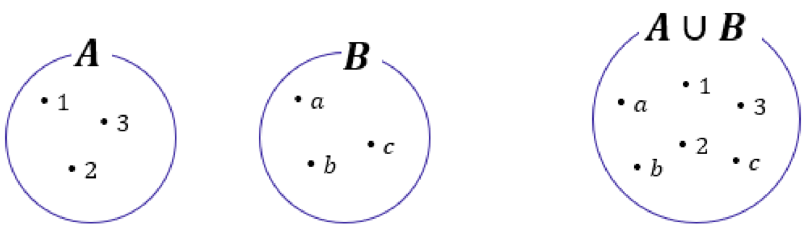
Todos aqueles que estão dentro do conjunto $\boldsymbol{A}$ **representam funcionários da empresa**. **Quem está fora, não é funcionário da empresa**. Olhando simplesmente para o diagrama, podemos dizer que:

- $Ohara \in A$;
- $Beatriz \in A$;
- $Italo \in A$;
- $Yasmim \notin A$;
- $Ana \notin A$

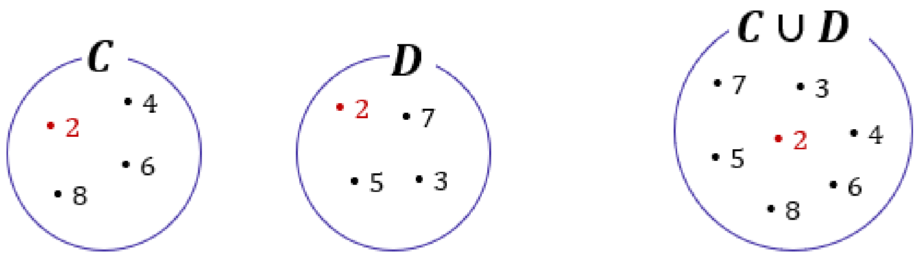
Esses diagramas são bastante conhecidos no meio matemático e possuem um nome especial: são os **Diagramas de Venn-Euler** ou, simplesmente, **Diagramas de Venn**. Esse tipo de representação é utilizado principalmente quando **precisamos representar vários conjuntos ao mesmo tempo**. Nos tópicos a seguir, usaremos bastante esses diagramas e você logo ficará habituado.

União

Nessa parte da nossa aula, veremos que existem **várias operações** que os conjuntos podem se submeter. A mais conhecida talvez seja **a união (ou reunião) de conjuntos**. A união de conjuntos é representada pelo **símbolo** $\cup$ e, basicamente, **funde dois conjuntos em um só**.



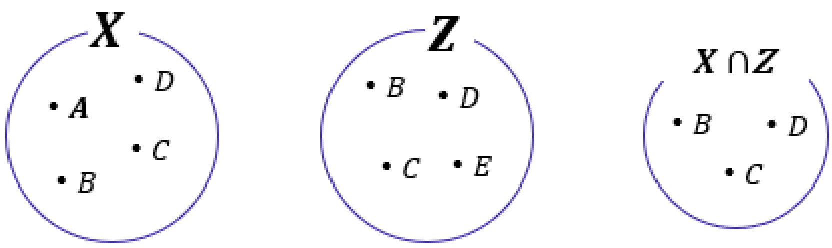
No diagrama acima, temos que $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Quando fazemos a união de A e B, criamos um novo conjunto que possui todos os elementos dos dois conjuntos, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$. Haverá casos em que os conjuntos possuirão um mesmo elemento e, quando for necessário fazer a união dos dois, **você não precisará escrever duas vezes o elemento repetido**. Observe um exemplo nos diagramas abaixo.



Note que **o 2 é um elemento comum aos dois conjuntos**: $C = \{2, 4, 8, 6\}$ e $D = \{2, 3, 5, 7\}$. Nessas situações, quando fazemos a união de conjuntos que possuem elementos em comum, **esse elemento não vai aparecer duas vezes no conjunto união**! Confira que $C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, **o 2 aparece apenas uma vez**.

Intersecção

A operação que seleciona **os elementos comuns é denominada intersecção e é representada por ∩**. Por exemplo, nos diagramas acima o número 2 é o único elemento comum entre C e D. Logo, o conjunto intersecção será formado apenas pelo elemento 2: $\boldsymbol{C \cap D = \{2\}}$. Veja mais um exemplo abaixo.



Temos que $X = \{A, B, C, D\}$ e $Z = \{B, C, D, E\}$. São dois conjuntos distintos, mas que **possuem alguns elementos em comum**. Os elementos B, C e D aparecem nos 2 conjuntos e formam o conjunto intersecção: $\boldsymbol{X \cap Z = \{B, C, D\}}$. Vamos treinar um pouco esses conceitos?

(PREF. ÂNGULO/2020) Sejam os conjuntos $A = \{0,1,3,5,7\}$, $B = \{0,2,4,6,8\}$ e $C = \{0,14,15\}$, assinale a alternativa correta.

A) $A \cap B \cap C = \{0\}$

B) $A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 14, 15\}$

C) $B \cap C = \{2, 4, 6, 8, 14, 15\}$

D) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15\}$

Comentários:

Devemos verificar alternativa por alternativa.

A) $A \cap B \cap C = \{0\}$

Alternativa correta. Nessa alternativa, devemos buscar **a intersecção dos três conjuntos** dados no enunciado. A intersecção é formada pelos **elementos que são comuns aos três conjuntos**. Por exemplo, **observe que o número 0 pertence tanto ao conjunto A, B e C**. Logo, com certeza o 0 é elemento de $A \cap B \cap C$. Observe que **não há nenhum outro elemento que aparece nos três conjuntos**. Com isso, podemos dizer que, de fato, $A \cap B \cap C = \{0\}$.

B) $A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 14, 15\}$

Alternativa incorreta. Para obter a união de dois conjuntos, **juntamos todos os elementos dos dois conjuntos** e se houver elementos repetidos, basta escrevê-los apenas uma vez, eles não vão contar duas vezes. Veja, no entanto, que **o 0 é elemento de A e de C, mas não aparece no conjunto união dos dois**.

C) $B \cap C = \{2,4,6,8,14,15\}$

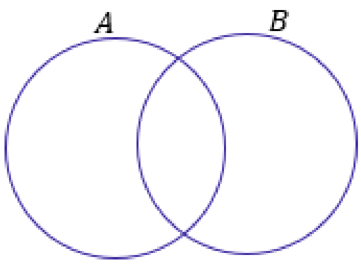
Alternativa incorreta. A intersecção representa apenas os elementos em comum entre dois ou mais conjuntos. *Quais são os elementos em comum entre B e C?* O **número 0 é o único elemento comum aos dois**. Logo, $B \cap C = \{0\}$.

D) $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,15\}$

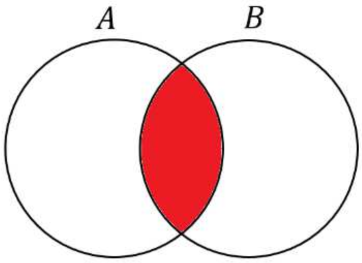
Alternativa incorreta. Note que o conjunto está quase correto, o único erro seria a presença desse elemento "15". **O "15" não faz parte de A nem B**, portanto, **não pode fazer parte do conjunto que é a união dos dois**. Esse é o erro da alternativa.

Gabarito: Letra A.

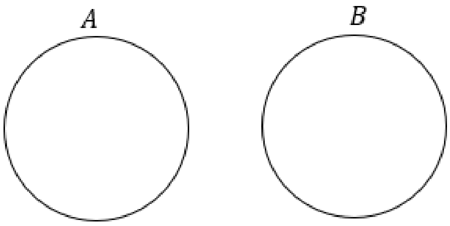
Quando dois conjuntos **possuem elementos em comum**, podemos representá-los assim:



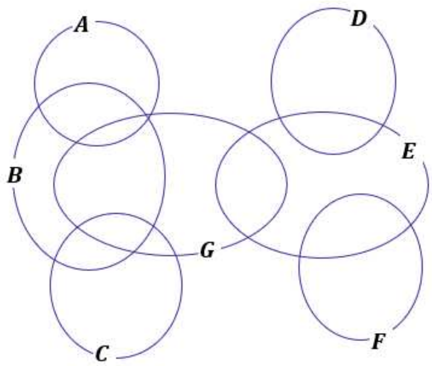
Essa região comum representa exatamente a sua intersecção. Os elementos que estão na região em **vermelho** abaixo **pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B**.



Caso os conjuntos não possuam elementos em comum, isto é, **não haja intersecção entre os dois**, nós vamos chamá-los de **disjuntos** e os representaremos utilizando círculos afastados um do outro.



(CM MONTE ALTO/2019) Observe o diagrama de conjuntos e considere que há elementos em todas as suas regiões.



A partir dessa disposição, é correto afirmar que

A) há elemento de G que é também elemento de A e C.

B) qualquer elemento que esteja em dois desses conjuntos, certamente pode estar em qualquer um desses sete conjuntos.

C) qualquer elemento de G, que não esteja em E, certamente estará em A ou em B ou em C

D) qualquer elemento que esteja em três desses conjuntos, certamente está em C e em D.

E) há elemento de G que também é elemento de A, mas não é elemento de B.

Comentários:

A) há elemento de G que é também elemento de A e C.

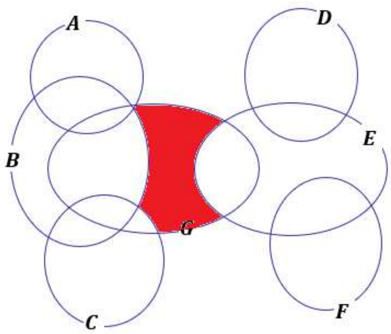
Alternativa incorreta. Observe que A e C **são conjuntos disjuntos**, isto é, **não possuem elementos em comum** e por isso **não há intersecção entre os dois**. Se A e C são conjuntos disjuntos, não pode existir um elemento em G que seja **ao mesmo tempo elemento de A e de C**, pois isso implicaria em um elemento comum aos três simultaneamente.

B) qualquer elemento que esteja em dois desses conjuntos, certamente pode estar em qualquer um desses sete conjuntos.

Alternativa correta. Todos os conjuntos fazem intersecção com pelo menos um outro conjunto! Dessa forma, **haverá sempre um elemento de qualquer conjunto que também pertencerá a outro**!

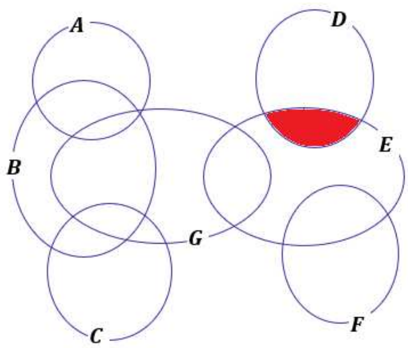
C) qualquer elemento de G, que não esteja em E, certamente estará em A ou em B ou em C

Alternativa incorreta. Mesmo não estando em E, **um elemento em G pode estar somente em G**. **Não podemos afirmar** necessariamente que estará em A ou em B ou em C. Veja a região destacada abaixo.



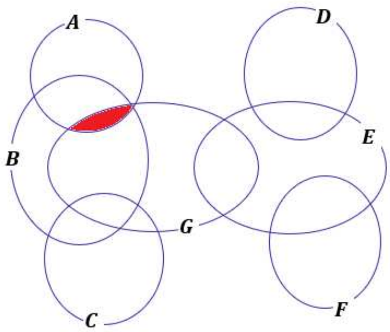
D) qualquer elemento que esteja em três desses conjuntos, certamente está em C e em D.

Alternativa incorreta. D **só faz** intersecção com E. Desse modo, um elemento de D só poder estar, **no máximo, em dois conjuntos**.



E) há elemento de G que também é elemento de A, mas não é elemento de B.

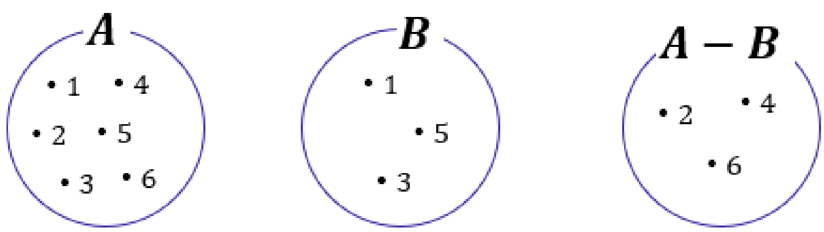
Alternativa incorreta. **Todo elemento de G que também é elemento de A também pertence a B**.



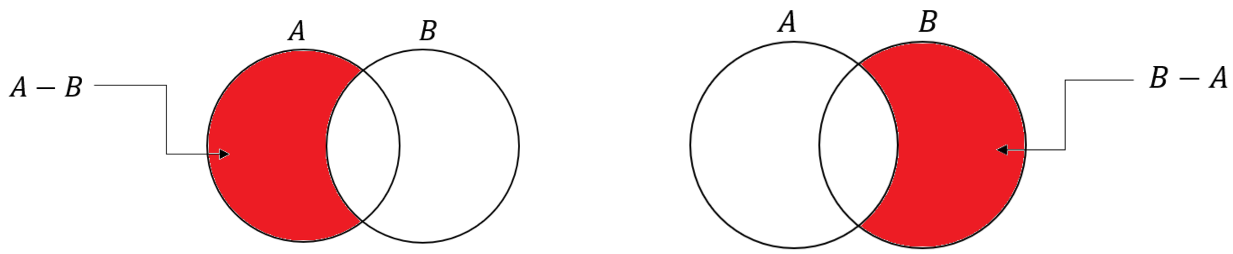
Gabarito: Letra B.

Diferença

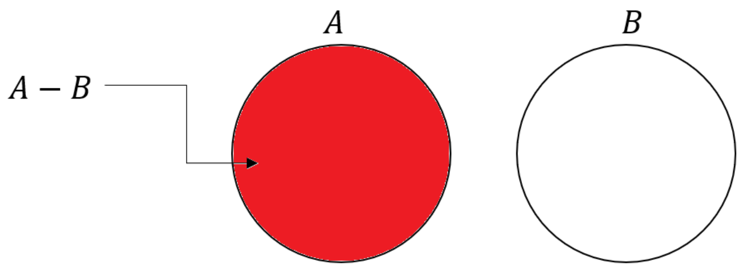
Existe uma outra operação que é muito importante para a sua prova! Essa operação **é a diferença ou, como também é conhecida, a subtração de conjuntos**! O conjunto diferença é representado por $\boldsymbol{A - B}$ e é formado por **todos os elementos de A que não são elementos de B**! Por exemplo, considere os conjuntos:

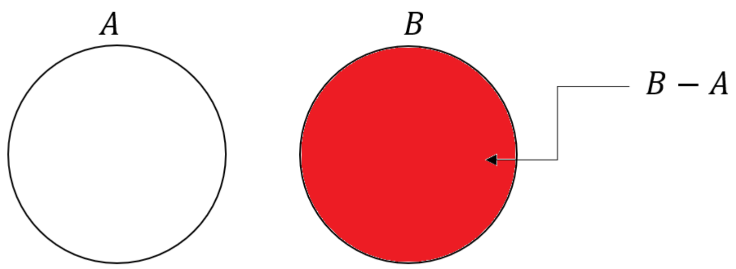


Observe que $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Para encontrar $A - B$, devemos selecionar **os elementos de A que não são elementos de B**! Ou seja, **aqueles elementos que são apenas elementos de A**! Observe que A e B possuem em comum os seguintes elementos: $A \cap B = \{1, 3, 5\}$. Logo, se $A = \{\mathbf{1}, 2, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6\}$, então o $A - B = \{2, 4, 6\}$. Em diagramas, também é possível representar o conjunto diferença.



Um detalhe importante é que se A e B são **conjuntos disjuntos**, então $\boldsymbol{A - B = A}$ **e** $\boldsymbol{B - A = B}$. Veja como essa informação pode ser representada:





HORA DE PRATICAR!

(PREF. LINHARES/2020) Dados os três conjuntos numéricos:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$,
$B = \{0,2,4,6\}$,
$C = \{1,3,5,7,9\}$.

O resultado de $(A - B) \cap C$ é igual a:
A) $\{1,3,5\}$
B) $\{1,3,5,7,9\}$
C) $\{0,1,3,5,7,9\}$
D) $\{2,4,6\}$
E) $\{0\}$

Comentários:
Primeiramente, devemos **fazer a diferença entre o conjunto A e B**. Lembre-se, quando tivermos a diferença entre dois conjuntos, por exemplo, $A - B$, estamos procurando **o conjunto dos elementos de A que não são elementos de B**. Na nossa questão, temos que:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$B = \{0,2,4,6\}$$

Primeira pergunta: **quais elementos estão ao mesmo tempo em A e em B**? Observe que **2, 4 e 6** são os três **elementos comuns** aos dois conjuntos. ***Segunda pergunta:*** que conjunto é formado quando eu removo esses elementos em comum do conjunto A? **É exatamente o conjunto diferença**!

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A - B = \{1,3,5\}$$

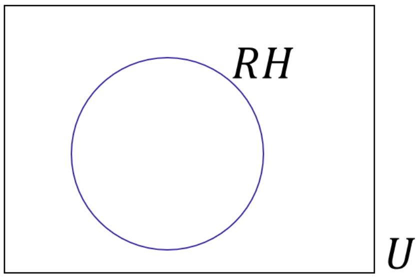
A questão não termina aqui. Ainda devemos fazer a intersecção desse conjunto com o C. **Note que C possui todos os três elementos do nosso conjunto diferença**. Portanto, **coincidentemente**, vamos ter que:

$$(A - B) \cap C = \{1,3,5\}$$

Gabarito: Letra A.

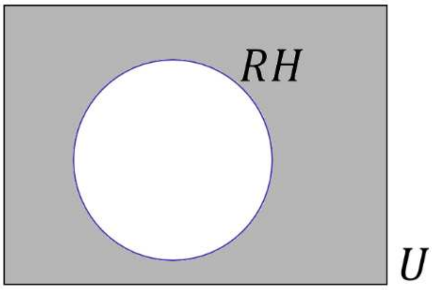
Complementar

Quando falamos de um determinado conjunto, normalmente **estamos destacando determinado grupo dentro de um universo maior**. Por exemplo, podemos formar um conjunto dos funcionários especializados em RH de uma empresa. Esse grupo de funcionários foi retirado de um conjunto maior: **o conjunto formado por todos os funcionários da empresa**. Acompanhe o diagrama abaixo.



Observe que o conjunto formado por aqueles especializados em RH está contido dentro de um conjunto U. **Esse conjunto maior é frequentemente chamado de conjunto universo** e, nesse exemplo, poderia representar **o conjunto de todos os funcionários da empresa**. Quer um outro exemplo? Imagine um conjunto formado por todas as vogais: $V = \{a, e, i, o, u\}$. Em um problema que estamos trabalhando com esse conjunto, qual seria o conjunto universo? O conjunto universo nessa situação seria o conjunto formado por todas as letras do alfabeto: $U = \{a, b, c, d, e, f, \dots, x, y, z\}$.

Quando estamos falando de conjunto universo, um novo conceito surge: **o conjunto complementar**. Lembre-se do conjunto que inventamos com os funcionários de uma empresa especializados em RH. *Qual o complementar desse conjunto?* Seria o conjunto formado por **todos os outros funcionários da empresa que não são especializados em RH!** Vamos mostrar no diagrama.



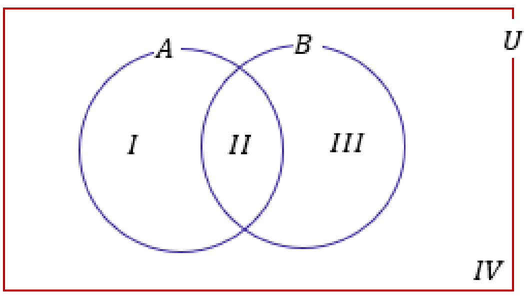
O complementar do conjunto RH é representado pela **parte pintada em vermelho**. *E no nosso exemplo das letras?* Qual o complementar do conjunto formado apenas pelas vogais? Ora, é **o conjunto formado por todas as outras letras que não são vogais, isto é, o conjunto das consoantes**! Para determinar o complementar de qualquer conjunto, **é de fundamental importância conseguir identificar qual é o conjunto universo**.

A notação utilizada para representar o complementar de um conjunto X é $\boldsymbol{X^C}$ **ou** $\boldsymbol{\overline{X}}$. Representamos o conjunto complementar com esse "expoente" C ou uma barra em cima. Ademais, podemos definir o conjunto complementar utilizando o que acabamos de ver **sobre conjunto diferença**.

$$\boxed{\overline{X} = X^C = U - X}$$

Veja que utilizando a definição acima, temos que o conjunto complementar X^C é formado por **tudo que está no conjunto universo mas não está em X**. Vamos fazer algumas questões para aplicar o que acabamos de ver?

(PREF. NOVO HAMBURGO/2020) A é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol e B é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, conforme representado no diagrama:



Com base nessas informações, é correto afirmar que

A) a região I representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, mas não dominam o idioma espanhol.

B) a região II representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.
C) a região III representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol, mas não dominam o idioma inglês.
D) a região IV representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.
E) U representa o conjunto de todas as pessoas que não dominam nenhum desses dois idiomas.

Comentários:
Vamos analisar cada uma das alternativas tendo em mente que:
• A é o conjunto das pessoas que **dominam ESPANHOL**;
• B é o conjunto das pessoas que **dominam INGLÊS**.

A) a região I representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, mas não dominam o idioma espanhol.
Alternativa incorreta. A região I representa o conjunto de todas as pessoas que **dominam o idioma ESPANHOL**, mas **não dominam o idioma INGLÊS**.

B) a região II representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.
Alternativa correta. A região comum aos 2 conjuntos representa **as pessoas que dominam os dois idiomas**.

C) a região III representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol, mas não dominam o idioma inglês.
Alternativa incorreta. A região III representa o conjunto de todas as pessoas que **dominam o idioma INGLÊS**, mas **não dominam o idioma ESPANHOL**.

D) a região IV representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.
Alternativa incorreta. A região IV é **toda área fora dos dois conjuntos**. Isso significa que ela representa aqueles **não dominam nenhum dos dois idiomas**.
E) U representa o conjunto de todas as pessoas que não dominam nenhum desses dois idiomas.
Alternativa incorreta. U é o **conjunto universo** e representa todos aqueles que **dominam ou não os idiomas**.

Gabarito: Letra B.

Princípio da Inclusão-Exclusão

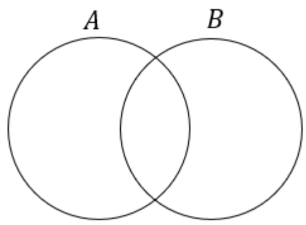
Pessoal, muitas vezes vamos precisar **determinar o número de elementos de um conjunto**. Essa tarefa de contar **pode ficar um pouco complicada quando temos elementos que pertencem a mais de um conjunto**, pois, nesses casos, **devemos eliminar as repetições** para não contar o mesmo elemento duas vezes. Nesse sentido, surge o Princípio da Inclusão-Exclusão (PIE). Esse princípio possibilita uma contagem exata da quantidade de elementos **de um conjunto formado pela união de vários outros, mesmo que contenham intersecções**.

➢ 2 Conjuntos

Imagine **dois conjuntos A e B com elementos em comum**. Se $n(A)$ é o número de elementos de A e $n(B)$ é o número de elementos de B, quanto vale $n(A \cup B)$?

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}}$$

Vamos tentar entender o caminho das pedras para chegar na relação acima. Considere os conjuntos:



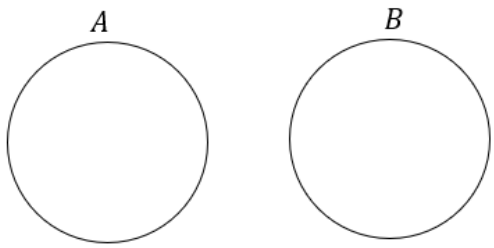
- $A = \{1, 2, 3\} \quad \Rightarrow \quad n(A) = 3$
- $B = \{3, 4, 5\} \quad \Rightarrow \quad n(B) = 3$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \Rightarrow \quad n(A \cup B) = 5$
- $A \cap B = \{3\} \quad \Rightarrow \quad n(A \cap B) = 1$

Observe que **apesar da união entre A e B ser uma espécie de fusão entre os dois conjuntos**, o número de elementos na união, na maioria dos casos, **não é a soma direta do número de elementos de A com o números de elementos de B**.

Perceba que **o elemento 3 aparece tanto em A como em B** e ao somar o número de elementos dos dois conjuntos **devemos considerar que estamos somando o mesmo elemento duas vezes!** É por isso esse motivo que devemos subtrair a quantidade de elementos que estão na intersecção.

Para **conjuntos disjuntos** temos que:

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}}$$



pois:

$$\boldsymbol{n(A \cap B) = 0.}$$

HORA DE PRATICAR!

(TRF-6/2018) Em uma empresa com 120 funcionários, 42 recebem vale-transporte e 95 recebem vale-refeição. Sabendo que todos os funcionários da empresa recebem ao menos um desses dois benefícios, o total de funcionários que recebem ambos os benefícios é igual a

A) 25.

B) 17.

C) 15.

D) 19.

E) 20

Comentários:

O **conjunto universo dessa questão é formado pelos 120 funcionários** da empresa. Seja $\boldsymbol{T}$ **o conjunto daqueles que recebem vale-transporte** e $\boldsymbol{R}$ **o conjunto daqueles que recebem vale-refeição**.

$$n(T) = 42; \quad n(R) = 95; \quad n(T \cup R) = 120$$

Sabemos que podemos relacionar esses valores e obter a quantidade que está na intersecção dos conjuntos através **do Princípio da Inclusão-Exclusão** estudado na teoria.

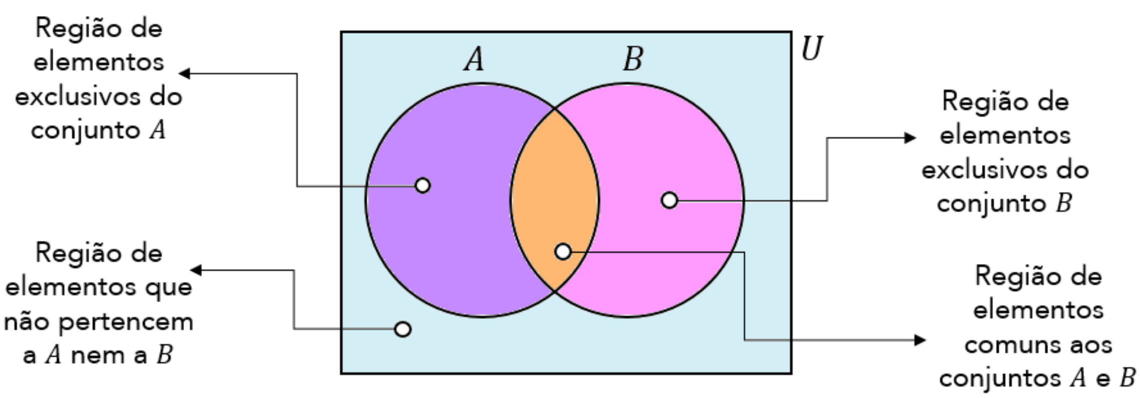
$$n(T \cup R) = n(T) + n(R) - n(T \cap R)$$

$$120 = 42 + 95 - n(T \cap R)$$

$$n(T \cap R) = 17$$

Gabarito: Letra B

A verdade é que **não precisamos decorar fórmulas** para responder questões que envolva esse princípio. Utilizando **um pouco de lógica e diagramas de Venn**, podemos encontrar a quantidade de elemento de cada conjunto envolvido em um problema típico de Princípio da Inclusão-Exclusão. Antes disso, quero deixar claro para vocês **o significado de cada uma das regiões** no seguinte diagrama:



HORA DE PRATICAR!

(CLDF/2018) Em uma escola com 150 alunos, são oferecidos cursos de Inglês e Francês. Conforme um levantamento, 15 alunos desta escola não estão frequentando estes cursos e 90 frequentam o curso de Inglês. Se 72 alunos frequentam o curso de Francês, então o número de alunos que frequenta um e somente um dos cursos é igual a

A) 144.

B) 138.

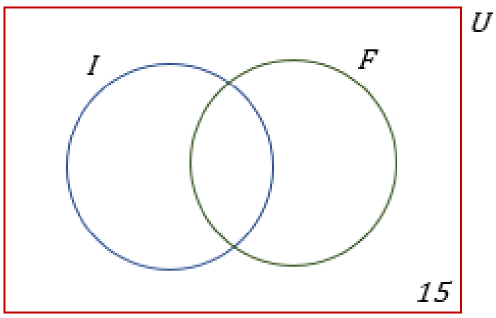
C) 132.

D) 108.

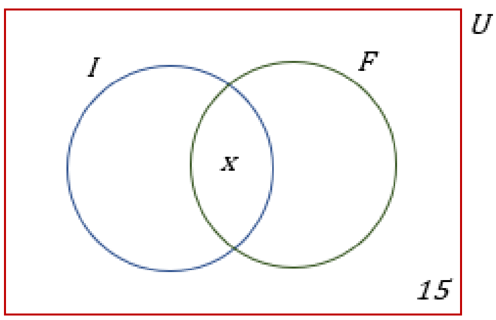
E) 126.

Comentários:

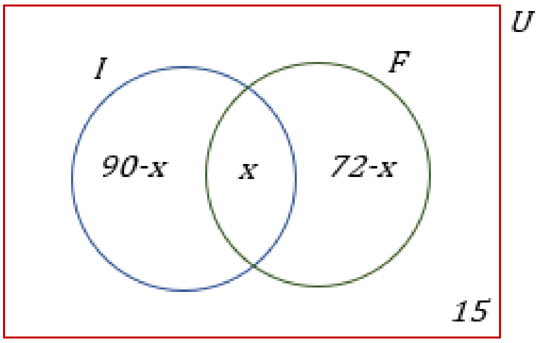
O **conjunto universo** da nossa questão é formado pelos **150 alunos da escola**. Esses 150 alunos **podem fazer 2 cursos ou não fazer nenhum**. A primeira informação que temos é que **15 alunos não frequentam nenhum dos cursos**. Em diagramas, podemos representar essa informação da seguinte maneira:



Observe que a **questão não informou a quantidade de alunos que fazem os dois cursos simultaneamente**. Portanto, vamos chamá-la de x e colocá-la no diagrama.



Se 90 frequentam o curso de inglês, então $90 - x$ frequentam **APENAS o curso de inglês**. Se 72 alunos frequentam o curso de Francês, então $72 - x$ frequentam **APENAS o curso de Francês**.



Nosso diagrama **está completamente preenchido**. Você concorda que **ao somar individualmente as quantidades acima**, deveremos obter o total de alunos dessa escola, isto é, 150?

$$(90 - x) + (72 - x) + x + 15 = 150$$

$$177 - x = 150$$

$$x = 27$$

A questão não quer saber quantos alunos fazem os dois cursos simultaneamente**. Ela pede a quantidade de alunos que fazem APENAS um único curso**. Logo,

$$(90 - x) + (72 - x) = 63 + 45 = 108$$

Gabarito: Letra D.

E usando a fórmula? Como ficaria? **Seja I o conjunto daqueles que fazem o curso de inglês e F o conjunto formado por aqueles que fazem o curso de francês**. Se a escola tem 150 alunos e foi dito que **15 alunos não fazem nenhum dos cursos**, então:

$$n(I \cup F) = 150 - 15 = 135$$

São 135 alunos que fazem **pelo menos um dos cursos**. A questão diz ainda que: $\boldsymbol{n(I) = 90}$ **e** $\boldsymbol{n(F) = 72}$.

$$n(I \cup F) = n(I) + n(F) - n(I \cap F)$$

$$135 = 90 + 72 - n(I \cap F)$$

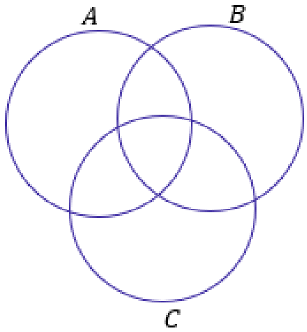
$$n(I \cap F) = 27$$

Com isso, descobrimos que **27 pessoas fazem simultaneamente o curso de inglês e de francês**. A questão pede a quantidade de alunos que fazem **apenas um dos cursos**. Se 27 dos que fazem inglês também fazem francês, então $\boldsymbol{90 - 27 = 63}$ **fazem apenas inglês**. Analogamente, $\boldsymbol{72 - 27 = 45}$ **fazem apenas francês**.

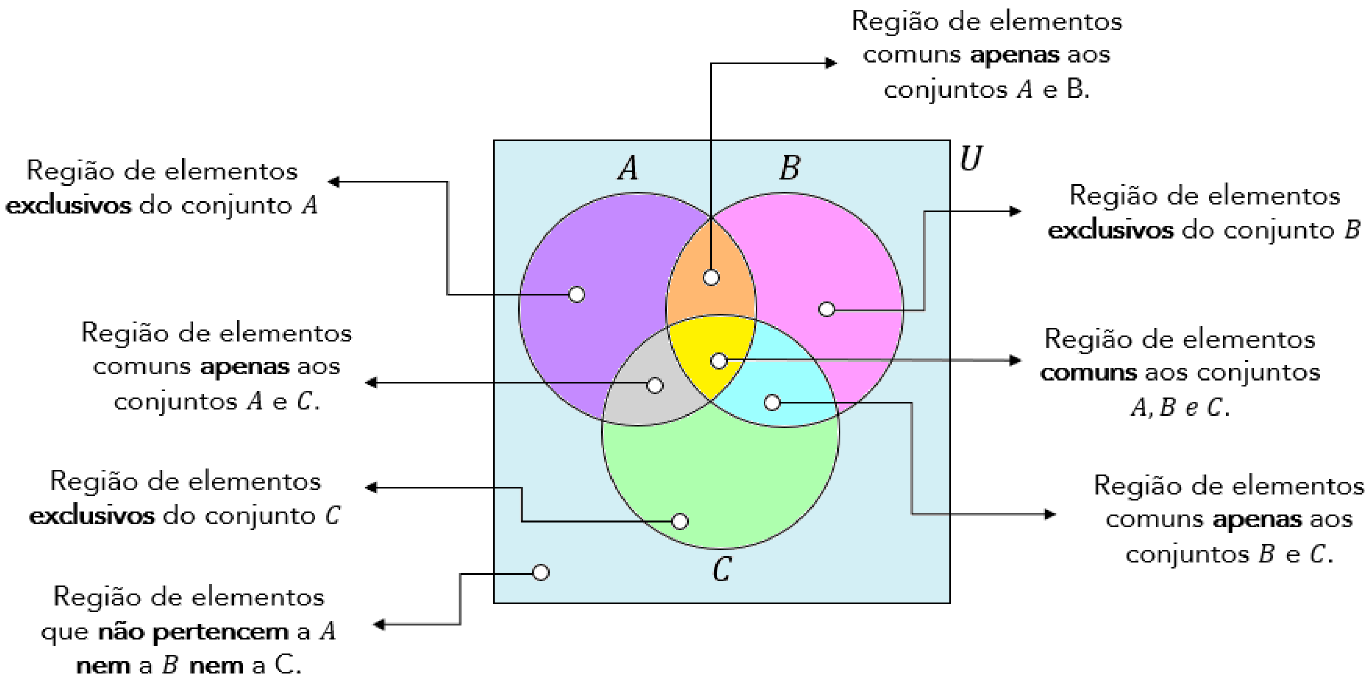
$$63 + 45 = 108\ alunos$$

3 Conjuntos

Imagine que você tem 3 conjuntos, **cada conjunto possui elementos em comum com os outros dois**. A situação **mais completa** que podemos imaginar está representada pelo diagrama abaixo.



Vamos fazer **uma leitura** de cada uma das regiões da figura acima?



Observe que **o número de regiões com três conjuntos aumenta bastante** em relação à análise anteriormente feita com dois. Agora, considere que **você conhece a quantidade** de elementos de cada um dos conjuntos cima, isto é, $\boldsymbol{n(A)}$, $\boldsymbol{n(B)}$ **e** $\boldsymbol{n(C)}$**.**

Como você faria para encontrar $\boldsymbol{n(A \cup B \cup C)}$ *? Será que é só somar as três quantidades?* **A resposta para essa pergunta é não!** Precisamos ter atenção aos **elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**. Segundo o Princípio da Inclusão- Exclusão, a fórmula geral que permite calcular a quantidade de elementos de um **conjunto formado pela união de outros três** é dada por:

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Vamos tentar entender com ela surge? Note que para achar a quantidade de elementos do conjunto união, primeiro **somamos individualmente as quantidades de cada um dos conjuntos**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C)}$$

No entanto, nós vimos que, ao fazer isso, **não estamos considerando os elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**. Essa soma dará, certamente, uma quantidade de elementos maior do que a quantidade real. *Mas, então, o que fazer?* **É preciso subtrair as quantidades dos elementos que estão nas intersecções, evitando assim a dupla contagem**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)}$$

Perceba que a fórmula ainda não está completa. Imagine um elemento que é **comum a todos os 3 conjuntos**, isto é, pertence a $A \cap B \cap C$. Esse elemento pertence tanto a A, quanto a B e a C. Quando fizemos a soma $n(A) + n(B) + n(C)$, **contamos ele três vezes**!

Quando fizemos a subtração $-n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$ estamos **tirando ele três vezes**! **Resultado: não estamos contando os elementos de $\boldsymbol{A \cap B \cap C}$**. Por esse motivo, **adicionamos $\boldsymbol{n(A \cap B \cap C)}$.** Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Eu sei que a fórmula **pode parecer um pouco complicada**, mas garanto que com **um pouco de paciência e resolução de exercícios**, ela se tornará **mais amigável e bastante intuitiva**! Além disso, também ensinarei um jeito que vocês poderão utilizar **caso não lembrem da fórmula**. Algumas vezes, no entanto, **a questão pode exigir a aplicação direta dela**. Confira o exercício abaixo.

HORA DE PRATICAR!

(IFF/2018) Para um conjunto qualquer X, $n(X)$ representa a quantidade de elementos de X. Nesse sentido, considere que os conjuntos A, B e C tenham as seguintes propriedades:

$$n(A) = n(B) = n(C) = 50;$$
$$n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = 10;$$
$$n(A \cap B \cap C) = 0.$$

Nessa situação, $n(A \cup B \cup C)$ é igual a
A) 100.
B) 110.
C) 120.

D) 130.
E) 140.

Comentários:
Percebam que essa questão exige apenas **a aplicação direta da fórmula** que acabamos de ver.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C) = 50 + 50 + 50 - 10 - 10 - 10 + 0$$

$$n(A \cup B \cup C) = 120$$

Gabarito: Letra C.

Em algumas questões **não precisaremos aplicar diretamente a fórmula acima**. Será necessário um trabalho mais braçal da nossa parte, para chegar à resposta. Muitas vezes a questão pede valores específicos que vão surgir de uma maneira mais fácil **se a gente for completando o diagrama de Venn** com as quantidades.

Por favor, **dê mais olhada naquele "mapa" que mostrei logo no início desse tópico**, destacando as regiões e o seu significado. Para contar elementos em um diagrama de Venn, **o primeiro passo é sempre inserir a quantidade de elementos que possui a intersecção dos três conjuntos**!

Depois, **partimos para as intersecções duplas** e, por fim, analisamos a quantidade de **elementos exclusivos de cada conjunto**. Vamos ver na prática como fazemos isso?

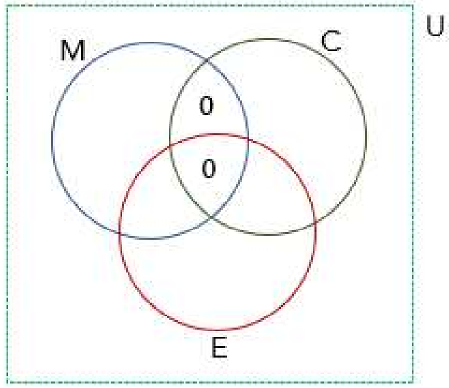
HORA DE PRATICAR!

(TRF-3/2019) O número de matriculados nas disciplinas de Cálculo, Estatística e Microeconomia é 150. Sabe-se que 12 deles cursam simultaneamente Microeconomia e Estatística, e que 80 deles cursam somente Cálculo. Os alunos matriculados em Microeconomia não cursam Cálculo. Se a turma de Cálculo tem 96 alunos e a de Estatística, 35, o número de alunos na turma de Microeconomia é
A) 12.
B) 47.
C) 7.
D) 28.
E) 23.

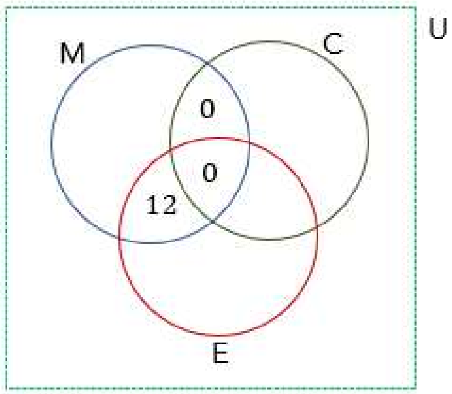
Comentários:

Nosso **conjunto universo é formado por 150 alunos** que estão matriculados em três disciplinas: Cálculo (C), Estatística (E) e Microeconomia (M). Lembre-se que nesse tipo de questão, nossa abordagem sempre **é começar pela intersecção dos três conjuntos**, depois, partimos para **as intersecções dois a dois** e por fim, para as regiões isoladas. Comece se perguntando: *qual a quantidade de alunos que cursam as 3 disciplinas?*

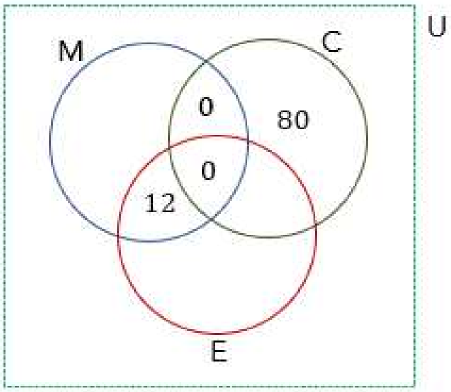
A resposta será zero! Veja que, de acordo com o enunciado, **não existem alunos que são matriculados em Microeconomia e Cálculo ao mesmo tempo**. Sendo assim, se não existe aluno matriculado nas duas, **não pode ter aluno matriculado nas 3**.



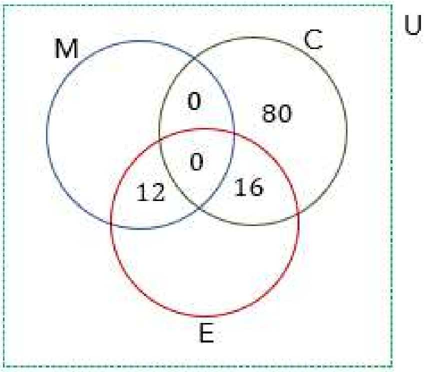
Sabemos ainda que **12 deles cursam simultaneamente Microeconomia e Estatística**.



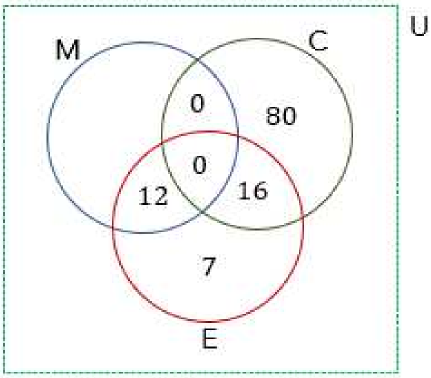
80 deles cursam SOMENTE cálculo.



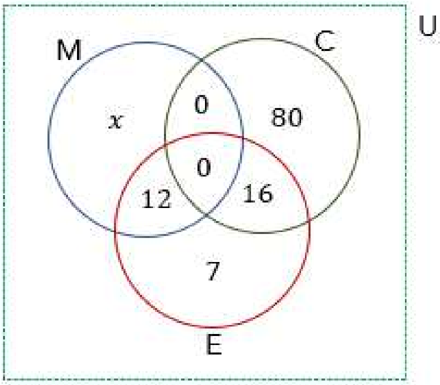
Como temos 80 alunos que fazem somente Cálculo, então **devemos ter 16 alunos que fazem Cálculo e Estatística para poder completar os 96 alunos da turma.**



São **35 alunos de Estatística** e no diagrama temos $12 + 16 = 28$. Logo, **7 alunos cursam somente Estatística**.



Seja x a quantidade de alunos que fazem **apenas Microeconomia**.



A quantidade de alunos elencadas nos diagramas acima deve **totalizar os 150 alunos dos 3 cursos**.

$$x + 12 + 0 + 0 + 7 + 16 + 80 = 150$$
$$x + 115 = 150$$
$$x = 35$$

Cuidado aqui! **35 é a quantidade de alunos que fazem APENAS Microeconomia**. Para descobrir o total de alunos de Microeconomia devemos somar com aqueles que também fazem Estatística (12). Logo,

$$\boldsymbol{n(M) = 35 + 12}$$
$$\boldsymbol{n(M) = 47}$$

Gabarito: Letra B**.**

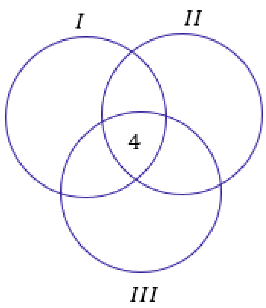
(TJ-PR/2019) Em determinado tribunal, os conselheiros atuam nos conselhos I, II e III, podendo atuar em apenas um, em dois ou em todos os conselhos, como mostra a tabela seguinte.

Quantidade de Conselheiros	Conselho de Atuação
35	I
25	II
24	III
10	I e II
12	I e III
8	II e III
4	I, II e III

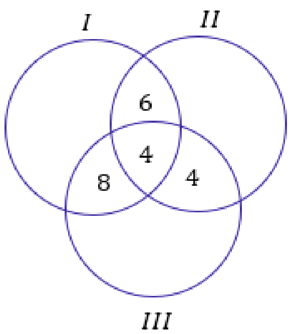
Nesse caso, a quantidade de conselheiros que atuam em, no máximo, um dos conselhos é igual a
A) 26.
B) 36.

C) 50.
D) 58.
E) 84.

Comentários:
Temos **três conselhos de atuação**, sendo que os conselheiros podem atuar em **apenas um, em dois ou em todos os conselhos**. É uma questão clássica de diagrama de Venn e PIE. Nesse tipo de questão, **devemos sempre começar com a quantidade de elementos na intersecção dos três conjuntos**. De acordo com a tabela, temos **4 conselheiros que atuam nos três conselhos**.

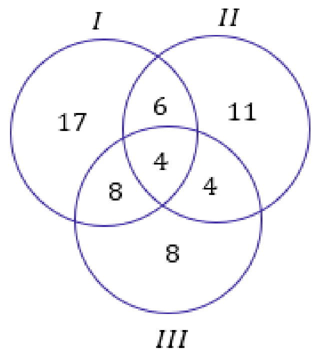


Uma vez com a quantidade de elementos da intersecção dos três conjuntos, **partimos para a análise dos elementos das intersecções de dois conjuntos**. Por exemplo, da tabela é possível ver que **10 conselheiros atuam nos conselhos I e II**. Como já contamos **4 deles na intersecção**, temos que $10 - 4 = 6$ conselheiros atuam **APENAS nos conselhos I e II**. Podemos usar esse raciocínio para as demais intersecções.



Agora que achamos as quantidades das intersecções, devemos partir para a análise das quantidades de conselheiros que atuam **APENAS um único conselho**. A tabela diz que **35 conselheiros atuam no conselho I**, nosso diagrama mostra que $6 + 4 + 8 = 18$ estão conselheiros estão atuando no conselho I **mas também em outros conselhos**.

Portanto, devemos fazer $35 - 18 = 17$ para obter a quantidade de conselheiros que estão atuando apenas no conselho I. Analogamente, se o conselho II possui 25 conselheiros e contabilizamos $6 + 4 + 4 = 14$, então sobra que **11 conselheiros atuam somente no conselho II**. Por fim, dos 24 conselheiros de III, temos contabilizados $8 + 4 + 4 = 16$ no diagrama. Logo, **8 atuam apenas em III**.



Com o nosso diagrama completo, podemos analisar o que a questão pede. O examinador quer **o número de conselheiros que atuam em apenas um dos conselhos**.

$$N = 17 + 11 + 8$$

$$N = 36$$

Gabarito: Letra B.

Conjuntos Numéricos

No capítulo anterior, vimos os mais diversos tipos de conjuntos. Aprendemos **as diferentes formas de representá-los e também algumas operações: a união, a intersecção, a diferença**. Nessa nova aula, daremos um foco especial aos **conjuntos numéricos**. Como o próprio nome sugere, são **grupos exclusivamente formado por números**! Compreender essa parte inicial da matemática é fundamental para que você possa **construir uma base sólida na matéria**. *Vamos nessa?!*

Conjunto dos Naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$. Basicamente, esse conjunto compreenderá aqueles números que **surgem "naturalmente" da necessidade de contar**. Observe.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

A primeira coisa que você deve notar é que no conjunto dos números naturais **não vamos ter os famosos "números quebrados"**. Também não teremos os números negativos. É o conjunto mais simples e **possui uma quantidade <u>infinita</u> de elementos**. Uma notação importante é **o asterisco sobrescrito** ao símbolo do conjunto. **Ele vai indicar que o 0 está sendo excluído da lista**. Pode ser usado para qualquer conjunto que veremos.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

No estudo dos números naturais, podemos introduzir dois novos conceitos: **o antecessor e o sucessor** de um número. O antecessor de um número natural nada mais é do que **o número que vem antes dele**. Por exemplo, o antecessor do 5 é o 4, o antecessor do 100 é o 99, o antecessor do 12341 é o 12340. Note que **o número 0 é o único natural que não possui <u>antecessor natural</u>**, pois **-1 pertence ao conjunto dos números inteiros,** como veremos posteriormente.

O **sucessor de um número é o número que vem após ele**. Por exemplo, o sucessor do 5 é o 6 e o sucessor do 80 é o 81. Dessa vez, perceba que **todos os naturais possuem sucessores**.

(CRA PR/2020) Acerca dos conjuntos dos números naturais, dos números inteiros e dos números racionais, de suas operações e de suas propriedades, julgue o item: a diferença entre dois números naturais é sempre um número natural.

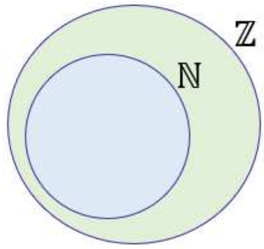
Comentários:

O melhor jeito de julgar assertivas desse tipo é **procurar um exemplo** que negue o que está escrito. Observe quando fazemos a diferença $\mathbf{3-5=-2}$. São dois números naturais que, quando calculamos a sua subtração nessa ordem, **obtemos um número negativo**. Sabemos que, no conjunto dos números naturais, **não temos números negativos**! Eles vão aparecer **a partir no conjunto dos números inteiros**. Portanto, o item encontra-se errado ao afirmar que a diferença entre dois números naturais **será sempre um natural**.

Gabarito: ERRADO.

Conjunto dos Inteiros ($\mathbb{Z}$)

Para obtermos o conjunto dos números inteiros, basta **pegar os naturais e adicionar os números negativos**!



$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

As primeiras informações que devemos ter em mente sobre o conjunto dos números inteiros é que ele **contém o conjunto dos números naturais**: $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$. Em outras palavras, **o conjunto dos números naturais é um subconjunto dos inteiros**.

Nesse contexto, note que **todos os números naturais são também números inteiros**. Portanto, é correto dizer que $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ **além de números naturais, são números inteiros**. Atenção ao fato de que, **os números negativos são números inteiros, mas não são números naturais**. Podemos utilizar o asterisco sobrescrito caso se queira tirar o 0 do conjunto.

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Nessa altura da au la, **é importante** definirmos duas classes especiais de números: **os números pares e os números ímpares**.

- **Número par**: todo número inteiro que pode ser escrito na forma $\boldsymbol{p = 2n}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- **Número ímpar**: todo número inteiro que pode ser escrito na forma $\boldsymbol{i = 2n + 1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

As definições acima podem parecer uma pouco complicadas, normalmente, elas são utilizadas apenas para demonstrar propriedades desses números. Logo, podemos defini-los de uma maneira mais simplificada.

- **Número par:** todo número terminado em $0, 2, 4, 6$ e 8.
- **Número ímpar**: todo número terminado em $1, 3, 5, 7$ e 9.

A forma como conceituamos acima é **uma consequência da definição original**. É muito útil quando precisamos identificar se um número é par ou ímpar!

(PREF. IMBÉ/2020) Analise as assertivas abaixo e assinale V, se verdadeiras, ou F, se falsas.

( ) 34 é sucessor de 35.

( ) Todo número natural tem antecessor, menos o zero.

( ) 3,5,7,9,11 é uma sequência de números naturais pares.

A ordem correta de preenchimento dos parênteses, de cima para baixo, é:

A) F – V – F.

B) V – F – V.

C) F – F – V.

D) V – V – F.

E) F – F – F.

Comentários:

(F) 34 é sucessor de 35.

Assertiva falsa. 34 vem antes do 35, portanto, **é seu antecessor**.

(V) Todo número natural tem antecessor, menos o zero.

Assertiva verdadeira. Perceba que **o antecessor do 0 seria o -1**. No entanto, lembre-se que **-1 não é um número natural**, mas sim, um número inteiro. Qualquer outro natural possuirá um antecessor: o antecessor do 1 será o 0, do 2 será o 1...

(F) $3, 5, 7, 9, 11$ é uma sequência de números naturais pares.

Assertiva falsa. Os números pares são: $0, 2, 4, 6, \ldots$. Os números apresentados na sequência **são ímpares**.

Gabarito: Letra A

(PREF. SA SUDOESTE/2020) Assinale a alternativa que representa a quantidade de números pares existentes na sequência $\{1, 3, 5, 8, 16, 20, 30, 50, 88, 100, 552, 663, 1000, 1114\}$.

A) 10

B) 20

C) 30

D) 40

Comentários:

Uma dica para facilitar nossa vida na identificação dos pares é tentar lembrar apenas os primeiros: $0{,}2{,}4{,}6\ e\ 8$. Qualquer número que termine com um desses algarismos **também será um número par**.

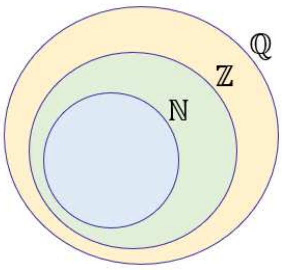
$$\{\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{5},\mathbf{8},\mathbf{16},\mathbf{20},\mathbf{30},\mathbf{50},\mathbf{88},\mathbf{100},\mathbf{552},\mathbf{663},\mathbf{1000},\mathbf{1114}\}$$

Os números destacados **são todos pares**. Quando contamos, descobrimos que temos 10 deles.

Gabarito: Letra A.

Conjunto dos Racionais ($\mathbb{Q}$)

Chegamos aos conjuntos dos números racionais! **O $\mathbb{Q}$ será formado pelo conjunto dos números inteiros mais os "números quebrados"!** Basicamente, dizemos que um número é racional se ele pode ser representado na forma de fração! Perceba, portanto, que o conjunto dos inteiros é um subconjunto dos racionais! $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



Isso significa que números como $\mathbf{1}, \mathbf{2}\ \boldsymbol{ou}\ \mathbf{3}$ **além de serem naturais, são inteiros e também são racionais**. Mas vamos explicar melhor nossa definição de número racional, pois existem **mais uma condição que ele deve obedecer para ser considerado um número racional**. Logo, para um número ser racional precisamos que:

1. Ele possa ser representado em uma **forma fracionária <u>de números inteiros</u>**.

$$\frac{1}{1} = 1 \quad ; \quad \frac{3}{2} = 1{,}5 \quad ; \quad \frac{10}{2} = 5 \quad ; \quad \frac{1}{10} = 0{,}1 \quad ; \quad \frac{500}{3} = 166{,}66\ldots$$

Todos os números acima são exemplos de números racionais.

2. Se ele tiver **uma representação decimal infinita**, para ser um racional, **ela também deve periódica**.

$$0{,}333\ldots \quad ; \quad 1{,}67676767\ldots ; \quad 100{,}123123123123\ldots \quad ; \quad 1{,}000100010001\ldots$$

Números com o formato acima são exemplos de números racionais pois, **apesar de possuírem uma representação decimal infinita, ela é periódica**. Esses números são **as famosas dízimas periódicas**! Estudaremos ela **com mais detalhes na nossa próxima aula**, onde daremos um foco especial no estudo das frações.

De antemão, eu quero que você grave: **dízimas periódicas são números racionais**! Elas podem ser convertidas em frações! Não se preocupe em entender as dízimas periódicas agora. **Dedicaremos um tempo na próxima aula exclusivamente para elas**! Guarde apenas que **são números racionais** e que **podemos transformá-las em frações**!

Quando falamos da **representação decimal finita** de um número, estamos nos referindo a um número que possui uma **quantidade finita de algarismos**. Por exemplo, $100{,}003$ é um número com representação decimal finita. Já **o número $\mathbf{1,333\ldots}$ é um exemplo de número com representação decimal infinita**. As reticências indicam que há muitos mais números a serem considerados. Nesse caso, esse número é formado por **infinitos "3" após a vírgula**. **Como o número 3 se repete**, dizemos ainda que possui uma representação decimal finita **e periódica**!

O que acontece se um número possuir uma **representação decimal infinita mas que não é periódica**? Nesses casos, **não poderemos escrever esses números em uma forma fracionária** e eles serão chamados de **números irracionais**! Aposto que você conhece alguns números irracionais: $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots, \sqrt{3} = 1{,}7320\ldots, \pi = 3{,}1415\ldots$. **Não ache** que todas as raízes são números irracionais. Veja, por exemplo, que $\sqrt{4} = 2$, mas **2 é um número natural**.

(CM MANDAGUARI/2019) Considerando os conjuntos numéricos, assinale a alternativa CORRETA:

A) O número $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$

B) O número $\pi \in \mathbb{Q}$

C) O número $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

D) O número $\sqrt{36} \in \mathbb{Q}$

Comentários:

A) O número $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$

Alternativa incorreta. **$\sqrt{2}$ é um número irracional** e não um número natural.

B) O número $\pi \in \mathbb{Q}$

Alternativa incorreta. $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais. **O número $\pi = 3,1415\ldots$ é um número irracional** pois sua representação decimal infinita **é aperiódica** e, portanto, não pode ser convertido em uma forma fracionária.

C) O número $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

Alternativa incorreta. $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais. O número $\sqrt{3} = \mathbf{1,7320} \ldots$ é um número irracional pois sua representação decimal infinita é aperiódica e, portanto, **não pode ser convertido em uma forma fracionária**.

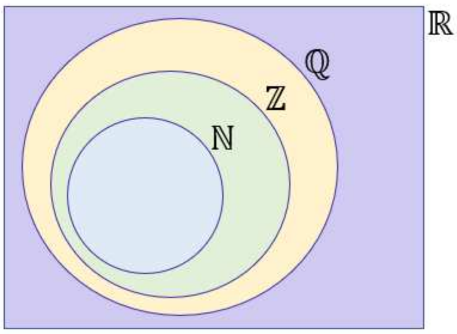
D) O número $\sqrt{36} \in \mathbb{Q}$

Alternativa correta. $\sqrt{36} = 6$. Veja que 6 é um número natural que, como estudamos, está contido no conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$).

Gabarito: Letra D.

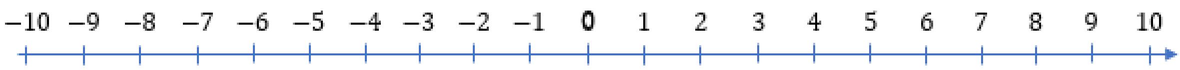
Conjuntos dos Irracionais e dos Reais

Chegamos ao conjunto dos números reais! Esse conjunto **engloba tanto o conjunto dos números racionais quanto os números irracionais (representados pela região lilás no diagrama abaixo)**!

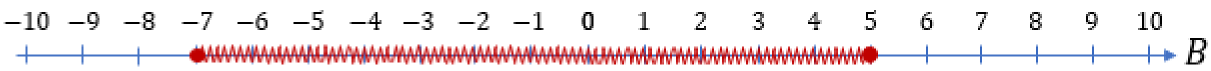


Normalmente, representamos o conjunto dos irracionais como $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Da aula anterior, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ significa **o conjunto formado pelos números reais que não são números racionais**!

Pessoal, tentarei simplificar. Um número real é o conjunto de **todos os números que lidamos no nosso dia a dia**... Não importa se ele tem uma representação decimal finita tal como os números $\mathbf{1,5}$ e $\mathbf{10,354}$ ou uma representação decimal infinita como $\mathbf{1,6666} \ldots$. e $\mathbf{3,1415} \ldots$. Além de representar o conjunto dos números reais em um diagrama, também usamos uma reta! **É a chamada reta real**!



Esse tipo de representação vai ser usado principalmente **quando tivermos estudando inequações**! Lá, precisaremos definir um tipo de conjuntos que **chamaremos de intervalo**. Por exemplo, se quero representar um conjunto B formado por todos os números que estão entre -7 e 5, **com eles inclusos**, podemos fazer o seguinte esquema:



HORA DE PRATICAR!

(PREF. PERUÍBE/2019) Em relação ao conjunto dos números reais, é verdade que

A) o produto de dois números irracionais não pode ser um número racional.

B) a soma de dois números irracionais distintos é sempre um número irracional.

C) todo número racional tem uma representação decimal finita.

D) o número $43/71$ não é racional, pois sua representação decimal não é periódica.

E) se a representação decimal infinita de um número é periódica, então esse número é racional.

Comentários:

A) o produto de dois números irracionais não pode ser um número racional.

Alternativa incorreta. Vamos recorrer a um exemplo para mostrar que isso não é verdade. Considere os números irracionais $\sqrt{5}$ e $\sqrt{20}$. Quando fazemos o produto desses dois números, obtemos que $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$. Note que, o produto dos dois números irracionais **deu um número racional**.

B) a soma de dois números irracionais distintos é sempre um número irracional.

Alternativa incorreta. Vamos recorrer também a um exemplo para mostrar que não é verdade. Considere **os números irracionais $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$**. Vamos somá-los?

$$S = \left(1 + \sqrt{3}\right) + \left(1 - \sqrt{3}\right)$$

$$S = 2$$

Logo, a soma dos números irracionais distintos que escolhemos **resultou em um número natural**!

C) todo número racional tem uma representação decimal finita.

Alternativa incorreta. Dízimas periódicas, apesar de possuírem uma representação decimal **infinita**, **são consideradas números racionais pois podem ser escritas na forma de uma fração** (a chamada fração geratriz).

D) o número $43/71$ não é racional, pois sua representação decimal não é periódica.

Alternativa incorreta. Simplesmente pelo fato de poder ser **representado na forma de uma fração de números inteiros**, **já é suficiente para considerá-lo um número racional**. Além disso, sua representação decimal é periódica.

E) se a representação decimal infinita de um número é periódica, então esse número é racional.

Alternativa correta. Sabemos que se a representação decimal infinita de um número é periódica, então estamos falando das dízimas periódicas. **Qualquer dízima periódica pode ser representada na forma de uma fração geratriz**. Se pode ser representada por uma fração de números inteiros, então trata-se de um número racional.

Gabarito: Letra E.

Operações Básicas no Contexto dos Conjuntos Numéricos

Nessa parte da aula, falaremos um pouco mais sobre **as operações** dentro dos conjuntos numéricos. O foco não será propriamente em como realizar essas operações, mas sim **em algumas propriedades que estão sempre aparecendo nas provas**.

Vamos responder os seguintes tipos de questionamentos: *a soma de números inteiros será sempre um número inteiro? E a multiplicação de números irracionais será sempre um número irracional? Fique atento e vamos nessa*!

Soma

Para a soma, devemos guardar as seguintes propriedades:

- A soma de números naturais é sempre um número natural;
- A soma de números inteiros é sempre um número inteiro;
- A soma de números racionais é sempre um número racional;
- A soma de números reais é sempre um número real.

Note que deixamos apenas um conjunto de números fora da nossa lista: **os irracionais**. Como já abordamos em uma questão feita no capítulo anterior, **a soma de números irracionais <u>nem sempre</u> será um número irracional**. Para mostrar isso, imagine o seguinte exemplo: considere os números irracionais $5+\sqrt{2}$ e $5-\sqrt{2}$. Vamos somá-los?

$$S = \left(5+\sqrt{2}\right) + \left(5-\sqrt{2}\right)$$
$$S = 5+\sqrt{2}+5-\sqrt{2}$$
$$S = 10$$

Perceba que a soma dos dois número irracionais que escolhemos **resultou em um número racional**. Logo, muito atenção com esse tipo de **generalização acerca dos números irracionais**! Além disso, podemos ainda comentar a soma de números pares e ímpares.

- $\text{PAR} \pm \text{PAR} = \text{PAR}$
- $\text{ÍMPAR} \pm \text{ÍMPAR} = \text{PAR}$
- $\text{ÍMPAR} \pm \text{PAR} = \text{ÍMPAR}$

HORA DE PRATICAR!

(PREF.PARAÍ/2019/ADAPTADA) Considere as seguintes afirmações sobre os números naturais:

I. A soma de dois números naturais pares é sempre um número par.
II. A soma de dois números ímpares é sempre um número ímpar.

Quais estão corretas?
A) Apenas I.
B) Apenas II.
C) Apenas I e II.
D) N.D.A.

Comentários:
I. A soma de dois números naturais pares é sempre um número par.
Assertiva verdadeira. Sabemos que se **n_1 e n_2 são dois números pares**, então eles podem ser escritos na forma $\boldsymbol{n_1 = 2p}$ e $\boldsymbol{n_2 = 2q}$. Seja s a soma dos dois, então:

$$s = n_1 + n_2 \quad \rightarrow \quad s = 2p + 2q \quad \rightarrow \quad s = 2 \cdot (p + q)$$

Perceba que **s possui o fator 2** e, portanto, **também é um número par**.

II. A soma de dois números ímpares é sempre um número ímpar.
Assertiva falsa. Para julgar essa afirmativa, é suficiente buscarmos um contraexemplo. Quando somamos 1 e 3, **que são números ímpares**, obtemos 4, **que é um número par**.

Gabarito: Letra A.

Subtração

SE LIGA!

- A subtração de números inteiros é um outro número inteiro.
- A subtração de números racionais é um outro número racional.
- A subtração de números reais é um outro número real.

Dessa vez, deixamos dois conjuntos de fora: **o conjunto de números naturais e dos irracionais**. Observe que 10 e 100 são dois números naturais, vamos subtraí-los?

$$D = 10 - 100 \quad \rightarrow \quad D = -90$$

A subtração do 10 por 100 resulta em -90. Logo, tivemos **dois números naturais que subtraídos forneceram um número inteiro**. Isso sempre acontecerá quando subtraímos um número maior de um menor. É por esse motivo que **não podemos dizer que a subtração de dois números naturais é um outro número natural**.

Analogamente, para os números irracionais, vamos **escolher dois números para mostrar que essa propriedade não vale para eles**. Por exemplo, considere os seguintes números irracionais: π e $\pi + 2$. Vamos subtraí-los? Note que **o resultado será um número racional.**

$$D = (\pi + 2) - \pi \quad \rightarrow \quad D = 2$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. ARARANGUÁ/2016) Assinale a alternativa INCORRETA:

A) A diferença entre dois números naturais pode não ser um número natural.

B) O produto entre dois números racionais é sempre um número racional.

C) A soma entre dois números irracionais é sempre um número irracional.

D) $0{,}845$ e $1{,}7454545\ldots$ são números racionais.

E) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ e π são números irracionais.

Comentários:

A) A diferença entre dois números naturais pode não ser um número natural.

Correto. Acabamos de ver na teoria que, em algumas situações, **a subtração de dois números naturais poderá dar um número negativo** (que é um número inteiro).

B) O produto entre dois números racionais é sempre um número racional.

Correto. Se temos dois números racionais, então eles podem ser escritos na forma de uma fração de números inteiros. O **produto dessas frações será uma outra fração** também de números inteiros e, portanto, um número racional.

C) A soma entre dois números irracionais é sempre um número irracional.

Errado. É a alternativa procurada. Vimos também na teoria que a soma entre dois números irracionais nem sempre dará um outro número irracional. **Algumas vezes, poderemos obter um número racional**.

D) $0{,}845$ e $1{,}7454545\ldots$ são números racionais.
Correto. Observe que o número **$0{,}845$ possui uma representação decimal finita**, sendo assim, é facilmente convertido em uma fração de números inteiros, veja:

$$0{,}845 = \frac{845}{1000}$$

Além disso, $1{,}7454545\ldots$ é uma dízima periódica e vimos que **toda dízima periódica é um número racional**.

E) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ e π são números irracionais.
Correto. São exemplos clássicos de números irracionais. Observe eles expandidos:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379\ldots$$

$$\sqrt[3]{4} = 1{,}5874010519681994747517056392723082603914933278998530098082857618\ldots$$

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923\ldots$$

Gabarito: Letra C

Multiplicação

- A multiplicação de dois números naturais é sempre um número natural.
- A multiplicação de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
- A multiplicação de dois números racionais é sempre um número racional.
- A multiplicação de dois números reais é sempre um número real.

Mais uma vez, **os números irracionais ficaram de fora** da nossa lista. Para provar porque estão de fora, vamos considerar dois números irracionais:

$$\sqrt{5} = 2.2360679774997896964091736687312\ldots$$

$$\sqrt{20} = 4.47213595499957939281834733746\ldots$$

Quando multiplicamos os dois: $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$. Note que, **nesse exemplo**, o produto de dois números irracionais **resultou em um número racional**.

HORA DE PRATICAR!

(CRA-PR/2020) Acerca dos conjuntos dos números naturais, dos números inteiros e dos números racionais, de suas operações e de suas propriedades, julgue o item: o produto entre dois números naturais é sempre um número natural.

Comentários:

Lembre-se do conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7 \dots\}$$

Observe que, com exceção do 0, **todos são números positivos**. Sabemos que a multiplicação de dois números positivos **sempre dará um outro número positivo**. Logo, não há perigo de multiplicarmos nenhum dos números do conjunto acima e obter um número negativo (**que sabemos que não é um natural**).

Além disso, **qualquer multiplicação em que um dos fatores seja 0, também dará 0.** Dessa forma, percebemos que **não há como** a multiplicação de dois números naturais não ser um número natural e, portanto, o item está correto.

Gabarito: CERTO.

(PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) O produto de dois números racionais é sempre um número racional. O mesmo é válido para números irracionais: o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

Comentários

De maneira simplificada, podemos conceituar um número racional como **todo número que pode ser escrito na forma de uma fração de números inteiros**. De fato, como vimos na teoria, **a multiplicação de dois números racionais será um racional**, mas **o produto** de dois números irracionais **nem sempre será irracional**.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

Gabarito: ERRADO.

Divisão

- A divisão de dois números racionais será sempre um racional.
- A divisão de dois números reais será sempre um número real.

Observe que é a nossa menor lista até agora. **Divisão de números naturais não necessariamente fornecerá um outro número natural**, isso vale igualmente **para os números inteiros e irracionais**. Observe.

➢ Considere **os números naturais $\mathbf{1}$ e $\mathbf{2}$**. Vamos dividi-los?

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ora, **$0,5$ não é um número natural**, é um número racional.

➢ Considere **os números inteiros $-\mathbf{5}$ e $\mathbf{2}$**. Vamos dividi-los?

$$-\frac{5}{2} = -2{,}5$$

$-2,5$ não é um número inteiro, é um número racional.

➢ Considere **os números irracionais $\sqrt{\mathbf{1000}}$ e $\sqrt{\mathbf{10}}$**. Vamos dividi-los?

$$\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{10}} = \sqrt{100} = 10$$

10 não é um irracional, é um número racional.

Muito cuidado com **as generalizações envolvendo divisões (quocientes).** Esse cuidado maior deve-se ao fato de que **os conjuntos de números naturais e inteiros não abrigam os famosos "números quebrados"** e, quando dividimos um número pelo outro, é muito fácil obter esse tipo número.

(PREF. SUZANO/2015) Com relação à operação com números reais, é correto afirmar que

A) o produto de dois números racionais pode resultar em um número irracional.

B) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

C) a soma de dois números racionais pode resultar em um número irracional.

D) o quociente de dois números irracionais é sempre um número irracional.

E) a soma de dois números irracionais pode resultar e um número racional.

Comentários:

A) o produto de dois números racionais pode resultar em um número irracional.

Alternativa incorreta. Como vimos, **o produto de dois número racionais é sempre um número racional**. Considere os dois números racionais a seguir $r_1 = a/b$ e $r_2 = c/d$. Quando multiplicamos, obtemos que:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Veja que **o produto das frações continua sendo uma fração de números inteiros**. Se pode ser escrito como uma fração de números inteiros, então é um número racional.

B) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

Alternativa incorreta. Lembre-se que dos exemplos que mostramos na aula $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$. São **dois números irracionais que multiplicados fornecem um número racional**.

C) a soma de dois números racionais pode resultar em um número irracional.

Alternativa incorreta. A soma de dois números racionais fornece **sempre** **um número racional**.

D) o quociente de dois números irracionais é sempre um número irracional.

Alternativa incorreta. Lembre-se do exemplo que tratamos na aula:

$$\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{10}} = \sqrt{100} = 10$$

O exemplo acima traz **o quociente de dois números irracionais dando um número racional**.

E) a soma de dois números irracionais pode resultar em um número racional.

Alternativa correta. Imagine os números irracionais $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$. O que acontece quando somamos os dois? $(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) = 2$. Obtivemos **o número 2 que é um número racional**. Logo, o item encontra-se correto quando afirma que a soma de dois irracionais **pode dar um racional**.

Gabarito: Letra E.

QUESTÕES COMENTADAS - CEBRASPE

Operações com Conjuntos

1. (CEBRASPE/TST/2024) Considerando-se P como o conjunto dos números primos ímpares e I como o conjunto dos números naturais ímpares, conclui-se que P - I será

A) o conjunto dos números pares.

B) o conjunto dos números ímpares primos.

C) o conjunto dos números primos pares.

D) o conjunto vazio.

E) o conjunto dos ímpares não primos.

Comentários:

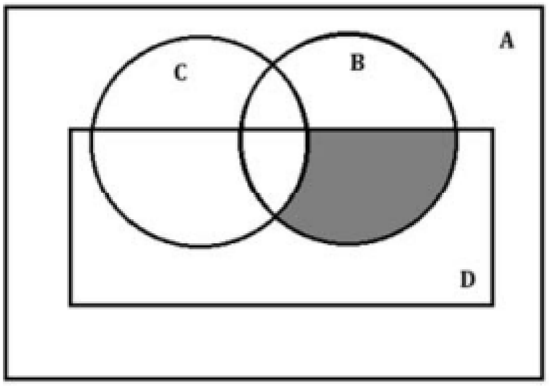
Queremos determinar quem será o conjunto diferença $P - I$.

Pessoal, se **P é o conjunto dos números primos ímpares**, vocês concordam que **todos os elementos de P serão ímpares??** Quando buscamos $P - I$, queremos todos os elementos de P que não são ímpares. Ora, **nenhum**!! Todos os elementos de P, apesar de primos, também são ímpares!

Sendo assim, $\boldsymbol{P - I}$ **é o conjunto vazio**.

Gabarito: LETRA D.

2. (CEBRASPE/ISS - CAMAÇARI/2024)



Na figura precedente, que representa quatro conjuntos identificados por A, B, C e D, a região destacada corresponde a

A) $(B - C) \cap D$.

B) $B \cap D$.

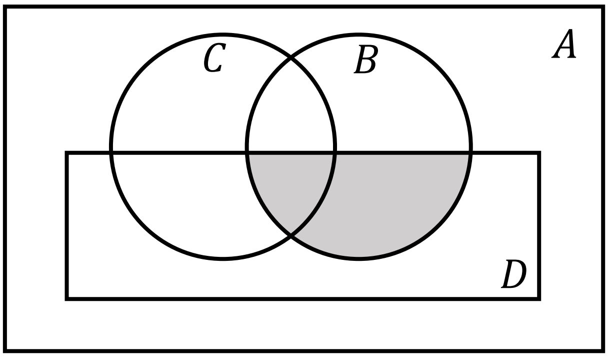
C) $B \cap C \cap D$.

D) $(B - D) \cap C$.
E) $B - D$.

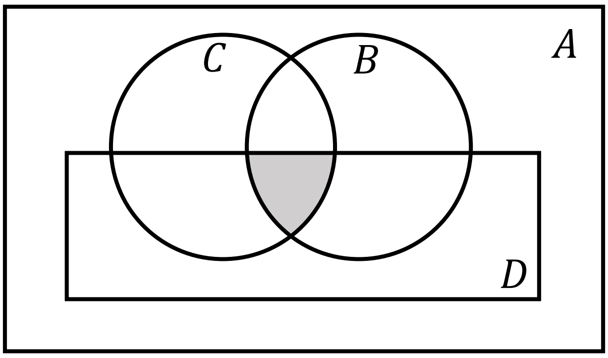
Comentários:
Observe que a região destacada **é comum aos conjuntos B e D**. No entanto, **não possui nada de C.** Sendo assim, devemos buscar a alternativa em que temos uma **diferença com C** e alguma **intersecção entre B e D**. Vamos analisá-las?

A) $(B - C) \cap D$.
Correto. É exatamente isso, pessoal. Observe que primeiro ele faz a diferença entre B e C, restando apenas aqueles elementos de B que **não pertencem a C.** Depois, **ele faz a intersecção com D**, resultando na região destacada. **Um mesmo resultado seria obtido fazendo $(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}) \cap \boldsymbol{B}$.**

B) $B \cap D$.
Errado. Observe que aqui **não foi retirado os elementos do conjunto C**. Desse modo, a região seria:

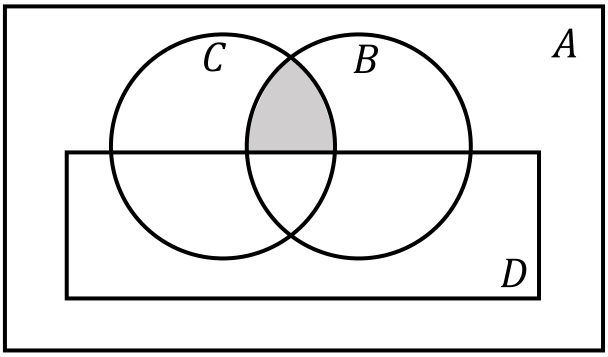


C) $B \cap C \cap D$.
Errado. Mais uma vez, temos uma alternativa que **inclui os elementos de C**. Dessa vez, a região seria:



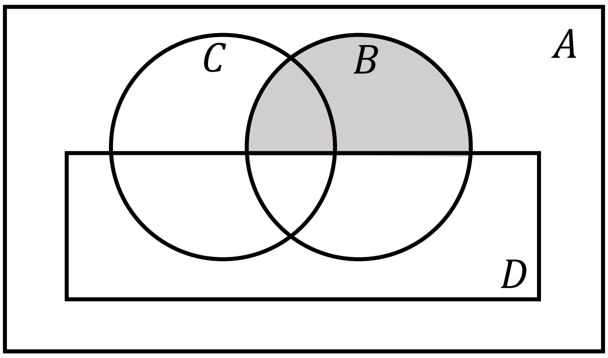
D) $(B - D) \cap C$.

Errado. Essa aqui **tirou os elementos de D.** Isso não pode ocorrer! Observe que a região do enunciado contém parte de D. Para essa alternativa, temos a seguinte região:



E) $B - D$.

Errado. Mais uma alternativa que **tirou os elementos de D e deixou os de C**. A região resultante seria:



Gabarito: LETRA A.

TEXTO PARA AS QUESTÕES 3 E 4.

Especialistas em financiamento e execução de programas e projetos educacionais foram designados para trabalhar em três projetos diferentes, sendo que um mesmo especialista pode trabalhar em dois ou até nos três projetos. O conjunto A representa o grupo de especialistas designados para trabalhar no projeto 1; B, o conjunto formado por especialistas designados para trabalhar no projeto 2; e C, o conjunto formado por especialistas designados para trabalhar no projeto 3. Em relação a essa situação hipotética, julgue os seguintes itens.

3. (CEBRASPE/FNDE/2023) O subconjunto dos especialistas que trabalham somente em um projeto pode ser corretamente representado por $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) - (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})$.

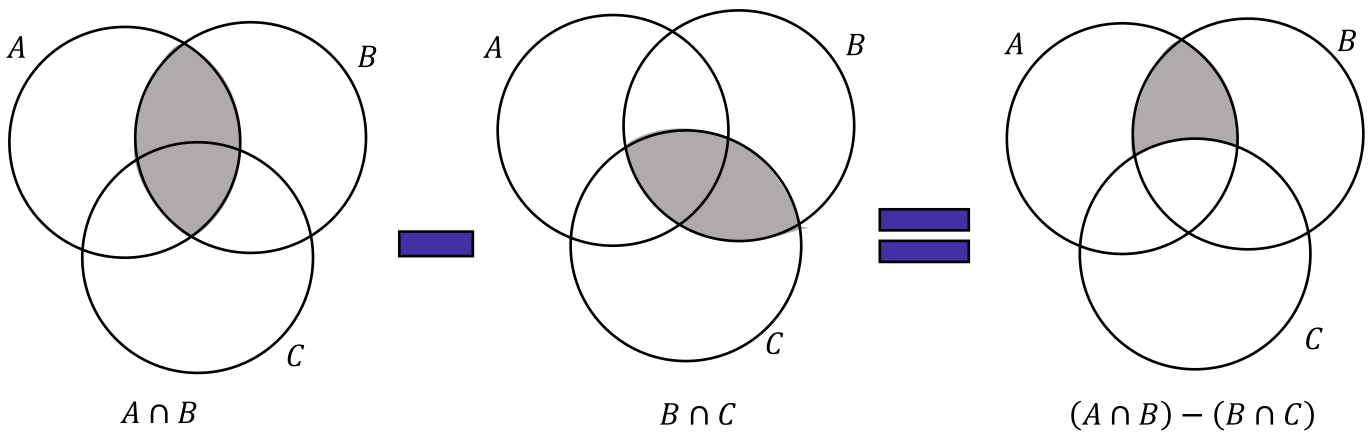
Comentários:

Pessoal, $A \cup B \cup C$ representa a união de todos os três conjuntos. Sendo assim, engloba tanto aqueles que trabalham em um único projeto, como em dois ou três. Em outras palavras, **todos os especialistas envolvidos com pelo menos um dos projetos está em $A \cup B \cup C$.**

Quando tiramos a intersecção $A \cap B \cap C$, **tiramos apenas aqueles que trabalham nos <u>três projetos</u>**. Quem trabalha em dois, continua. Sendo assim, é **<u>incorreto</u>** falar que $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$ representa o subconjunto dos especialistas que trabalham em somente um projeto, pois **aqueles que trabalham em até dois projetos também estão no conjunto**. **Gabarito:** ERRADO.

4. (CEBRASPE/FNDE/2023) O subconjunto dos especialistas designados para trabalhar nos projetos 1 e 2, mas não no projeto 3, pode ser corretamente representado por $(A \cap B) - (B \cap C)$.

Comentários:
Vamos fazer essa por diagramas!



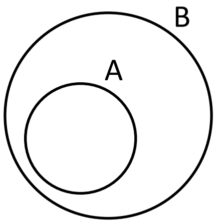
Gabarito: CERTO.

5. (CEBRASPE/PETROBRAS/2023) Acerca da teoria dos conjuntos, julgue o próximo item.

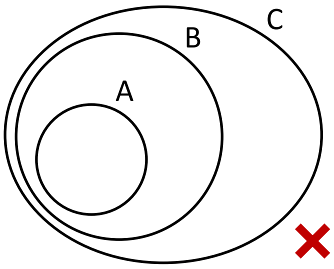
Para três conjuntos, A, B e C, não vazios, se A está contido em B e se C não contém B, então C também não contém A.

Comentários:
Vamos desenhar as situações!

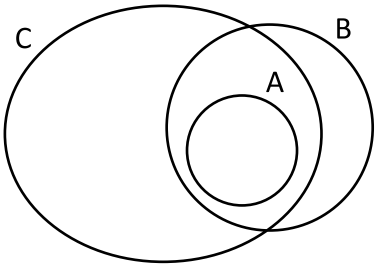
Inicialmente, se **A está contido em B**, temos:



Ainda, temos que C não contém B. Isso significa que **não** podemos ter a seguinte situação:



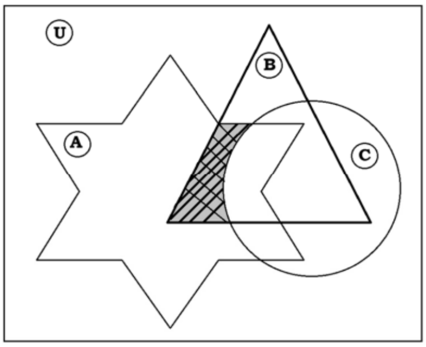
No entanto, **várias outras continuam permitidas**, como, por exemplo:



Nessa última situação, observe que, mesmo sem conter B, **C pode conter A**.

Gabarito: ERRADO.

6. (CEBRASPE/PM-SC/2023)



A figura precedente apresenta os conjuntos A, B, C e U. Considerando que $C_Y(X)$ representa o complementar de X em Y, assinale a opção que representa corretamente o subconjunto do conjunto B em destaque na referida figura.

A) $C_U(C \cap B)$
B) $A \cap B \cap C$
C) $C_B(C) \cap A$
D) $C_U(A) \cap C$
E) $A \cup (B \cap C)$

Comentários:

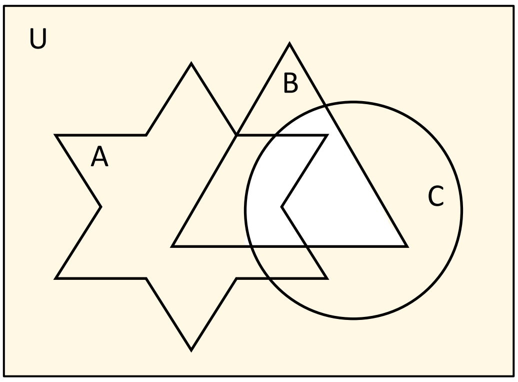
Pessoal, lembrem-se que o complementar de X em Y representa aquele conjunto formado pelos **elementos de Y que não são elementos de X**, ou seja:

$$C_Y(X) = Y - X$$

Uma boa saída para essa questão é avaliar cada uma das regiões das alternativas.

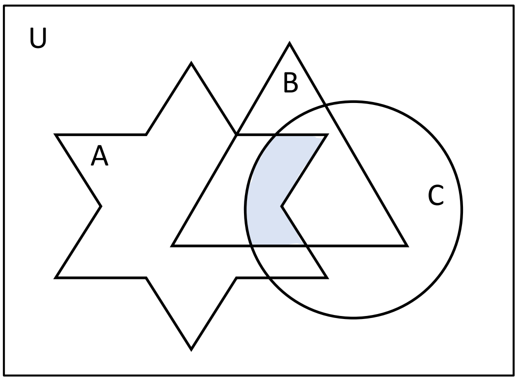
A) $C_U(C \cap B)$

Errado. Observe que se trata do complementar de $C \cap B$ em U. Em outras palavras, é tudo que pertence a U mas não pertence a $C \cap B$. Vamos mostrar no desenho.



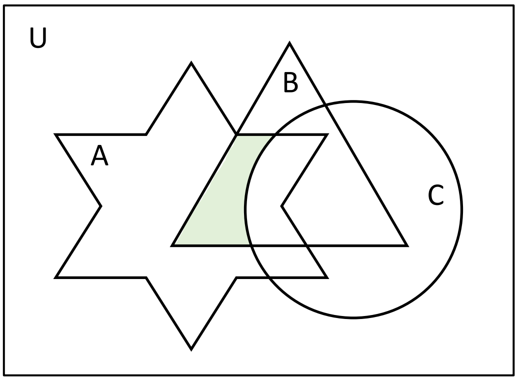
B) $A \cap B \cap C$

Errado. Nessa alternativa, temos apenas a intersecção dos três conjuntos.



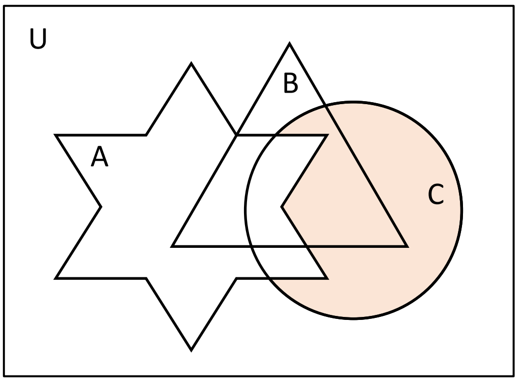
C) $C_B(C) \cap A$

Opa, essa parece promissora! Observe que se trata da intersecção do complementar de C em B com A. Ora, primeiro identificamos tudo que pertence a B e não está em C e, depois, fazemos a intersecção com A. O resultado é exatamente a figura do enunciado! **É o nosso gabarito.**



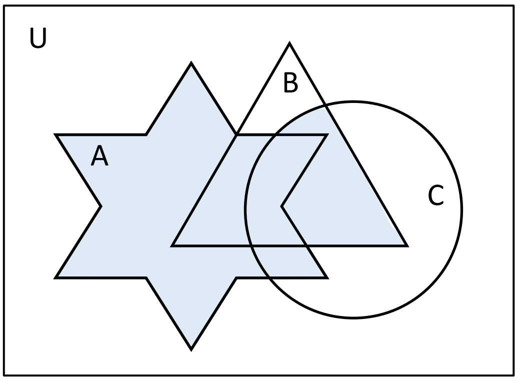
D) $C_U(A) \cap C$

Errado. Nessa alternativa, tem-se a intersecção de todos os elementos de U que não pertencem a A com o conjunto C. Observe que o resultado disso será os elementos de C que não pertencem a A.



E) $A \cup (B \cap C)$

Errado. Aqui, temos que fazer a união de A com a intersecção de B com C.



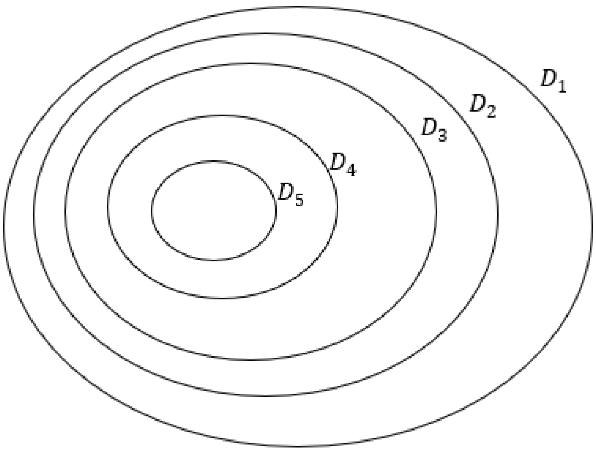
Gabarito: LETRA C.

7. (CEBRASPE/PC-PB/2022) Considere que, no conjunto D_0 de todos os detentos em dado momento, D_1 seja o conjunto de todos os detentos condenados pelo cometimento de, pelo menos, um crime, D_2 seja o conjunto dos condenados por, pelo menos, dois crimes, e assim por diante. Nessa situação, o conjunto dos detentos condenados pelo cometimento de exatamente 4 crimes é

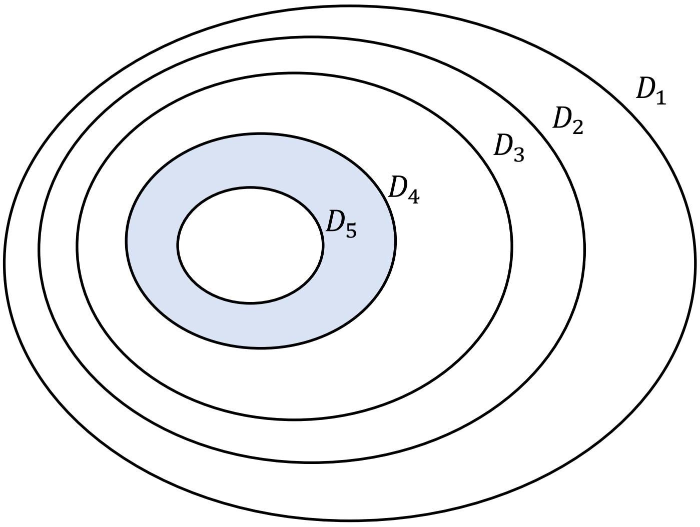
A) $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4$
B) $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$
C) D_4
D) $D_4 - D_5$
E) $D_5 - D_4$

Comentários:

Inicialmente, é importante observar que D_5 está contido em D_4, que D_4 está contido em D_3... Afinal, quem cometeu **pelo menos quatro crimes**, pode ter cometido 5 ou mais. Por esse motivo D_5 está contido em D_4. O mesmo raciocínio se aplica para os demais conjuntos.



Queremos o conjunto de detentos condenados pelo cometimento de **exatos quatro crimes**. Vamos destacar na figura o conjunto desejado.



Observe que são **todos os elementos de D_4 que não são elementos de D_5**. Logo, o conjunto procurado é:

$$\boxed{D_4 - D_5}$$

Gabarito: LETRA D.

8. (CEBRASPE/MPjTCE-SC/2023) Dada uma equipe de dez servidores, entre eles Alberto e Bruna, W é o conjunto de todas as listas que podem ser formadas com exatamente três servidores.

A partir das informações anteriores, e sabendo que, nessa hipótese, A é o conjunto de todas as listas em que consta o nome de Alberto e B, o conjunto daquelas em que consta o nome de Bruna, julgue o item que se segue.

O conjunto de listas que não apresentam os nomes de Alberto nem de Bruna pode ser corretamente representado por $W - A \cap B$.

Comentários:
Questão para testar nosso conhecimento sobre o **conjunto diferença**.

Pessoal, $A \cap B$ representa o conjunto das listas em que os nomes de Alberto e Bruna aparecem juntos! Ou seja, são todas as listas que aparecem **Alberto, Bruna e mais um servidor X**.

Sendo assim, $W - A \cap B$ é apenas o conjunto das listas em que os nomes de Alberto e Bruna não aparecem juntos! Dessa forma, os nomes de Alberto e Bruna até podem constar na lista desse conjunto, **desde que não apareçam na mesma lista**. Exemplos de listas nesse conjunto:

Lista 1: Alberto, servidor X, servidor Y;

Lista 2: Bruna, servidor X, servidor Z;
Lista 3: servidor X, servidor Y, servidor Z;
...

Para escolher aquelas listas que não apresentam os nomes de Alberto nem de Bruna em nenhuma hipótese, deveríamos usar o conjunto **união** e não o conjunto intersecção. Portanto, o conjunto correto seria:

$$\boxed{W - A \cup B}$$

Gabarito: ERRADO.

9. (CEBRASPE/MPjTCE-SC/2023) Dada uma equipe de dez servidores, entre eles Alberto e Bruna, W é o conjunto de todas as listas que podem ser formadas com exatamente três servidores.

A partir das informações anteriores, e sabendo que, nessa hipótese, A é o conjunto de todas as listas em que consta o nome de Alberto e B, o conjunto daquelas em que consta o nome de Bruna, julgue o item que se segue.

O conjunto de listas que apresentam apenas um dos nomes Alberto ou Bruna pode ser corretamente representado por $(A - B) \cup (B - A)$.

-

Comentários:
É isso mesmo, pessoal!

$A - B$ representa o conjunto de todas as listas que **apresentam o nome de Alberto mas não apresentam o nome de Bruna**. Por sua vez, $B - A$ é formado por todas as listas que **apresentam o nome de Bruna mas não o nome de Alberto**. Quando fazemos a união desses dois conjuntos, temos todas as listas que apresentam apenas um dos nomes.

Gabarito: CERTO.

10. (CEBRASPE/COGE-CE/2019) Segundo o portal cearatransparente.ce.gov.br, em 2018, dos 184 municípios do estado do Ceará, 4 celebraram exatamente 1 convênio com o governo estadual, 22 celebraram exatamente 2 convênios com o governo estadual, e 156 celebraram 3 ou mais convênios com o governo estadual. De acordo com o texto, se, para cada $j = 0, 1, 2, \ldots,$ M_j for o conjunto dos municípios cearenses que celebraram, pelo menos, j convênios com o governo estadual, então o conjunto dos municípios que não celebraram nenhum convênio com o governo do estado será representado pelo conjunto

A) M_0
B) $M_1 - M_0$

C) $M_1 \cap M_0$
D) $M_0 - M_1$
E) $M_0 \cup M_1$

Comentários:
Se M_j representa o conjunto dos municípios que celebram, pelo menos, j convênios, **M_0 é o conjunto dos municípios que celebram, pelo menos, "zero convênios"**. Em outras palavras, basicamente todos os municípios estão inseridos nesse conjunto, pois **incluem aqueles que não fazem nenhum convênio e aqueles que fazem qualquer número**.

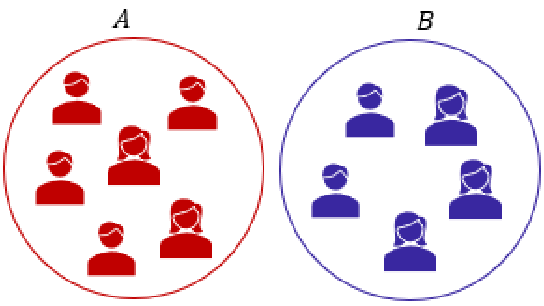
Para obter o conjunto dos munícipios que não celebraram nenhum convênio, **devemos retirar do conjunto M_0 todos os munícipios que celebram 1 ou mais convênios**. Isso é representado por $M_0 - M_1$.

Gabarito: LETRA D.

11. (CEBRASPE/TRF-1/2017) Em uma reunião de colegiado, após a aprovação de uma matéria polêmica pelo placar de 6 votos a favor e 5 contra, um dos 11 presentes fez a seguinte afirmação: "Basta um de nós mudar de ideia e a decisão será totalmente modificada." Considerando a situação apresentada e a proposição correspondente à afirmação feita, julgue o próximo item.

Se A for o conjunto dos presentes que votaram a favor e B for o conjunto dos presentes que votaram contra, então o conjunto diferença A\B terá exatamente um elemento.

Comentários:
É possível representar os conjuntos A e B conforme o diagrama abaixo.



Observe que **não há intersecção entre A e B**, pois, **uma mesma pessoa não pode pertencer aos dois conjuntos**. Isso ocorre devido a **<u>impossibilidade de se votar a favor e contra simultaneamente</u>**. Portanto, sabemos que quando **A e B são disjuntos, então temos que $A \backslash B = A$**. Como A tem seis elementos, então A\B terá também seis elementos e **não apenas um**, como indica o item.

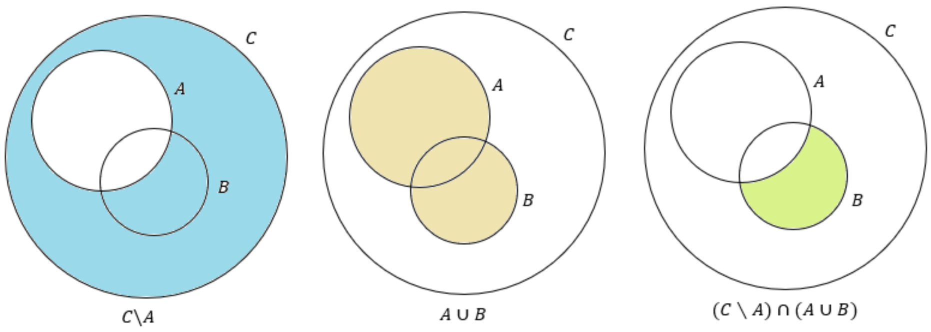
Gabarito: ERRADO.

12. (CEBRASPE/INSS/2015) Julgue o item a seguir, relativos a raciocínio lógico e operações com conjuntos.

Se A, B e C forem conjuntos quaisquer tais que $A, B \subset C$, então $(C \setminus A) \cap (A \cup B) = C \cap B$.

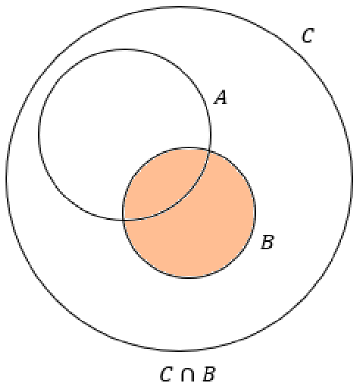
Comentários:

Na minha opinião, a melhor forma de resolver esse tipo de exercício é por meio de desenhos. No entanto, antes de trazer qualquer imagem, gostaria de lembrar que **$C \backslash A$ é a mesma coisa que $C - A$**. Logo, **são os elementos de C que não são elementos de A**.



Olhem a figura acima. Veja que **A e B estão dentro de C pois o enunciado informa que $A, B \subset C$**. Como o enunciado não fala se A e B são disjuntos, podemos considerar que eles possuem uma intersecção entre si, conforme a imagem. **A região pintada corresponde exatamente ao resultado da operação**.

Por exemplo, **$C \backslash A$ está representada por toda região de azul**. $A \cup B$ por toda a região marrom. Por fim, quando tiramos a intersecção desses dois conjuntos, ficamos com a área verde. Esse é o lado esquerdo da equação do enunciado. Para que a equação seja verdadeira, **o lado direito deve representar exatamente a mesma região**. No entanto, note que:



Veja que **as regiões são diferentes** e, portanto, **a equação não bate**. Logo, o item está incorreto.

Obs.: Para a equação ser verdadeira **A e B devem ser disjuntos**. Como exercício, mostre esse fato! Basta observar as áreas, considerando que A e B não possuem intersecção.

Gabarito: ERRADO.

(SUFRAMA/2014) Texto para as próximas questões

Para o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, se A for um subconjunto de Ω, indique por $S(A)$ a soma dos elementos de A e considere e $S(\emptyset) = 0$. Nesse sentido, julgue o item a seguir.

13. (CEBRASPE/SUFRAMA/2014) Se A e B forem subconjuntos de Ω, tais que $A \subset B$, então $0 \leq S(A) \leq S(B) \leq 55$.

Comentários:

$S(A)$ representa **a soma dos elementos de A**. Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, então:

$$S(\Omega) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

Você concorda que qualquer subconjunto de Ω vai apresentar uma soma menor ou igual a 55? Por exemplo, considere que $B = \{1,3,5,7,9\}$. Note que B é um subconjunto de Ω. Assim,

$$S(B) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Não tem como escolher um subconjunto de Ω e a soma dos elementos dele **fornecer um resultado maior** que a soma dos elementos de Ω. Concorda? Da mesma forma, se pegarmos um subconjunto de B, digamos A, **a soma dos elementos de A vai ser menor ou igual a soma dos elementos de B**. Por exemplo, se $A = \{1, 3\}$, então:

$$S(A) = 1 + 3 = 4$$

Veja que é bem menor que 25. Com esse raciocínio, é possível ver que o enunciado trouxe um desigualdade verdadeira. Note que **se houvessem números negativos em Ω**, não poderíamos ter feito as conclusões que fizemos aqui. Logo, item correto.

Gabarito: CERTO.

14. (CEBRASPE/SUFRAMA/2014) Se $A \subset \Omega$, e se $\Omega \backslash A$ é o complementar de A em Ω, então $S(\Omega \backslash A) = S(\Omega) - S(A)$.

Comentários:

Gostaria de chamar atenção ao fato de que **A é um subconjunto de Ω**. Se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, então o conjunto A poderá ser $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Assim, **o complementar de A em Ω será os elementos de Ω que não estão em A**, isto é:

$$\Omega \backslash A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Se **S(A) é a soma dos elementos de A**, ficamos com

$$S(\Omega) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$S(A) = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

$$S(\Omega \backslash A) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Logo, veja que:

$$S(\Omega \backslash A) = S(\Omega) - S(A)$$

Conforme o item trouxe.

Gabarito: CERTO.

15. (CEBRASPE/SUFRAMA/2014) É possível encontrar conjuntos A e B, subconjuntos de Ω, disjuntos, tais que $A \cup B = \Omega$ e $S(A) = S(B)$.

Comentários:

Nada disso, pessoal. O primeiro passo é perceber que a **$S(\Omega) = 55$ é um número ímpar**. Dessa forma, como queremos quebrar Ω em dois subconjuntos A e B, tais que **$A \cup B = \Omega$ e $S(A) = S(B)$**. Então, teríamos que ter:

$$S(A) + S(B) = S(\Omega) = 55$$
$$S(A) + S(A) = 55$$
$$2 \cdot S(A) = 55 \quad \rightarrow \quad S(A) = 27{,}5$$

Veja que a soma dos elementos de A, **teria que dar um número "quebrado"**. O problema é que A é um subconjunto de Ω e **Ω é formado só por números naturais**!! Não tem como somar números naturais e obter um número quebrado, concorda? Logo, **não é possível**.

Gabarito: ERRADO.

QUESTÕES COMENTADAS - CEBRASPE

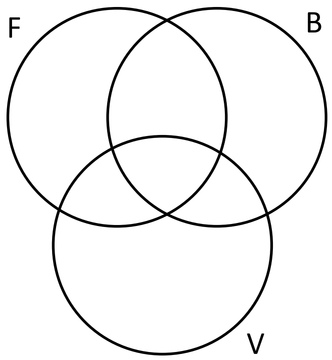
Princípio da Inclusão-Exclusão

Texto para as questões 01 e 02
Em uma plataforma de petróleo, por vez, 166 pessoas ficam embarcadas para a manutenção da operação. Enquanto ficam embarcados, os empregados têm acesso a espaços para esporte e lazer, como academia, quadras de esporte e sala de jogos. Nas quadras de esporte, é possível praticar futsal, basquete e vôlei e do total de trabalhadores da plataforma, 58 praticam futsal; 26 praticam futsal e basquete; quem pratica vôlei não pratica nenhum outro esporte; 84 praticam apenas um esporte; e 48 não jogam basquete. Considerando os dados apresentados na situação hipotética precedente, julgue os próximos itens.

1. (CEBRASPE/PETROBRAS/2024) Dezesseis pessoas praticam vôlei.

Comentários:
Inicialmente, vamos preparar o **diagrama de Venn** para colocarmos as informações do enunciado. Considere que:

- "F" representa o conjunto daqueles que praticam **futsal**;
- "B" representa o conjunto daqueles que praticam **basquete**;
- "V" representa o conjunto daqueles que praticam **vôlei**;

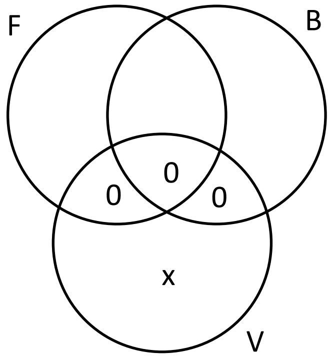


Talvez, a informação mais importante da questão é**: quem pratica vôlei não pratica nenhum outro esporte**.

Dessa forma, podemos concluir que:

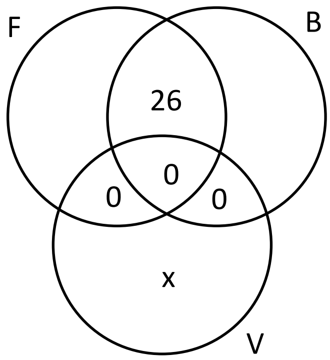
$$\boldsymbol{n(F \cap V) = n(B \cap V) = n(F \cap B \cap V) = 0}$$

Vamos colocar essas informações no diagrama.

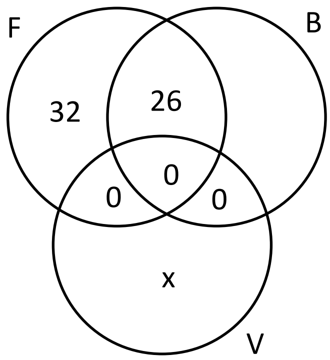


Observe que **"x" é a quantidade de pessoas que praticam vôlei**.

A próxima informação que devemos utilizar é que **26 praticam futsal e basquete**:



Se 58 praticam futsal e desses, 26 praticam também basquete, concluímos que **32 praticam apenas futsal**.



Ademais, de acordo com o enunciado, **48 não jogam basquete**. Logo, podemos escrever que:

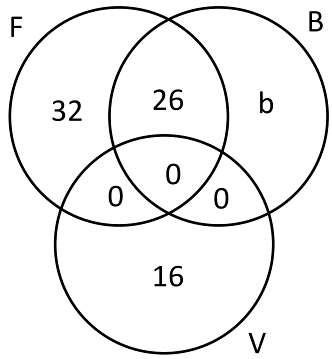
$$32 + x = 48 \qquad \rightarrow \qquad x = 16$$

Opa!! Encontramos que **16 praticam vôlei**. Sendo assim, o item está correto.

Gabarito: CERTO.

2. (CEBRASPE/PETROBRAS/2024) Um total de 56 pessoas não pratica nenhum esporte na plataforma.

Comentários:
Para responder esse item, vamos continuar de onde paramos no item anterior.

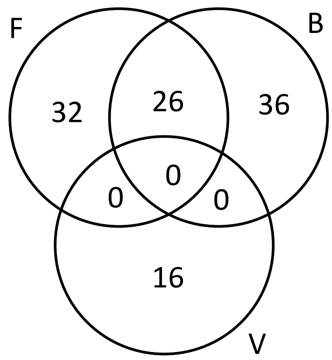


Chamamos de "b" aqueles que praticam **apenas basquete**.

De acordo com o enunciado, **84 praticam apenas um esporte**. Logo, podemos escrever:

$$32 + b + 16 = 84 \quad \rightarrow \quad b = 84 - 48 \quad \rightarrow \quad b = 36$$

Agora, podemos completar nosso diagrama.



Com o diagrama completo, é possível encontrar o total de pessoas que praticam pelo menos um dos esportes. Para isso, basta **somarmos os valores de cada uma das regiões**.

$$32 + 26 + 36 + 16 = 110$$

Pronto!! **110 pessoas praticam pelo menos um esporte**.

Como temos um total de **166 pessoas na plataforma**, então:

$$166 - 110 = 56$$

56 pessoas não praticam nenhum esporte.

Gabarito: CERTO.

3. (CEBRASPE/TRT-8/2023) Ao classificar 80 processos a fim de distribuí-los às áreas competentes para tratamento, um técnico judiciário verificou que, devido aos diversos critérios de classificação, 45 dos processos poderiam ser distribuídos ao setor A, 55 ao setor B e 15 a nenhum desses dois setores. Na situação hipotética precedente, a quantidade de processos que poderiam ser distribuídos a qualquer um dos setores A ou B é igual a

A) 10.
B) 30.
C) 35.
D) 40.
E) 65.

Comentários:

Vamos nomear os conjuntos!

"A" é o conjunto dos processos que podem ser distribuídos ao setor A;
"B" é o conjunto dos processos que podem ser distribuídos ao setor B;

Com isso:

"A∪B" é o conjunto de **todos** os processos que podem ser distribuídos a um dos setores A ou B;
"A∩B" é o conjunto dos processos que **se inserem nos dois critérios de classificação**! Na prática, tanto faz distribuí-los a A ou a B. É o número de processos aqui que a questão quer!

É verdade que essa questão **contém uma pegadinha**, moçada! Esse "ou" que a questão usou nos remete ao conjunto união. No entanto, devemos nos atentar ao **significado** do que foi pedido.

Dito isso, vamos analisar os números repassados. Como temos 80 processos e **15 deles não são distribuídos** a nenhum dos setores, podemos escrever que:

$$n(A \cup B) = 80 - 15 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{n(A \cup B) = 65}$$

Temos ainda que 45 podem ser distribuídos ao setor A:

$$n(A) = 45$$

E 55 ao setor B:

$$n(B) = 55$$

Com todas essas informações, podemos usar o **Princípio da Inclusão-Exclusão**:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$65 = 45 + 55 - n(A \cap B)$$

$$65 = 100 - n(A \cap B)$$

$$\boxed{n(A \cap B) = 35}$$

Gabarito: LETRA C.

4. (CEBRASPE/CBM-TO/2023) Em certa unidade do corpo de bombeiros, 60 militares praticam, como esporte, futebol e(ou) voleibol. O conjunto A compreende os militares que praticam futebol e o conjunto B, os que praticam voleibol. Nessa situação hipotética, se A – B contém 18 integrantes e B – A contém 25 integrantes, então o número de militares que praticam futebol e voleibol é igual a

A) 17.
B) 35.
C) 43.
D) 42.

Comentários:

Inicialmente, observe que temos 60 militares. Com isso, já podemos escrever:

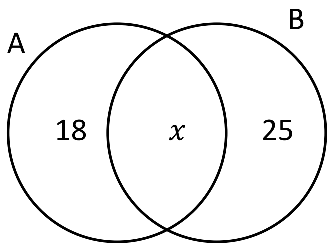
$$n(A \cup B) = 60$$

Agora, lembre-se que o conjunto diferença $A - B$ indica o conjunto formado pelos elementos de A que não são elementos de B. O enunciado nos forneceu o seguinte:

$$n(A - B) = 18$$

$$n(B - A) = 25$$

Com essas informações, vamos esquematizar os diagramas.



Sabemos que a soma dessas três regiões deve resultar no total de militares envolvidos.

$$18 + x + 25 = 60$$

$$43 + x = 60$$

$$\boxed{x = 17}$$

"x" é exatamente a quantidade de militares que praticam as duas modalidades de esportes. Logo, podemos marcar a alternativa A.

Gabarito: LETRA A.

5. (CEBRASPE/TJ-ES/2023) O item a seguir apresenta uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada com base em análise combinatória, probabilidade, operações com conjuntos e problemas geométricos.

Considere que 44 servidores falem uma ou mais línguas estrangeiras e que, entre eles, 12 servidores falem apenas inglês; 10 falem apenas espanhol; 11 falem apenas francês; 1 fale inglês e francês; 2 falem espanhol e francês; e 17 falem francês. Nessa situação, 7 servidores falam inglês e espanhol, mas não falam francês.

Comentários:

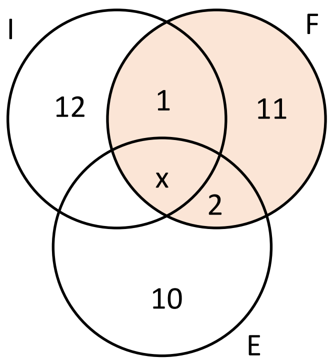
Vamos nomear os conjuntos.

- "I" é o conjunto formado por todos aqueles que falam inglês;
- "F" é o conjunto formado por todos aqueles que falam francês;
- "E" é o conjunto formado por todos aqueles que falam espanhol;

Como **44 servidores falam uma ou mais línguas**, podemos escrever:

$$n(I \cup F \cup E) = 44$$

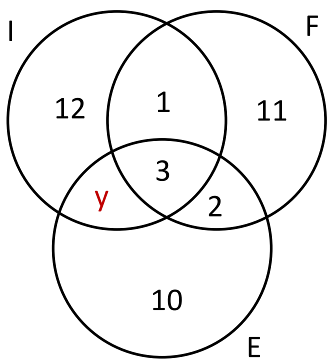
Seja **"x" o número de servidores que falam os 3 idiomas**. Agora, colocamos as informações do enunciado no diagrama para avaliarmos melhor o problema.



Observe que destaquei o conjunto "F" pois o enunciado fala que temos **17 servidores que falam francês**. Sendo assim, podemos **pegar todas as regiões e somá-las**. O resultado dessa soma deverá ser 17.

$$11 + 1 + x + 2 = 17 \quad \rightarrow \quad 14 + x = 17 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

Pronto! Sabemos quantos servidores falam os três idiomas. No diagrama, ficamos com:



Dessa vez, note que destaquei mais uma informação que não sabemos. **Trata-se da quantidade de pessoas que falam apenas inglês e espanhol**. Para encontrarmos "y", devemos usar a informação que **44 servidores falam pelo menos um idioma**. Sendo assim, **a soma** de todas as regiões do diagrama deve totalizar esses 44 servidores.

$$12 + 1 + 3 + 11 + 2 + 10 + y = 44$$

$$39 + y = 44$$

$$\boxed{y = 5}$$

Opa! **5 pessoas falam apenas inglês e espanhol**. Como o item afirmou que são 7, está errado.

Gabarito: ERRADO.

6. (CEBRASPE/TJ-CE/2023) Considere-se que um grupo de 50 servidores de um tribunal tenha sido selecionado para realizar cursos de aperfeiçoamento e que cada pessoa desse grupo faça pelo menos um dos seguintes dois cursos: gestão de projetos e ciência de dados. Nessa situação hipotética, se 29 pessoas fizerem ambos os cursos e 37 pessoas fizerem pelo menos o curso de gestão de projetos, o número exato de pessoas que farão apenas o curso de ciência de dados é igual a

A) 8.
B) 13.
C) 42.
D) 21.
E) 33.

Comentários:

Seja "G" o conjunto de pessoas que farão o curso de gestão de projetos e "C", o de ciência de dados.

Como temos 50 servidores envolvidos nesse curso, podemos escrever:

$$n(G \cup C) = 50$$

Como 29 farão os dois cursos:

$$n(G \cap C) = 29$$

Como 37 farão o curso de gestão de projetos:

$$n(G) = 37$$

Quando usamos o **Princípio da Inclusão-Exclusão**, obtemos:

$$n(G \cup C) = n(G) + n(C) - n(G \cap C)$$

$$50 = 37 + n(C) - 29$$

$$50 = 8 + n(C)$$

$$n(C) = 42$$

Ora, **42 servidores farão o curso de ciência de dados**!

Cuidado! O enunciado pede a quantidade de servidores que farão **APENAS** o curso de ciência de dados. Para tanto, precisamos subtrair o número de pessoas que farão os dois.

$$n(C - G) = n(C) - n(G \cap C)$$

$$n(C - G) = 42 - 29$$

$$\boxed{n(C - G) = 13}$$

Gabarito: LETRA B.

7. (CEBRASPE/PM-SC/2023) Uma pesquisa com participantes de uma festa tradicional de Santa Catarina revelou que 320 tinham experimentado a cerveja artesanal X, 200 não experimentaram a cerveja artesanal Y, e 220 tinham experimentado as cervejas artesanais X e Y. Com base na situação hipotética apresentada, o número de participantes dessa pesquisa que não experimentaram nenhuma dessas duas cervejas artesanais

A) é inferior ou igual a 50.

B) é superior a 50 e inferior ou igual a 70.

C) é superior a 70 e inferior ou igual a 90.

D) é superior a 90 e inferior ou igual a 110.

E) é superior a 110.

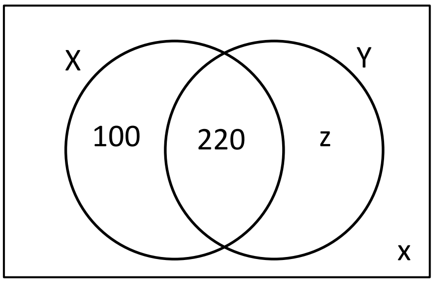
Comentários:

Seja "x" o número de participantes que não experimentaram nenhuma dessas duas cervejas.

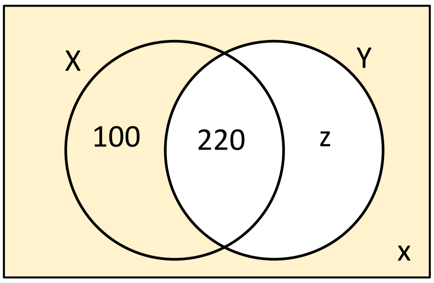
Inicialmente, observe duas informações importantes:

- 320 experimentaram a cerveja X;
- 220 experimentaram as cervejas X e Y.

Logo, podemos concluir que **100 experimentaram apenas a cerveja X**. É exatamente a diferença entre as duas quantidades! Dito isso, podemos desenhar o diagrama com essas informações.



Agora, vamos iniciar nossa busca por "x". Uma informação crucial nessa busca é que **200 pessoas não experimentaram a cerveja Y**. No diagrama, essas pessoas são representadas pelas regiões em destaque:



Ou seja:

$$100 + x = 200$$

▪

$$\boxed{x = 100}$$

Opa!! Nosso "x" é igual a 100. Logo, podemos concluir que **100 pessoas não experimentaram nenhuma das cervejas**. Essa é uma quantidade **superior a 90 e inferior a 110**, conforme aponta a alternativa D.

Gabarito: LETRA D.

8. (CEBRASPE/FUNPRESP-EXE/2022) A seguir, são apresentadas informações obtidas a partir de uma pesquisa realizada com 1.000 pessoas.

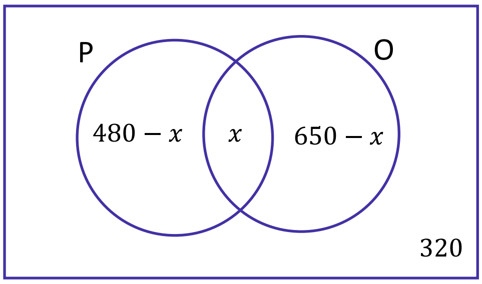
- 480 possuem plano de previdência privada;
- 650 possuem aplicações em outros tipos de produtos financeiros;
- 320 não possuem aplicação em nenhum produto financeiro.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item seguinte.

Há mais pessoas que não possuem aplicações em nenhum produto financeiro que pessoas que possuem simultaneamente plano de previdência privada e aplicações em outros produtos financeiros.

Comentários:

Vamos desenhar os diagramas, moçada!



Para a compreensão do diagrama, considere "P" o conjunto formado por aquelas pessoas que possuem plano de **previdência privado**. Por sua vez, "O" é o conjunto formado por aquelas pessoas que possuem aplicação em **outros** tipos de produtos financeiros. Além disso, observe que:

1) "x" representa a quantidade de pessoas que possuem **tanto a previdência privada quanto outros tipos de produto financeiro**.

2) Se **480** é o total de elementos do conjunto "P", então podemos concluir que "$480 - x$" é o número de pessoas que possuem **apenas a previdência privada**.

3) Da mesma forma, se 650 é o total de elementos do conjunto "O", então podemos concluir que "$650 - x$" é o número de pessoas que possuem **apenas outros tipos de produtos financeiros**.

4) Por fim, temos 320 "fora" dos dois conjuntos, indicando quantas pessoas **não possuem nenhuma das aplicações financeiras**.

A pesquisa foi realizada com **1.000 pessoas**. Sendo assim, quando somamos cada uma das regiões do diagrama que desenhamos, devemos obter **exatamente** esse número. Logo,

$$(480 - x) + x + (650 - x) + 320 = 1000$$

$$1450 - x = 1000$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 450}}$$

Pronto, 450 é o número de pessoas que aplicam **tanto na previdência privada quanto em outros produtos financeiros**. O item diz que a quantidade de pessoas que **não** possuem aplicações em **nenhum** produto (320) **é maior** que a quantidade de pessoas que possuem **simultaneamente** os dois produtos (450). Com isso, podemos concluir que **tal afirmação está equivocada**, uma vez que se tem 450 pessoas que possuem os dois produtos, enquanto apenas 320 **não usam nenhum dos dois**.

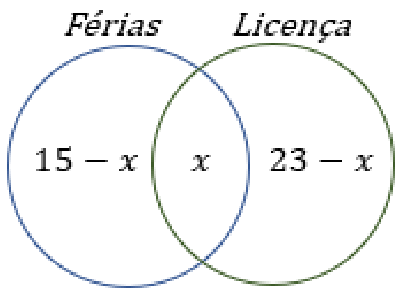
Gabarito: ERRADO.

9. (CEBRASPE/ME/2020) O setor de gestão de pessoas de determinada empresa realiza regularmente a análise de pedidos de férias e de licenças dos seus funcionários. Os pedidos são feitos em processos, em que o funcionário solicita apenas férias, apenas licença ou ambos (férias e licença). Em determinado dia, 30 processos foram analisados, nos quais constavam 15 pedidos de férias e 23 pedidos de licenças. Com base nessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

A quantidade de processos analisados nesse dia que eram referentes apenas a pedido de férias é igual a 8.

Comentários:

É uma questão típica de Diagrama de Venn. Nesses casos, a primeira informação que devemos procurar é **a quantidade de elementos na intersecção dos conjuntos**, nesse caso, quantas pessoas pediram **férias e licença, simultaneamente**. Como a questão não informou esse valor, suponha que seja x.



$15 - x$ representa a quantidade de pessoas que pediram **APENAS férias**. $23 - x$ representa a quantidade de pessoas que pediram **APENAS licença**. A questão informou que **o total de processos analisados foram $\mathbf{30}$**. Logo, a soma dos valores discriminados acima deve ser 30.

$$(15 - x) + x + (23 - x) = 30 \quad \rightarrow \quad 38 - x = 30 \quad \rightarrow \quad x = 8$$

Note que **8 é o número de pessoas que tiraram férias e pediram licença**. Para descobrir o número de processos analisados referentes **<u>apenas a pedido de férias</u>**, devemos pegar **o total de pedidos de férias e subtrair o valor de processos que pediram férias e licença**, simultaneamente.

$$SÓ\ FERIAS = 15 - x = 15 - 8 = 7$$

7 pessoas fizeram APENAS o pedido de férias.

Gabarito: ERRADO.

10. (CEBRASPE/PREF. B dos COQUEIROS/2020) Em uma pesquisa feita com um grupo de 100 turistas que visitavam Aracaju, verificou-se que todos eles tinham visitado pelo menos duas das seguintes praias: Atalaia, Aruana e da Costa. A tabela a seguir mostra quantos desses turistas visitaram as referidas praias.

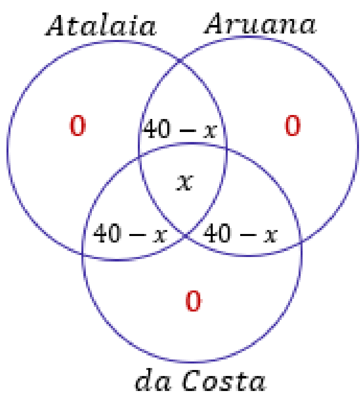
Praias Visitadas	Número de Turistas
Atalaia e Aruana	**40**
Atalaia e da Costa	**40**
Aruana e da Costa	**40**

Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

I. Menos de 40 turistas visitaram a praia de Atalaia.
II. Nenhum dos turistas participantes da pesquisa visitou apenas uma das praias citadas.
III. Nenhum dos turistas participantes da pesquisa visitou todas as três praias citadas.

Assinale a opção correta.
A) Apenas o item II está certo.
B) Apenas o item III está certo.
C) Apenas os itens I e II estão certos.
D) Apenas os itens I e III estão certos.
E) Todos os itens estão certos.

Comentários:
Não esqueça que, nesse tipo de questão, **a primeira coisa** que você deve se perguntar é: *qual a quantidade de elementos na* ***intersecção dos três conjuntos em questão****?* Se **não** for fornecido esse valor, você deve chamá-lo de x. Observe como fica o diagrama para essa questão.



Observe que também preenchemos $40 - x$ nas intersecções dois a dois. Quando o enunciado diz que 40 pessoas visitaram a praia A e a praia B, ele **não está dizendo que 40 visitaram apenas a praia A e a praia B. Dentro dessas 40 pessoas pode ter tido 10 que também foram para a praia C**.

Se estamos nos perguntando a quantidade de pessoas que visitaram **APENAS as praias A e B**, devemos **subtrai**r a quantidade de pessoas que **além das praias A e B, também visitou a C**. Ficou claro, pessoal?!

Uma informação muito importante dada no enunciado é que: **todos os turistas tinham visitado pelo menos duas das praias**. Com isso, foi possível colocar o 0, indicando que **não houve quem visitou uma única praia**. Com o nosso diagrama montado e sabendo que **100 turistas visitaram as praias**, sabemos que ao somar os elementos discriminados acima, devemos obter exatamente o valor total de turistas.

$$(40-x)+(40-x)+(40-x)+x=100$$

$$120-2x=100 \quad \rightarrow \quad 2x=20 \quad \rightarrow \quad x=10$$

Esse valor encontrado indica que **10 pessoas visitaram as três praias**! Com isso, **30 pessoas visitaram APENAS Atalaia e Aruana**, **30 pessoas visitaram APENAS Aruana e da Costa** e **30 pessoas visitaram APENAS Atalaia e da Costa**. Podemos agora analisar os itens.

I. Menos de 40 turistas visitaram a praia de Atalaia.
ERRADO. Vimos que 30 pessoas visitaram Atalaia e Aruana, outras 30 visitaram Atalaia e da Costa e 10 pessoas visitaram as 3 praias. Com isso, $30+30+10=$ **70 pessoas visitaram a praia de Atalaia**.

II. Nenhum dos turistas participantes da pesquisa visitou apenas uma das praias citadas.
CORRETO. Essa informação está no próprio enunciado, quando ele diz que **os turistas visitaram pelo menos duas das praias.**

III. Nenhum dos turistas participantes da pesquisa visitou todas as três praias citadas.
ERRADO. De acordo com o que desenvolvemos, **10 pessoas visitaram as três praias**.

Gabarito: LETRA A.

11. (CEBRASPE/TJ-PR/2019) Em determinado tribunal, os conselheiros atuam nos conselhos I, II e III, podendo atuar em apenas um, em dois ou em todos os conselhos, como mostra a tabela seguinte.

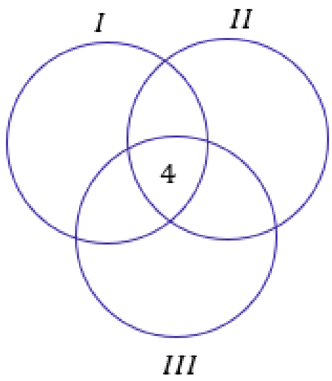
Quantidade de Conselheiros	Conselho de Atuação
35	I
25	II
24	III
10	I e II
12	I e III
8	II e III
4	I, II e III

Nesse caso, a quantidade de conselheiros que atuam em, no máximo, um dos conselhos é igual a
A) 26.

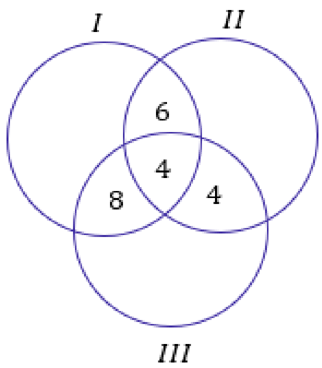
B) 36.
C) 50.
D) 58.
E) 84.

Comentários:

Temos **três conselhos de atuação**, sendo que os conselheiros podem atuar em **apenas um, em dois ou em todos os conselhos**. É uma questão clássica de diagrama de Venn e PIE. Nesse tipo de questão, devemos sempre começar com a quantidade de elementos na intersecção dos três conjuntos. De acordo com a tabela, temos **4 conselheiros que atuam nos três conselhos**.

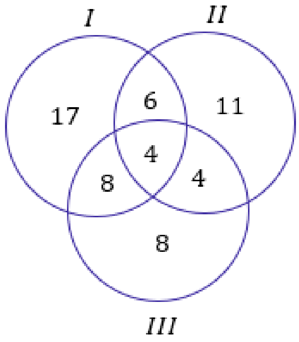


Uma vez com a quantidade de elementos da intersecção dos três conjuntos, **partimos para a análise dos elementos das intersecções de dois conjuntos**. Por exemplo, da tabela é possível ver que 10 conselheiros atuam nos conselhos I e II. Como já contamos 4 deles na intersecção, temos que $10 - 4 = 6$ conselheiros atuam **APENAS nos conselhos I e II**. Podemos usar esse raciocínio para as demais intersecções.



Agora que achamos as quantidades das intersecções, devemos partir para a análise das quantidades de conselheiros que atuam **APENAS um único conselho**. A tabela diz que 35 conselheiros atuam no conselho I, nosso diagrama mostra que $6 + 4 + 8 = 18$ estão conselheiros estão atuando no conselho I **mas também em outros conselhos**.

Portanto, devemos fazer $35 - 18 = 17$ para obter a quantidade de conselheiros que estão atuando apenas no conselho I. Analogamente, se o conselho II possui 25 conselheiros e contabilizamos $6 + 4 + 4 = 14$, então sobra que **11 conselheiros que atuam somente no conselho II**. Por fim, dos 24 conselheiros de III, já temos contabilizados $8 + 4 + 4 = 16$ no diagrama. Logo, **8 atuam apenas em III**.



Com o nosso diagrama completo, podemos analisar o que a questão pede. O examinador quer **o número de conselheiros que atuam em apenas um dos conselhos**.

$$N = 17 + 11 + 8 \quad \rightarrow \quad N = 36$$

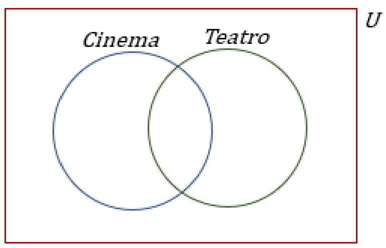
Gabarito: LETRA B.

12. (CEBRASPE/IFF/2018) Em uma consulta a 600 estudantes de uma escola acerca da preferência deles entre teatro ou cinema, apenas 50 deles não gostam de cinema nem de teatro. Entre os demais, 370 gostam de teatro e 420 gostam de cinema. Nesse caso, a quantidade desses estudantes que gostam de teatro e cinema é igual a

A) 50.
B) 130.
C) 180.
D) 240.
E) 370.

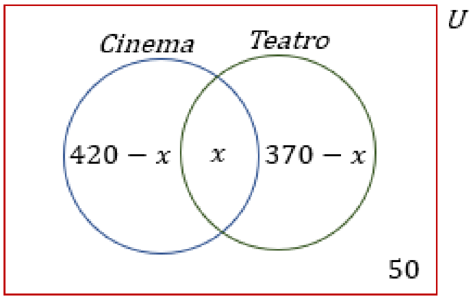
Comentários:

O **conjunto universo é representado pelos 600 estudantes dessa escola.** O diagrama que é interessante desenhar para a resolução do exercício é o seguinte:



Devemos inserir no desenho acima as informações que foram passadas pelo enunciado. O primeiro ponto a ser levado em consideração é **a quantidade de elementos na intersecção dos conjuntos**. No nosso caso, é exatamente **a quantidade de estudantes que gostam tanto de teatro e de cinema**.

No entanto, esse valor é exatamente o que é pedido no enunciado e **ainda não sabemos quanto vale**. Vamos chamá-lo de x. Como 370 alunos gostam de teatro, então $370 - x$ **gostam APENAS de teatro**. Além disso, se 420 gostam de cinema, $420 - x$ **gostam APENAS de cinema**. Note **que 50 não gosta de nenhum dos dois**.



Veja que foi possível completarmos nosso diagrama com as informações analisadas. Como nosso conjunto universo é formado por 600 estudantes, a soma das quantidades de cada uma das partes do diagrama deve totalizar esse mesmo número.

$$(420 - x) + x + (370 - x) + 50 = 600$$

$$840 - x = 600$$

$$x = 240$$

Gabarito: LETRA D.

13. (CEBRASPE/IFF/2018) Para um conjunto qualquer X, $n(X)$ representa a quantidade de elementos de X. Nesse sentido, considere que os conjuntos A, B e C tenham as seguintes propriedades:

$$\boldsymbol{n(A) = n(B) = n(C) = 50;}$$
$$\boldsymbol{n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = 10;}$$
$$\boldsymbol{n(A \cap B \cap C) = 0.}$$

Nessa situação, $n(A \cup B \cup C)$ é igual a:

A) 100.
B) 110.
C) 120.
D) 130.

D) 140.

Comentários:

Essa questão é uma **aplicação direta do Princípio da Inclusão-Exclusão**.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Aplicando os valores do enunciado, ficamos com:

$$n(A \cup B \cup C) = 50 + 50 + 50 - 10 - 10 - 10 + 0 \quad \rightarrow \quad n(A \cup B \cup C) = 120$$

Gabarito: LETRA C.

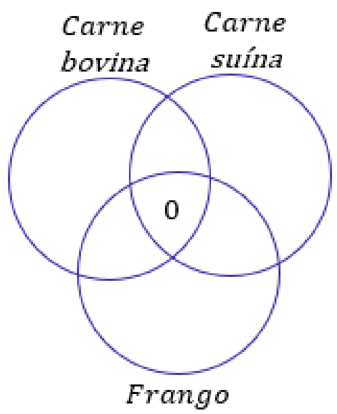
Texto para as próximas questões

Determinado porto recebeu um grande carregamento de frango congelado, carne suína congelada e carne bovina congelada, para exportação. Esses produtos foram distribuídos em 800 contêineres, da seguinte forma: nenhum contêiner foi carregado com os três produtos; 300 contêineres foram carregados com carne bovina; 450, com carne suína; 100, com frango e carne bovina; 150, com carne suína e carne bovina; 100, com frango e carne suína.

Comentários Iniciais:

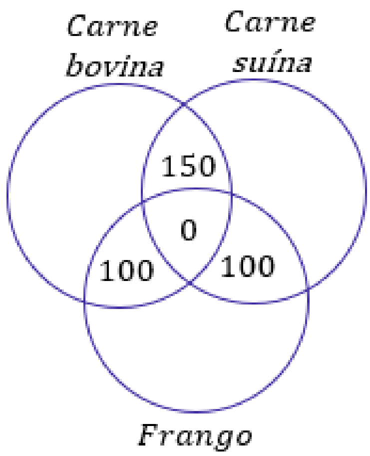
Antes de julgar as questões, vamos fazer alguns comentários iniciais. É preciso desenvolver o diagrama de Venn.

Observe que temos **800 contêineres** que vamos distribuir frango, carne suína e carne bovina. A primeira coisa que devemos procurar é **quantos contêineres abrigarão os 3 tipos de carne**, o enunciado fornece essa informação quando diz que **nenhum contêiner foi carregado com os três produtos**.



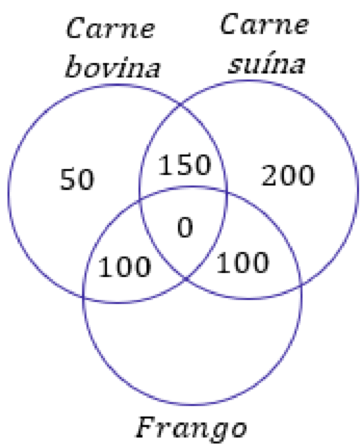
Agora, vamos olhar **as intersecções de dois conjuntos**. O enunciado disse **que 100 foram carregados com frango e carne bovina**, **150 com carne suína e carne bovina** e **100 com frango e carne suína**.

Como não houve nenhum contêiner com os três tipos de carnes, **não há nada para ser descontado** e podemos levar esses valores diretos para o diagrama.



Por fim, sabemos que **300 contêineres** foram carregados com carne bovina, mas nosso diagrama já está contabilizando $150 + 100 = 250$ contêineres de carne bovina. Assim, **os 50 contêineres que faltam para fechar os 300 estão APENAS com carne bovina**.

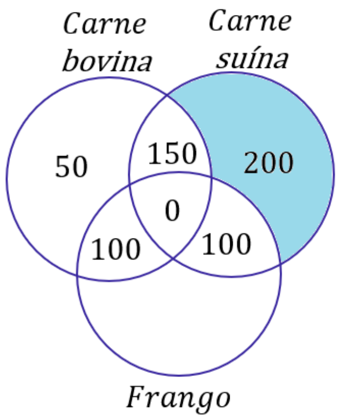
Ademais, é fornecido que **450 contêineres estão com carne suína**. Nosso diagrama também já está contabilizando $150 + 100 = 250$ contêineres com carne suína. Isso significa que temos **200 contêineres APENAS com carne suína**.



14. (CEBRASPE/EMAP/2018) Nessa situação hipotética, 250 contêineres foram carregados somente com carne suína.

Comentários:

O item trouxe **250 contêineres** carregados com **apenas carne suína**. No entanto, quando olhamos o diagrama desenvolvido nos comentários iniciais, vemos que **foram apenas 200.**

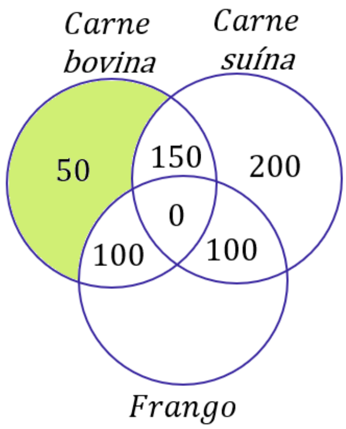


Gabarito: ERRADO.

15. (CEBRASPE/EMAP/2018) Nessa situação, 50 contêineres foram carregados somente com carne bovina.

Comentários:

Observando o diagrama que desenvolvemos nos comentários iniciais, veja que realmente **temos 50 contêineres carregados apenas com carne bovina**.

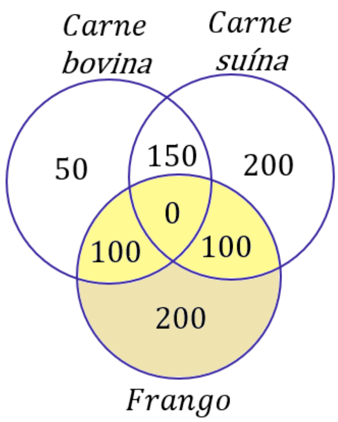


Gabarito: CERTO.

16. (CEBRASPE/EMAP/2018) Nessa situação hipotética, a carga de 400 contêineres continha frango congelado.

Comentários:

Veja que o nosso diagrama já contabilizou $50 + 150 + 100 + 100 + 200 =$ **600 contêineres**. O enunciado informou que são, ao total, **800 contêineres**. Logo, essa diferença (200) certamente é o número que está faltando: **a quantidade de contêineres com APENAS frango**.



Quando somamos os valores dos contêineres com frango, encontramos $100 + 100 + 200 = 400$. Logo, **o item encontra-se correto** ao afirmar que existem 400 contêineres com frango congelado.

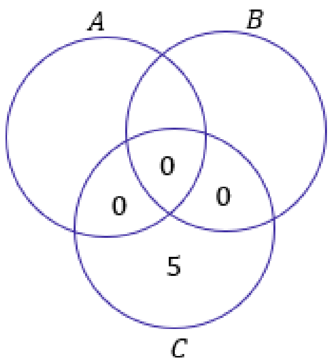
Gabarito: CERTO.

(PF/2018) Texto para as próximas questões
Em um aeroporto, 30 passageiros que desembarcaram de determinado voo e que estiveram nos países A, B ou C, nos quais ocorre uma epidemia infecciosa, foram selecionados para ser examinados. Constatou-se que exatamente 25 dos passageiros selecionados estiveram em A ou em B, nenhum desses 25 passageiros esteve em C e 6 desses 25 passageiros estiveram em A e em B. Com referência a essa situação hipotética, julgue os itens a seguir.

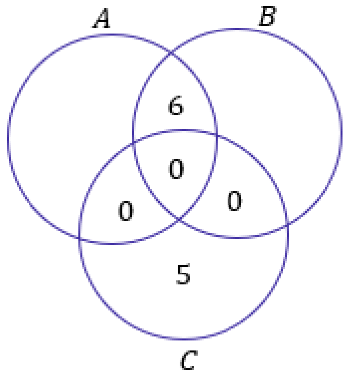
17. (CEBRASPE/PF/2018) Se 11 passageiros estiveram em B, então mais de 15 estiveram em A.

Comentários:
Nosso **conjunto universo é composto pelos 30 passageiros** que foram selecionados para fazer os exames. Para nos auxiliar no desenvolvimento da questão, é necessário desenhar o diagrama de Venn. Vamos primeiro utilizar as informações do enunciado para concluir algumas coisas importantes.

Note que **se 25 dos 30 passageiros estiveram em A ou em B, então 5 passageiros estiveram SOMENTE em C**. Além disso, como nenhum desses 25 passageiros que esteve em A ou em B esteve em C, então **o número de elementos na intersecção dos três conjuntos é nulo**, bem como qualquer intersecção com C.

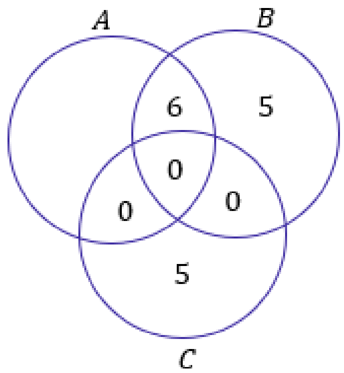


O enunciado ainda fala que **6 dos 25 passageiros estiveram em A e em B**.

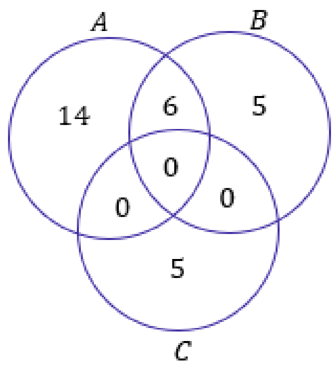


Pronto, nesse momento utilizamos todas as informações do enunciado que poderíamos usar para compor o diagrama. Agora, vamos analisar o item propriamente dito. O examinador diz que **se 11 passageiros estiveram em B, então mais de 15 estiveram em A.**

Note, do nosso último diagrama, que já marcamos 6 pessoas que visitaram B. Se o examinador diz que foi 11, então sobra **5 pessoas que visitaram APENAS o país B**.



Sabemos que 25 pessoas visitaram A ou B e que **já contabilizamos 11 delas** no diagrama. As **14 pessoas que estão faltando para completar essas 25 pessoas são aquelas que estiveram APENAS no país A**.



Por fim, podemos ver que $14 + 6 =$ **20 pessoas estiverem em A** e, portanto, o item está correto.

Gabarito: CERTO.

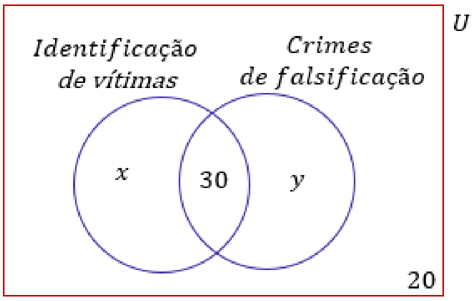
Texto para as próximas questões
O resultado de uma pesquisa acerca da satisfação de 200 papiloscopistas, no que diz respeito às tarefas por eles executadas de identificação de vítimas e de descobertas de crimes de falsificação, foi o seguinte:

I. 30 papiloscopistas sentem-se igualmente satisfeitos ao executar qualquer uma dessas tarefas;
II. 180 papiloscopistas sentem-se satisfeitos ao executar pelo menos uma dessas tarefas.

Considerando que todos os 200 papiloscopistas responderam à pesquisa, julgue o item seguinte.

18. (CEBRASPE/PF/2018) A quantidade de papiloscopistas que se sentem satisfeitos ao executar exatamente uma das referidas tarefas é superior a 100.

Comentários:
Vamos dividir o grupo de **200 papiloscopistas** (que será o conjunto universo) em dois outros conjuntos: **um daqueles que se sentem satisfeitos com a identificação de vítimas** e outro **daqueles que se sentem satisfeitos com a descoberta de crimes de falsificação**.



Note que **30 pessoas se sentem satisfeitas trabalhando em qualquer uma das tarefas**. Além disso, o enunciado mostra que **180 dos 200 papiloscopistas sentem-se satisfeitos ao executar pelo menos uma delas**. Com isso, sobra **20 papiloscopistas que não se sentem satisfeitos identificando vítimas ou descobrindo crimes de falsificação.** A quantidade de papiloscopistas que se sentem satisfeito apenas com uma tarefa é dada por $x + y$. Sabemos, no entanto, que $x + y + 30 = 180$. Logo,

$$x + y = 150$$

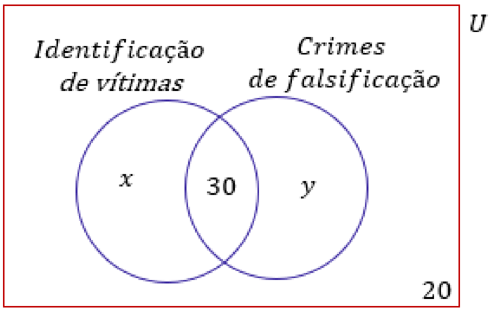
Como **essa quantidade é superior a 100**, o gabarito está correto.

Gabarito: CERTO.

19. (CEBRASPE/PF/2018) Nessa situação, as informações dadas permitem inferir que exatamente 75 papiloscopistas sentem-se satisfeitos ao executarem a tarefa de identificação de vítimas.

Comentários:

Vamos dividir o grupo de **200 papiloscopistas** (que será o conjunto universo) em dois outros conjuntos: **um daqueles que se sentem satisfeitos com a identificação de vítimas** e outro **daqueles que se sentem satisfeitos com a descoberta de crimes de falsificação**.



Note que **30 pessoas se sentem satisfeitas trabalhando em qualquer uma das tarefas**. Além disso, o enunciado mostra que **180 dos 200 papiloscopistas sentem-se satisfeitos ao executar pelo menos uma delas**.

Com isso, sobra **20 papiloscopistas que não se sentem satisfeitos identificando vítimas ou descobrindo crimes de falsificação.** **Não há mais informações** que possibilitem concluir exatamente o número de papiloscopistas que se sentem satisfeitos com a tarefa de identificação de vítimas.

Gabarito: ERRADO.

20. (CEBRASPE/SEFAZ-RS/2018) Em determinado dia, os órgãos responsáveis atenderam 50 contribuintes para resolver pendências relativas ao IPTU, ao IPVA e a outros tributos. Sabe-se que foram atendidos:

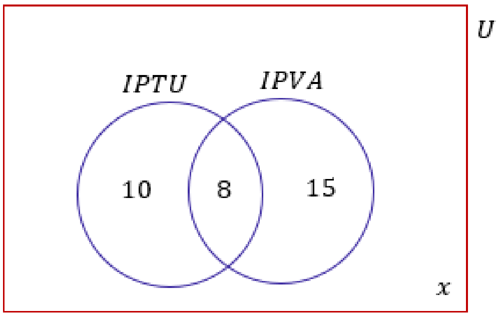
I. 18 contribuintes com pendências de IPTU;
II. 23 contribuintes com pendências de IPVA;
III. 8 contribuintes com pendências de IPTU e IPVA.

Nesse caso, a quantidade de contribuintes atendidos cujas pendências não se referiam a IPTU nem a IPVA foi igual a

A) 15.
B) 17.
C) 25.
D) 9.
E) 10.

Comentários:

O conjunto universo dessa questão é constituído dos **50 contribuintes**.



O primeiro fato que devemos levar em consideração é que **8 contribuintes tinham pendências de IPTU e IPVA**. Sendo assim, se **18 contribuintes tiveram pendência de IPTU, podemos descontar esses 8 para obter aquele que tiverem pendências APENAS com IPTU**. Analogamente, descontando **8 dos 23 que tiverem pendência de IPVA, obtemos aqueles que tiverem pendências APENAS com IPVA**.

Queremos, no entanto, descobrir **quanto desses 50 não tiveram problema com nenhum desses dois impostos**. Vamos chamar essa quantidade de x. Se somarmos todos os valores que estão presentes no digrama que desenhamos, **essa soma deve totalizar os 50 contribuintes do nosso conjunto universo**.

$$10 + 8 + 15 + x = 50$$

$$33 + x = 50$$

$$x = 17$$

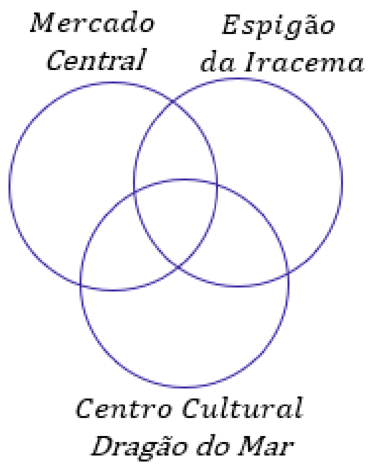
Gabarito: LETRA B.

Texto para as próximas questões

Um banco comercial realizou um evento de negócios na cidade de Fortaleza – CE. Após as reuniões, os participantes do evento visitaram pontos turísticos da cidade: 95 dos participantes visitaram o Mercado Central, 80 visitaram o Espigão de Iracema e 90 visitaram o Centro Cultural Dragão do Mar. Do total de participantes, 30 visitaram somente o Mercado Central, 50 visitaram o Espigão de Iracema e o Centro Cultural Dragão do Mar, 35 visitaram o Mercado Central e o Espigão de Iracema, e 20 visitaram esses três pontos turísticos. Considerando que todos os participantes tenham visitado, pelo menos, um desses três pontos turísticos, julgue os itens a seguir.

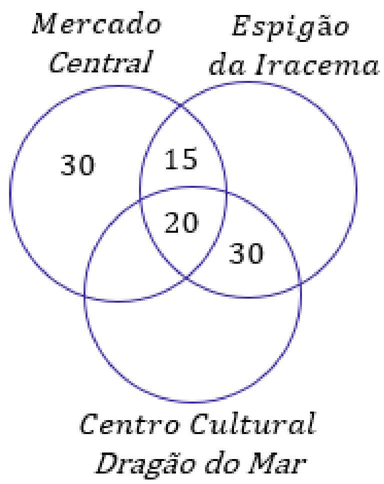
Comentários Iniciais:

Para **evitarmos repetir a solução** nos itens seguintes, vamos primeiro fazer uma resolução inicial, que **será aproveitada para julgar** todos os exercícios que envolvam o texto anterior. Tudo bem? Essa questão envolve um diagrama de Venn **com três conjuntos**: um representando aqueles que visitaram o Mercado Central, outro representando aqueles que visitaram o Espigão de Iracema e mais um representando aqueles que visitaram o Centro Cultural Dragão do Mar.

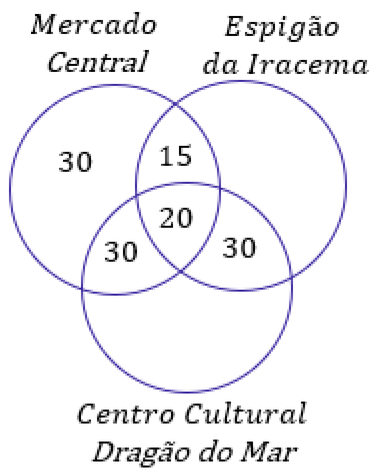


A primeira informação que devemos buscar no enunciado é **quantos visitaram os três pontos turísticos**. Ao procurar, encontramos que **foram 20 pessoas**. O enunciado diz ainda que **35 visitaram o Mercado Central e o Espigão de Iracema**. Como sabemos que 20 visitaram os três, concluímos que **15 visitaram APENAS esses dois pontos turísticos**.

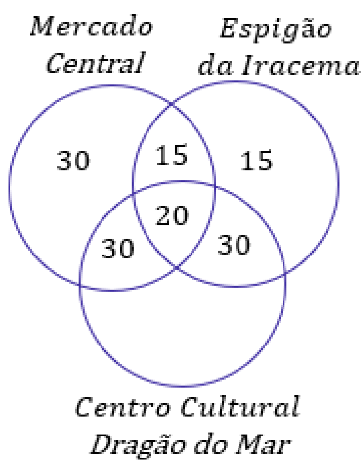
Analogamente, **50 visitaram o Espigão e o Dragão do Mar**, já contabilizamos 20 deles quando consideremos aqueles que visitaram os 3 pontos. Logo, **30 pessoas visitaram APENAS esses dois outros pontos**. Foi dito, ainda, que **30 visitaram apenas** o Mercado Central.



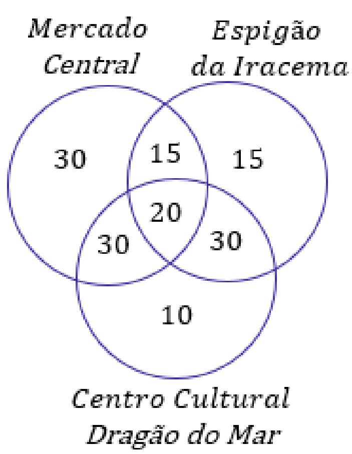
Observe que disseram que **95 visitaram o Mercado Central** e contabilizamos $30 + 15 + 20 = 65$. A diferença de 30 é o número de pessoas que visitaram **APENAS o Mercado Central e o Dragão do Mar**.



Sabemos ainda que **80 participantes visitaram o Espigão de Iracema**. No diagrama, temos contabilizados $15 + 20 + 30 = 65$. Então, **15 é quantidade de pessoas que visitaram APENAS o Espigão de Iracema**.



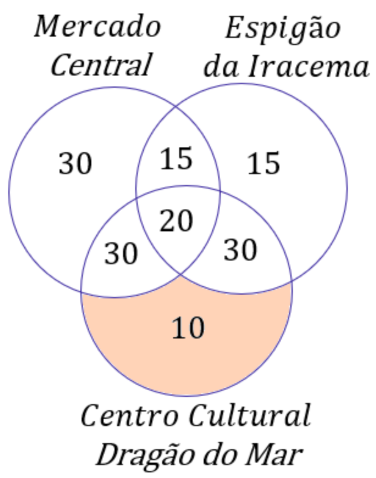
Por último, **90 visitaram o Centro Cultural Dragão do Mar**. No diagrama, temos contabilizados $30 + 20 + 30 = 80$. Logo, faltam **10 pessoas para totalizar os 90**. Esses 10 participantes restantes **são aqueles que visitaram APENAS o Dragão do Mar**.



21. (CEBRASPE/BNB/2018) Mais de 15 dos participantes do evento visitaram somente o Centro Cultural Dragão do Mar.

Comentários:

Com o diagrama que desenvolvemos nos comentários iniciais acima, vemos que a quantidade de pessoas que visitaram **apenas o Dragão do Mar é 10** e não 15.

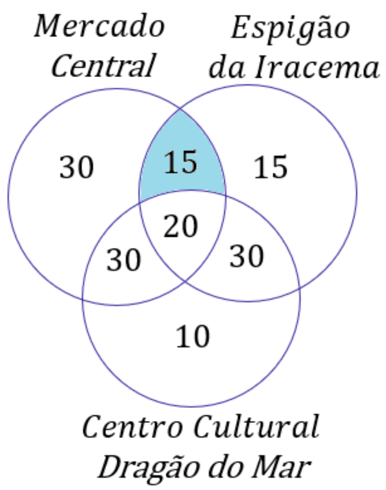


Gabarito: ERRADO.

22. (CEBRASPE/BNB/2018) Menos de 12 dos participantes do evento visitaram somente o Espigão de Iracema e o Mercado Central.

Comentários:

Com a análise do diagrama que chegamos nos comentários iniciais da questão, é possível ver que **15 pessoas visitaram somente o Mercado Central e o Espigão de Iracema**. Logo, item errado.

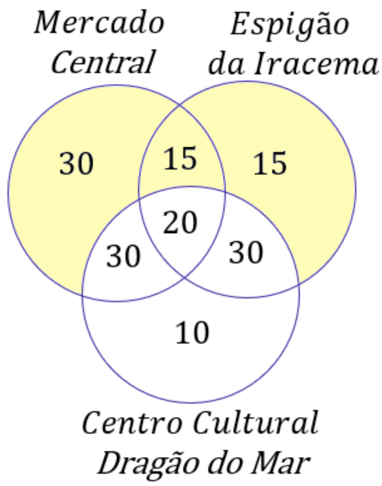


Gabarito: ERRADO.

23. (CEBRASPE/BNB/2018) Mais de 50 dos participantes do evento não visitaram o Centro Cultural Dragão do Mar.

Comentários:

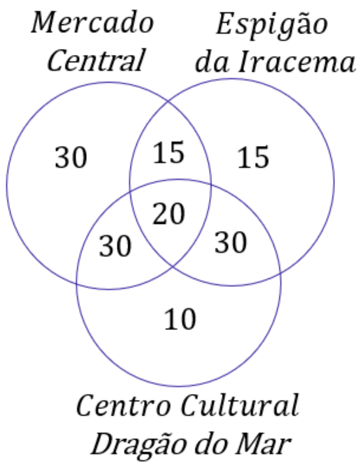
Com o diagrama completo, podemos olhar para **os números fora do conjunto do Centro Cultural Dragão do Mar**. O número de pessoas que não visitaram esse ponto turístico é dado por $30 + 15 + 15 = 60$. O item afirma que **mais de 50 pessoas não visitaram o Dragão do Mar**, portanto, está correto.



Gabarito: CERTO.

24. (CEBRASPE/BNB/2018) Menos de 180 pessoas participaram do evento.

Comentários:



Para obter o total de pessoas que compareceram ao evento, **basta somarmos as quantidades** discriminadas em nosso diagrama completamente preenchido.

$$TOTAL\ DE\ PESSOAS = 30 + 30 + 15 + 20 + 15 + 30 + 10 \quad \rightarrow \quad TOTAL\ DE\ PESSOAS = 150$$

O item afirma que **menos de 150 pessoas participaram do evento**, logo, encontra-se correto.

Gabarito: CERTO.

Texto para as próximas questões

Uma pesquisa revelou características da população de uma pequena comunidade composta apenas por casais e seus filhos. Todos os casais dessa comunidade são elementos do conjunto $A \cup B \cup C$ em que:

A = {casais com pelo menos um filho com mais de 20 anos de idade};

B = {casais com pelo menos um filho com menos de 10 anos de idade};

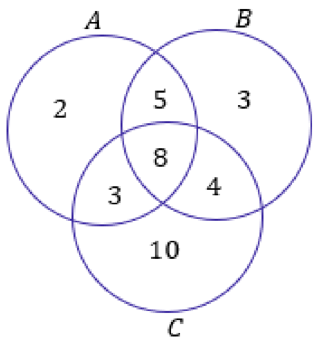
C = {casais com pelo menos 4 filhos}.

Considerando que $n(P)$ indique a quantidade de elementos de um conjunto P, suponha que:

$$n(A) = 18;\ n(B) = 20;\ n(C) = 25;$$

$$n(A \cap B) = 13; n(A \cap C) = 11; n(B \cap C) = 12 \ e \ n(A \cap B \cap C) = 8.$$

O diagrama a seguir mostra essas quantidades de elementos.



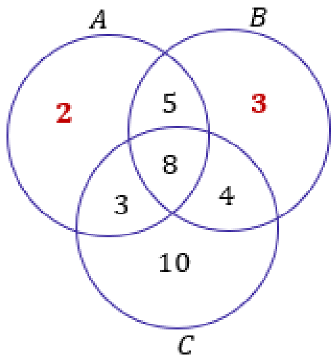
Com base nas informações e no diagrama precedentes, julgue os itens a seguir.

25. (CEBRASPE/EBSERH/2018) A referida comunidade é formada por menos de 180 pessoas.

Comentários:

Observe que o conjunto C representa casais com **pelo menos 4 filhos**. O enunciado diz que **o conjunto C tem 25 casais**, pois, $n(C) = 25$. Ora, **cada casal é formado por 2 pessoas** e se **cada um tem pelo menos 4 filhos**, então **cada família dessa contém, no mínimo, 6 pessoas**.

Logo, o conjunto C soma $6 \times 25 = $ **150 indivíduos.** Confira abaixo o diagrama obtido com os valores do enunciado. Lembrando sempre que devemos começar a preencher pela intersecção dos três conjuntos.



Fora do conjunto C, devemos olhar para a quantidade de casais que **somente fazem parte de A (são 2)** ou **somente fazem parte de B (são 3)**. Esses 5 casais **possuem pelo menos um filho**. Logo, podemos contar $3 \times 5 = \mathbf{15}$ **pessoas nesse grupo**.

Os outros **5 casais que estão tanto no conjunto A e no conjunto B**, possuem, **no mínimo**, **2 filhos**. A explicação é a seguinte: **como estão no grupo A, elas possuem pelo menos um filho com mais de 20 anos de idade**.

Mas, **como também estão no grupo B, eles possuem pelo menos um filho com menos de 10 anos de idade.** Logo, a quantidade mínima de filhos desses casais é dois. Sendo assim, com **cada casal representando uma família de 4 membros**, vamos ter $5 \times 4 = \mathbf{20}$ **pessoas** nesse grupo. Para obter o total de pessoas nessa população, devemos somar tudo que obtivemos.

$$POPULAÇÃO = 150 + 15 + 20 \quad \rightarrow \quad POPULAÇÃO = 185$$

O item afirma que a população **possui menos de 180 pessoas** e, portanto, está errado.

Gabarito: ERRADO.

QUESTÕES COMENTADAS - CEBRASPE

Problemas

1. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Acerca das operações com números reais e suas propriedades, julgue o item a seguir.

A soma de dois números irracionais positivos é sempre um número irracional.

Comentários:
Errado, moçada! O CESPE gosta bastante dessas questões com números irracionais. Nelas, é sempre bom procurarmos por contraexemplos para provar que o item está errado.

Considere os **dois números irracionais positivos** abaixo:

$$a = 10 + \sqrt{2} \qquad b = 10 - \sqrt{2}$$

Agora, vamos somá-los!

$$a + b = \left(10 + \sqrt{2}\right) + \left(10 - \sqrt{2}\right)$$

$$a + b = 10 + 10 \quad \rightarrow \quad a + b = 20$$

Observe que somamos dois números irracionais positivos e obtivemos um número natural! Logo, o que o enunciado afirma **não é sempre verdade**.

Gabarito: ERRADO.

2. (CESPE/SEDUC-AL/2021) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e, cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = ln\, x = log_e\, x$ tem inúmeras aplicações científicas. A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

O número de Euler é menor que o número racional 2,72.

Comentários:
Essa questão é bem direta! O próprio enunciado nos forneceu o número de Euler.

$$e \approx 2{,}718\ldots$$

Note que $2{,}71 < 2{,}72$. Com isso, o número de Euler realmente é menor do que 2,72.

Gabarito: CERTO.

3. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Acerca das operações com números reais e suas propriedades, julgue o item a seguir.

Se o cubo de um número inteiro é ímpar, então esse número deve ser, necessariamente, ímpar.

Comentários:
Pessoal, vamos chamar esse número ímpar de "n". Se **"n" é ímpar**, então podemos escrevê-lo na forma:

$$n = 2k + 1$$

Vamos elevar "n" ao cubo.

$$n^3 = (2k + 1)^3$$

Nesse ponto, podemos multiplicar (2k+1) três vezes, usando a **propriedade distributiva**.

No entanto, também podemos usar a seguinte **identidade**:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Fazendo isso, ficamos com:

$$n^3 = 8k^3 + 3 \cdot (2k)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2k) \cdot 1^2 + 1^3$$

$$n^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$$

Reescrevendo de uma forma mais conveniente:

$$n^3 = 2 \cdot (4k^3 + 5k^2 + 3k) + 1$$

Chamando $k' = 4k^3 + 5k^2 + 3k$, podemos reescrever:

$$\boxed{\boldsymbol{n^3 = 2k' + 1}}$$

Com esse resultado, podemos concluir que **n^3 é um número ímpar também**, necessariamente.

Gabarito: CERTO.

4. (CESPE/SEDUC-AL/2021) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e, cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = ln\, x = log_e\, x$ tem inúmeras aplicações científicas. A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

Se $r = 2{,}718718718...$ é uma dízima periódica, então a diferença $(r - e)$ é um número racional.

Comentários:

Ora, se "r" é uma dízima periódica, então temos que **"r" é um número racional**. Agora, guarde a seguinte informação:

A diferença (ou soma) entre dois números, sendo um deles racional e o outro irracional, **será um número irracional**. Por exemplo, se você subtrai π de 1, o resultado será $1 - \pi$, que é um número irracional.

Com isso, $(\boldsymbol{r - e})$ **é um número irracional.**

Gabarito: ERRADO.

5. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Considerando as propriedades e as operações fundamentais dos números inteiros, racionais, irracionais e reais, julgue o item a seguir:

O produto de dois números racionais é sempre um número racional. O mesmo é válido para números irracionais: o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

Comentários:
De maneira simplificada, podemos conceituar um número racional como **todo número que pode ser escrito na forma de fração**. De fato, como vimos na teoria, **a multiplicação de dois números racionais será um racional**, mas **o produto** de dois números irracionais **nem sempre será irracional**.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

Gabarito: ERRADO.

6. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Considerando as propriedades e as operações fundamentais dos números inteiros, racionais, irracionais e reais, julgue o item a seguir:

Todo conjunto não vazio de números inteiros positivos possui um menor elemento, isto é, se S é um conjunto de números inteiros positivos, não vazio, então existe $s \in S$ tal que $s \leq x$, para todo $x \in S$. Essa mesma propriedade é também válida para conjuntos não vazios de números reais positivos.

Comentários:
Queremos saber se sempre em um **conjunto não vazio de números inteiros positivos,** vamos ter um valor que será menor que qualquer outro que pertença a esse conjunto. Por exemplo,

$$A = \{\mathbf{5}, 102, 532, 1023\}$$

$$B = \{100, \mathbf{20}, 50, 123, 999\}$$

$$C = \{34212, 23122, \mathbf{7237}, 12831, 23812\}$$

Perceba que **não importa que conjunto montamos com números inteiros positivos**, sempre haverá um elemento que será menor (ou igual) que qualquer outro elemento desse conjunto. Esse fato é conhecido como **Princípio da Boa Ordenação ou Princípio da Boa Ordem**, cuja demonstração foge do escopo do nosso curso. De toda forma, **é um princípio bastante intuitivo**.

Acontece que, tal princípio **é apenas válido para os números naturais (ou números inteiros positivos).** Imagine o intervalo (10,15). Como o 10 não está contido no conjunto, **você pode chegar tão próximo dele quanto se queira**. Sempre haverá um número menor. Por exemplo, se você diz que o menor número do intervalo (10, 15) é 10,000000000001, isso não é verdade pois 10,0000000000000000001 também é um elemento dele.

Nessas situações, **em que o limite inferior do intervalo é aberto**, sempre encontraremos um número menor, **não importa o quão pequeno seja o número que estamos pensando**. Logo, **o item se encontra errado pois o Princípio da Boa Ordenação não é válido para o conjunto dos reais**, conforme exemplo ilustrado acima.

Gabarito: ERRADO.

7. (CESPE/SEDF/2017) O resultado da soma dos números reais a e b será um número racional se, e somente se, cada um dos números a e b for um número racional.

Comentários:

Um jeito rápido de julgar esse item é **buscar um contraexemplo**. Considere os seguintes números reais:

$$a = 2 + \sqrt{3}$$

$$b = 2 - \sqrt{3}$$

Note que **ambos são números irracionais**. Vamos somá-los e ver que número obtemos.

$$N = a + b$$

$$N = \left(2 + \sqrt{3}\right) + (2 - \sqrt{3})$$

$$N = 4$$

Ora, **somamos dois números irracionais e obtivemos um número racional**! Logo, para a soma de dois números ser um número racional, **não é necessário que os dois sejam racionais**.

Gabarito: ERRADO.

8. (CESPE/MDIC/2014) Lúcio, Breno, Cláudia e Denise abriram a loja virtual Lik, para a qual, no ato de abertura, Lúcio contribuiu com R$ 10.000,00; Breno, com R$ 15.000,00; Cláudia, com R$ 12.000,00; e Denise, com R$ 13.000,00. Os lucros obtidos por essa loja serão distribuídos de forma diretamente proporcional à participação financeira de cada um dos sócios no ato de abertura da loja. A partir dessas informações, julgue o item a seguir:

Se M for a quantidade média de acessos por minuto ao sítio eletrônico da loja Lik e $M^2 = 0{,}8$, então M será um número irracional menor que 0,8.

Comentários:

Como ***M* é um número positivo**, podemos dizer que $M = \sqrt{0{,}8}$. Sabemos que **raízes de números menores do que um produzem resultados maiores do que o radicando**. Por exemplo, lembre-se:

$$\sqrt{0{,}64} = 0{,}8 \qquad (0{,}8 > 0{,}64)$$

$$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \qquad (0{,}5 > 0{,}25)$$

Nesse raciocínio, M, que é a **raiz quadrada positiva de 0,8**, **é maior do que 0,8** e não menor.

Gabarito: ERRADO.

9. (CESPE/SECTI-DF/2014) Acerca das propriedades dos conjuntos numéricos, julgue o item a seguir.

O número $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ é um número irracional.

Comentários:

Questão bem sacana, pessoal! O aluno fica muito tentado a marcar o item como correto!

Reconheço que a resolução dessa questão vai envolver alguns conhecimentos que não estudamos ainda, como **produtos notáveis**. Por isso, caso não tenha visto ainda, **não se desespere**! Muito certamente a resolução fará mais sentido lá na frente! Inicialmente, vamos chamar esse número de "x".

$$x = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$$

Agora, vamos **elevar os dois lados ao quadrado**.

$$x^2 = \left(\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}\right)^2$$

Para desenvolver esse quadrado, vamos usar o produto notável: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$x^2 = \left(\sqrt{12 + 6\sqrt{3}}\right)^2 + 2\sqrt{(12 + 6\sqrt{3})(12 - 6\sqrt{3})} + \left(\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}\right)^2$$

$$x^2 = (12 + \cancel{6\sqrt{3}}) + 2\sqrt{(12 + 6\sqrt{3})(12 - 6\sqrt{3})} + (12 - \cancel{6\sqrt{3}})$$

$$x^2 = 24 + 2\sqrt{(12 + 6\sqrt{3})(12 - 6\sqrt{3})}$$

Agora, para note que esse produto dentro da raiz é um **produto da soma pela diferença**. Com isso, podemos usar que: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$x^2 = 24 + 2\sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2}$$

$$x^2 = 24 + 2\sqrt{144 - 108}$$

$$x^2 = 24 + 2\sqrt{36}$$

$$x^2 = 24 + 2 \cdot 6 \quad \rightarrow \quad x^2 = 24 + 12 \quad \rightarrow \quad x^2 = 36 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{36}$$

$$\boxed{x = \pm 6}$$

Note que "x" é uma soma de números positivos, logo, **ele só pode ser um número positivo também**. O sinal de **"menos"** que obtivemos apareceu por causa das nossas manipulações (mais precisamente, quando elevamos os dois lados ao quadrado), por isso, **não devemos considerá-lo**. Com isso,

$$\boldsymbol{x = 6}$$

Professor, então o senhor está me dizendo que $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = 6$ *????*

Isso mesmo, meu caro aluno! Logo, $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ é um número **racional**.

Gabarito: ERRADO.

10. (CESPE/SEDUC-AL/2013) Sabendo que os números racionais são, precisamente, as dízimas periódicas, julgue o item seguinte acerca de números e dízimas periódicas e não periódicas.

O produto de dois números irracionais é um número irracional.

Comentários:

Errado, pessoal! Fizemos vários exemplos na teoria para mostrar que isso não é verdade! Por exemplo, considere $\sqrt{5}$ e $\sqrt{20}$! São **dois números irracionais** cujo produto é:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$$

Logo, acabamos de mostrar dois números irracionais em que o produto deles é um **número racional**.

Gabarito: ERRADO.

11. (CESPE/SEDUC-AL/2013) Sabendo que os números racionais são, precisamente, as dízimas periódicas, julgue o item seguinte acerca de números e dízimas periódicas e não periódicas.

O produto de um número racional não nulo por um número irracional será sempre um número irracional.

Comentários:
É isso mesmo, pessoal! Se você tem um número racional e o multiplica por um número irracional, **o resultado será sempre um irracional**. Observe alguns exemplos:

$$2\sqrt{2} \qquad\qquad 5e \qquad\qquad 3\pi$$

O fato de multiplicamos o irracional por um racional, não racionaliza o número!

A mesma coisa acontece **na soma ou subtração**. Se temos um racional e outro irracional**, o resultado será sempre um irracional**. Guarde essas informações!

Gabarito: CERTO.

12. (CESPE/SEE-AL/2013) Sabendo que os números racionais são, precisamente, as dízimas periódicas, julgue os itens seguintes acerca de números e dízimas periódicas e não periódicas. Um número é irracional se, e somente se pode ser representado por uma dízima não periódica.

Comentários:
Nós vimos na teoria que **um número irracional não pode ser representado por meio de frações**. Nossos exemplos clássicos de números irracionais são o $\boldsymbol{\pi = 3,141592653589}$ ... e $\boldsymbol{\sqrt{2} = 1.41421356295}$ ... . Observe que **nenhum forma uma dízima periódica**, pois, se assim acontecesse, poderíamos **montar a famosa fração geratriz** e **o número seria racional**.

Logo, o item encontra-se correto. O **número que é uma dízima não periódica** não pode ser representado em forma de fração e, por esse motivo, **é um número irracional**.

Gabarito: CERTO.

13. (CESPE/TRE-RJ/2012) Para cada subconjunto A $de\ \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, defina $P(A)$ como o produto dos elementos de A e adote a convenção $P(\emptyset) = 1$. Com base nessa situação, julgue o item a seguir:

Se $A \subset \Omega$ e se algum elemento de A é um número ímpar, então $P(A)$ será, necessariamente, um número ímpar.

Comentários:
Um jeito bom de resolver essa questão **é buscar um contraexemplo**. Imagine o subconjunto $A = \{1, 2\}$ de **Ω.** Observe que **1 é um número ímpar** e mesmo assim: $P(A) = 1 \times 2 = 2$. **Mesmo com um elemento ímpar no subconjunto, o produto dos elementos foi um número par.**

Portanto, o fato de algum elemento de A ser um número ímpar, não implica que o produto dos elementos desse subconjunto também será. Caso dentro desse subconjunto exista um outro elemento que seja par, o produto será um número par.

Gabarito: ERRADO.

14. (CESPE/SEDUC-AM/2011) Acerca de números inteiros, divisibilidade, números racionais e reais, julgue o item subsequente:

Existem números irracionais p e q, com $p \neq q$, tais que o produto $p \times q$ é um número racional.

Comentários:
Para julgar esse item, devemos encontrar **dois números irracionais que multiplicados forneçam um número racional**. Imagine, por exemplo, os números $p = \sqrt{5}$ e $q = \sqrt{20}$. São **dois números irracionais diferentes**, obedecem, portanto, a condição $p \neq q$. O produto dos dois fica:

$$p \times q = \sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$$

Veja que o produto desses dois números irracionais **resultou no número 10**, **que é um racional!** Logo, o enunciado **está correto** ao afirmar que existem números irracionais cujo produto é um racional.

Gabarito: CERTO.

15. (CESPE/FINEP/2009) Se $s = r\sqrt{2}$ em que r e s são números racionais, e se $s \in [-2, 2]$, então s é igual a
A) -2.
B) -1.
C) 0.

D) 1.
E) 2.

Comentários:
Sabemos que a multiplicação de um **número racional por um número irracional**, será **quase sempre um irracional**! Qual o único caso que você vai pegar um racional, multiplicar por um irracional e o resultado ainda ser um racional? **Quando o racional for o zero!**

$$s = 0 \cdot \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad s = 0$$

Veja que $s = 0$ obedece a condição de que $s \in [-2,2]$. Portanto, é a nossa resposta.

Se você tivesse dificuldade, ainda **há a possibilidade de testar as alternativas**. Você pode **substituir os "possíveis" valores de s e encontrar o valor de r associado**. Você perceberá que a única alternativa possível, que implica **tanto r quanto s como sendo números racionais**, é a letra C.

Gabarito: Letra C.

16. (CESPE/SEDUC/2009) Julgue os itens relativos a números reais.

I. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ e $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ são, ambos, números irracionais.
II. Se u e v são números inteiros e se $u^2 > v^2$, então $u > v$.
III. Se m e n são números inteiros e se $m \times n$ é um número par, então pelo menos um deles, m ou n, é um número par.
IV. Se a e b são números inteiros e se $a \neq 0$, então a^b é um número inteiro.
V. A dízima 0,2222... representa um número racional.

Estão certos apenas os itens.
A) I e IV.
B) III e V.
C) I, II e III.
D) II, IV e V.

Comentários:
Vamos analisar afirmativa por afirmativa.

I. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ e $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ são, ambos, números irracionais.

Afirmativa incorreta. Observe que $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$. Logo**, a primeira fração do item já não é um número irracional**. É apenas o número 2, **que é racional**, disfarçado de um jeito mais complicado.

II. Se u e v são números inteiros e se $u^2 > v^2$, então $u > v$.

Afirmativa incorreta. Se u e v são inteiros, então eles estão no conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Lembre-se que, nos inteiros, **os números negativos estão incluídos** e são eles que usaremos para obter um contraexemplo do que está falado na afirmativa. Imagine o seguinte:

$$2^2 > 1^2 \quad \rightarrow \quad 4 > 1$$

A afirmação acima está correta, não é verdade? Note que, de fato, $2 > 1$. Agora, visualize o seguinte:

$$(-2)^2 > (-1)^2 \quad \rightarrow \quad 4 > 1$$

A afirmação acima continua correta, concorda? No entanto, dessa vez, temos que $\mathbf{-2 < -1}$. Logo, **o item não procede** quando afirma categoricamente que se $u^2 > v^2$ então $u > v$.

III. Se m e n são números inteiros e se $m \times n$ é um número par, então pelo menos um deles, m ou n, é um número par.

-

Afirmação correta. Sabemos que **números pares são números que podem ser escritos na forma $p = 2q$**. Em outras palavras, **sempre encontraremos o fator 2 em um número par**.

Se um produto $m \times n$ é par, então significa que **$m \times n$ possui o fator 2** que não pode ter "surgido do nada", **ele necessariamente veio de um dos números do produto, m ou n**. Logo, **um dos dois números deve ser um número par** para que o produto também seja.

IV. Se a e b são números inteiros e se $a \neq 0$, então a^b é um número inteiro.
Alternativa incorreta. Lembre-se que se a e b são números inteiros, **então eles podem ser números negativos**! Imagine a seguinte situação: $a = 2$ e $b = -1$.

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Observe que **obtivemos um número racional**, o que contradiz a afirmativa.

V. A dízima 0,2222... representa um número racional.
Alternativa correta. Estudamos que **todo número racional pode ser escrito na forma de uma fração**. Lembre-se que **até as dízimas periódicas podem ser escritas em forma de uma fração**, que chamamos de

fração geratriz. A dízima $0,222\ldots$ é periódica, podendo ser escrita na forma de fração, o que a caracteriza como **um número racional**.

Gabarito: Letra B.

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Operações com Conjuntos

1. (CEBRASPE/TST/2024) Considerando-se P como o conjunto dos números primos ímpares e I como o conjunto dos números naturais ímpares, conclui-se que P - I será

A) o conjunto dos números pares.

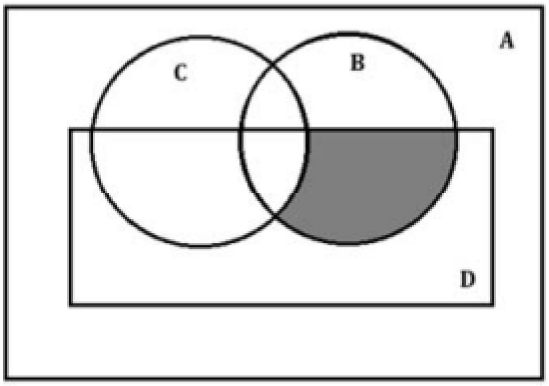
B) o conjunto dos números ímpares primos.

C) o conjunto dos números primos pares.

D) o conjunto vazio.

E) o conjunto dos ímpares não primos.

2. (CEBRASPE/ISS - CAMAÇARI/2024)



Na figura precedente, que representa quatro conjuntos identificados por A, B, C e D, a região destacada corresponde a

A) $(B - C) \cap D$.

B) $B \cap D$.

C) $B \cap C \cap D$.

D) $(B - D) \cap C$.

E) $B - D$.

TEXTO PARA AS QUESTÕES 3 E 4.

Especialistas em financiamento e execução de programas e projetos educacionais foram designados para trabalhar em três projetos diferentes, sendo que um mesmo especialista pode trabalhar em dois ou até nos três projetos. O conjunto A representa o grupo de especialistas designados para trabalhar no projeto 1; B, o conjunto formado por especialistas designados para trabalhar no projeto 2; e C, o conjunto formado por especialistas designados para trabalhar no projeto 3. Em relação a essa situação hipotética, julgue os seguintes itens.

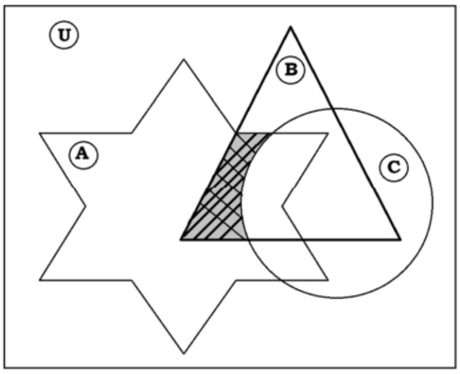
3. (CEBRASPE/FNDE/2023) O subconjunto dos especialistas que trabalham somente em um projeto pode ser corretamente representado por $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$.

4. (CEBRASPE/FNDE/2023) O subconjunto dos especialistas designados para trabalhar nos projetos 1 e 2, mas não no projeto 3, pode ser corretamente representado por $(A \cap B) - (B \cap C)$.

5. (CEBRASPE/PETROBRAS/2023) Acerca da teoria dos conjuntos, julgue o próximo item.

Para três conjuntos, A, B e C, não vazios, se A está contido em B e se C não contém B, então C também não contém A.

6. (CEBRASPE/PM-SC/2023)



A figura precedente apresenta os conjuntos A, B, C e U. Considerando que $C_Y(X)$ representa o complementar de X em Y, assinale a opção que representa corretamente o subconjunto do conjunto B em destaque na referida figura.

A) $C_U(C \cap B)$
B) $A \cap B \cap C$
C) $C_B(C) \cap A$
D) $C_U(A) \cap C$
E) $A \cup (B \cap C)$

7. (CEBRASPE/PC-PB/2022) Considere que, no conjunto D_0 de todos os detentos em dado momento, D_1 seja o conjunto de todos os detentos condenados pelo cometimento de, pelo menos, um crime, D_2 seja o conjunto dos condenados por, pelo menos, dois crimes, e assim por diante. Nessa situação, o conjunto dos detentos condenados pelo cometimento de exatamente 4 crimes é

A) $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4$
B) $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$
C) D_4
D) $D_4 - D_5$
E) $D_5 - D_4$

8. (CEBRASPE/MPjTCE-SC/2023) Dada uma equipe de dez servidores, entre eles Alberto e Bruna, W é o conjunto de todas as listas que podem ser formadas com exatamente três servidores.

A partir das informações anteriores, e sabendo que, nessa hipótese, A é o conjunto de todas as listas em que consta o nome de Alberto e B, o conjunto daquelas em que consta o nome de Bruna, julgue o item que se segue.

O conjunto de listas que não apresentam os nomes de Alberto nem de Bruna pode ser corretamente representado por $W - A \cap B$.

9. (CEBRASPE/MPjTCE-SC/2023) Dada uma equipe de dez servidores, entre eles Alberto e Bruna, W é o conjunto de todas as listas que podem ser formadas com exatamente três servidores.

A partir das informações anteriores, e sabendo que, nessa hipótese, A é o conjunto de todas as listas em que consta o nome de Alberto e B, o conjunto daquelas em que consta o nome de Bruna, julgue o item que se segue.

O conjunto de listas que apresentam apenas um dos nomes Alberto ou Bruna pode ser corretamente representado por $(A - B) \cup (B - A)$.

10. (CEBRASPE/COGE-CE/2019) Segundo o portal cearatransparente.ce.gov.br, em 2018, dos 184 municípios do estado do Ceará, 4 celebraram exatamente 1 convênio com o governo estadual, 22 celebraram exatamente 2 convênios com o governo estadual, e 156 celebraram 3 ou mais convênios com o governo estadual. De acordo com o texto, se, para cada $j = 0, 1, 2, \ldots,$ M_j for o conjunto dos municípios cearenses que celebraram, pelo menos, j convênios com o governo estadual, então o conjunto dos municípios que não celebraram nenhum convênio com o governo do estado será representado pelo conjunto

A) M_0

B) $M_1 - M_0$

C) $M_1 \cap M_0$

D) $M_0 - M_1$

E) $M_0 \cup M_1$

11. (CEBRASPE/TRF-1/2017) Em uma reunião de colegiado, após a aprovação de uma matéria polêmica pelo placar de 6 votos a favor e 5 contra, um dos 11 presentes fez a seguinte afirmação: "Basta um de nós mudar de ideia e a decisão será totalmente modificada." Considerando a situação apresentada e a proposição correspondente à afirmação feita, julgue o próximo item.

Se A for o conjunto dos presentes que votaram a favor e B for o conjunto dos presentes que votaram contra, então o conjunto diferença A\B terá exatamente um elemento.

12. (CEBRASPE/INSS/2015) Julgue o item a seguir, relativos a raciocínio lógico e operações com conjuntos.

Se A, B e C forem conjuntos quaisquer tais que $A, B \subset C$, então $(C \setminus A) \cap (A \cup B) = C \cap B$.

(SUFRAMA/2014) Texto para as próximas questões
Para o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, se A for um subconjunto de Ω, indique por $S(A)$ a soma dos elementos de A e considere e $S(\emptyset) = 0$. Nesse sentido, julgue o item a seguir.

13. (CEBRASPE/SUFRAMA/2014) Se A e B forem subconjuntos de Ω, tais que $\boldsymbol{A \subset B}$, então $\boldsymbol{0 \leq S(A) \leq S(B) \leq 55}$.

14. (CEBRASPE/SUFRAMA/2014) Se $\boldsymbol{A \subset \Omega}$, e se $\boldsymbol{\Omega \backslash A}$ é o complementar de A em Ω, então $\boldsymbol{S(\Omega \backslash A) = S(\Omega) - S(A)}$.

15. (CEBRASPE/SUFRAMA/2014) É possível encontrar conjuntos A e B, subconjuntos de Ω, disjuntos, tais que $\boldsymbol{A \cup B = \Omega}$ e $\boldsymbol{S(A) = S(B)}$.

GABARITO

1. LETRA D
2. LETRA A
3. ERRADO
4. CERTO
5. ERRADO
6. LETRA C
7. LETRA D
8. ERRADO
9. CERTO
10. LETRA D
11. ERRADO
12. ERRADO
13. CERTO
14. CERTO
15. ERRADO

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Princípio da Inclusão-Exclusão

Texto para as questões 01 e 02

Em uma plataforma de petróleo, por vez, 166 pessoas ficam embarcadas para a manutenção da operação. Enquanto ficam embarcados, os empregados têm acesso a espaços para esporte e lazer, como academia, quadras de esporte e sala de jogos. Nas quadras de esporte, é possível praticar futsal, basquete e vôlei e do total de trabalhadores da plataforma, 58 praticam futsal; 26 praticam futsal e basquete; quem pratica vôlei não pratica nenhum outro esporte; 84 praticam apenas um esporte; e 48 não jogam basquete. Considerando os dados apresentados na situação hipotética precedente, julgue os próximos itens.

1. (CEBRASPE/PETROBRAS/2024) Dezesseis pessoas praticam vôlei.

2. (CEBRASPE/PETROBRAS/2024) Um total de 56 pessoas não pratica nenhum esporte na plataforma.

3. (CEBRASPE/TRT-8/2023) Ao classificar 80 processos a fim de distribuí-los às áreas competentes para tratamento, um técnico judiciário verificou que, devido aos diversos critérios de classificação, 45 dos processos poderiam ser distribuídos ao setor A, 55 ao setor B e 15 a nenhum desses dois setores. Na situação hipotética precedente, a quantidade de processos que poderiam ser distribuídos a qualquer um dos setores A ou B é igual a

A) 10.
B) 30.
C) 35.
D) 40.
E) 65.

4. (CEBRASPE/CBM-TO/2023) Em certa unidade do corpo de bombeiros, 60 militares praticam, como esporte, futebol e(ou) voleibol. O conjunto A compreende os militares que praticam futebol e o conjunto B, os que praticam voleibol. Nessa situação hipotética, se A − B contém 18 integrantes e B − A contém 25 integrantes, então o número de militares que praticam futebol e voleibol é igual a

A) 17.
B) 35.
C) 43.
D) 42.

5. (CEBRASPE/TJ-ES/2023) O item a seguir apresenta uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada com base em análise combinatória, probabilidade, operações com conjuntos e problemas geométricos.

Considere que 44 servidores falem uma ou mais línguas estrangeiras e que, entre eles, 12 servidores falem apenas inglês; 10 falem apenas espanhol; 11 falem apenas francês; 1 fale inglês e francês; 2 falem espanhol e francês; e 17 falem francês. Nessa situação, 7 servidores falam inglês e espanhol, mas não falam francês.

6. (CEBRASPE/TJ-CE/2023) Considere-se que um grupo de 50 servidores de um tribunal tenha sido selecionado para realizar cursos de aperfeiçoamento e que cada pessoa desse grupo faça pelo menos um dos seguintes dois cursos: gestão de projetos e ciência de dados. Nessa situação hipotética, se 29 pessoas fizerem ambos os cursos e 37 pessoas fizerem pelo menos o curso de gestão de projetos, o número exato de pessoas que farão apenas o curso de ciência de dados é igual a

A) 8.
B) 13.
C) 42.
D) 21.
E) 33.

7. (CEBRASPE/PM-SC/2023) Uma pesquisa com participantes de uma festa tradicional de Santa Catarina revelou que 320 tinham experimentado a cerveja artesanal X, 200 não experimentaram a cerveja artesanal Y, e 220 tinham experimentado as cervejas artesanais X e Y. Com base na situação hipotética apresentada, o número de participantes dessa pesquisa que não experimentaram nenhuma dessas duas cervejas artesanais

A) é inferior ou igual a 50.
B) é superior a 50 e inferior ou igual a 70.
C) é superior a 70 e inferior ou igual a 90.
D) é superior a 90 e inferior ou igual a 110.
E) é superior a 110.

8. (CEBRASPE/FUNPRESP-EXE/2022) A seguir, são apresentadas informações obtidas a partir de uma pesquisa realizada com 1.000 pessoas.

- 480 possuem plano de previdência privada;
- 650 possuem aplicações em outros tipos de produtos financeiros;
- 320 não possuem aplicação em nenhum produto financeiro.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item seguinte.

Há mais pessoas que não possuem aplicações em nenhum produto financeiro que pessoas que possuem simultaneamente plano de previdência privada e aplicações em outros produtos financeiros.

9. (CEBRASPE/ME/2020) O setor de gestão de pessoas de determinada empresa realiza regularmente a análise de pedidos de férias e de licenças dos seus funcionários. Os pedidos são feitos em processos, em que o funcionário solicita apenas férias, apenas licença ou ambos (férias e licença). Em determinado dia, 30 processos foram analisados, nos quais constavam 15 pedidos de férias e 23 pedidos de licenças. Com base nessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

A quantidade de processos analisados nesse dia que eram referentes apenas a pedido de férias é igual a 8.

10. (CEBRASPE/PREF. B dos COQUEIROS/2020) Em uma pesquisa feita com um grupo de 100 turistas que visitavam Aracaju, verificou-se que todos eles tinham visitado pelo menos duas das seguintes praias: Atalaia, Aruana e da Costa. A tabela a seguir mostra quantos desses turistas visitaram as referidas praias.

Praias Visitadas	Número de Turistas
Atalaia e Aruana	**40**
Atalaia e da Costa	**40**
Aruana e da Costa	**40**

Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

I. Menos de 40 turistas visitaram a praia de Atalaia.
II. Nenhum dos turistas participantes da pesquisa visitou apenas uma das praias citadas.
III. Nenhum dos turistas participantes da pesquisa visitou todas as três praias citadas.

Assinale a opção correta.
A) Apenas o item II está certo.
B) Apenas o item III está certo.
C) Apenas os itens I e II estão certos.
D) Apenas os itens I e III estão certos.
E) Todos os itens estão certos.

11. (CEBRASPE/TJ-PR/2019) Em determinado tribunal, os conselheiros atuam nos conselhos I, II e III, podendo atuar em apenas um, em dois ou em todos os conselhos, como mostra a tabela seguinte.

Quantidade de Conselheiros	Conselho de Atuação
35	I
25	II
24	III
10	I e II

12	I e III
8	II e III
4	I, II e III

Nesse caso, a quantidade de conselheiros que atuam em, no máximo, um dos conselhos é igual a

A) 26.

B) 36.

C) 50.

D) 58.

E) 84.

12. (CEBRASPE/IFF/2018) Em uma consulta a 600 estudantes de uma escola acerca da preferência deles entre teatro ou cinema, apenas 50 deles não gostam de cinema nem de teatro. Entre os demais, 370 gostam de teatro e 420 gostam de cinema. Nesse caso, a quantidade desses estudantes que gostam de teatro e cinema é igual a

A) 50.

B) 130.

C) 180.

D) 240.

E) 370.

13. (CEBRASPE/IFF/2018) Para um conjunto qualquer X, $n(X)$ representa a quantidade de elementos de X. Nesse sentido, considere que os conjuntos A, B e C tenham as seguintes propriedades:

$$n(A) = n(B) = n(C) = 50;$$
$$n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = 10;$$
$$n(A \cap B \cap C) = 0.$$

Nessa situação, $n(A \cup B \cup C)$ é igual a:

A) 100.

B) 110.

C) 120.

D) 130.

D) 140.

Texto para as próximas questões

Determinado porto recebeu um grande carregamento de frango congelado, carne suína congelada e carne bovina congelada, para exportação. Esses produtos foram distribuídos em 800 contêineres, da seguinte forma: nenhum contêiner foi carregado com os três produtos; 300 contêineres foram carregados com carne bovina; 450, com carne suína; 100, com frango e carne bovina; 150, com carne suína e carne bovina; 100, com frango e carne suína.

14. (CEBRASPE/EMAP/2018) Nessa situação hipotética, 250 contêineres foram carregados somente com carne suína.

15. (CEBRASPE/EMAP/2018) Nessa situação, 50 contêineres foram carregados somente com carne bovina.

16. (CEBRASPE/EMAP/2018) Nessa situação hipotética, a carga de 400 contêineres continha frango congelado.

(PF/2018) Texto para as próximas questões
Em um aeroporto, 30 passageiros que desembarcaram de determinado voo e que estiveram nos países A, B ou C, nos quais ocorre uma epidemia infecciosa, foram selecionados para ser examinados. Constatou-se que exatamente 25 dos passageiros selecionados estiveram em A ou em B, nenhum desses 25 passageiros esteve em C e 6 desses 25 passageiros estiveram em A e em B. Com referência a essa situação hipotética, julgue os itens a seguir.

17. (CEBRASPE/PF/2018) Se 11 passageiros estiveram em B, então mais de 15 estiveram em A.

Texto para as próximas questões
O resultado de uma pesquisa acerca da satisfação de 200 papiloscopistas, no que diz respeito às tarefas por eles executadas de identificação de vítimas e de descobertas de crimes de falsificação, foi o seguinte:

I. 30 papiloscopistas sentem-se igualmente satisfeitos ao executar qualquer uma dessas tarefas;
II. 180 papiloscopistas sentem-se satisfeitos ao executar pelo menos uma dessas tarefas.

Considerando que todos os 200 papiloscopistas responderam à pesquisa, julgue o item seguinte.

18. (CEBRASPE/PF/2018) A quantidade de papiloscopistas que se sentem satisfeitos ao executar exatamente uma das referidas tarefas é superior a 100.

19. (CEBRASPE/PF/2018) Nessa situação, as informações dadas permitem inferir que exatamente 75 papiloscopistas sentem-se satisfeitos ao executarem a tarefa de identificação de vítimas.

20. (CEBRASPE/SEFAZ-RS/2018) Em determinado dia, os órgãos responsáveis atenderam 50 contribuintes para resolver pendências relativas ao IPTU, ao IPVA e a outros tributos. Sabe-se que foram atendidos:

I. 18 contribuintes com pendências de IPTU;

II. 23 contribuintes com pendências de IPVA;
III. 8 contribuintes com pendências de IPTU e IPVA.

Nesse caso, a quantidade de contribuintes atendidos cujas pendências não se referiam a IPTU nem a IPVA foi igual a

A) 15.
B) 17.
C) 25.
D) 9.
E) 10.

Texto para as próximas questões

Um banco comercial realizou um evento de negócios na cidade de Fortaleza – CE. Após as reuniões, os participantes do evento visitaram pontos turísticos da cidade: 95 dos participantes visitaram o Mercado Central, 80 visitaram o Espigão de Iracema e 90 visitaram o Centro Cultural Dragão do Mar. Do total de participantes, 30 visitaram somente o Mercado Central, 50 visitaram o Espigão de Iracema e o Centro Cultural Dragão do Mar, 35 visitaram o Mercado Central e o Espigão de Iracema, e 20 visitaram esses três pontos turísticos. Considerando que todos os participantes tenham visitado, pelo menos, um desses três pontos turísticos, julgue os itens a seguir.

21. (CEBRASPE/BNB/2018) Mais de 15 dos participantes do evento visitaram somente o Centro Cultural Dragão do Mar.

22. (CEBRASPE/BNB/2018) Menos de 12 dos participantes do evento visitaram somente o Espigão de Iracema e o Mercado Central.

23. (CEBRASPE/BNB/2018) Mais de 50 dos participantes do evento não visitaram o Centro Cultural Dragão do Mar.

24. (CEBRASPE/BNB/2018) Menos de 180 pessoas participaram do evento.

Texto para as próximas questões

Uma pesquisa revelou características da população de uma pequena comunidade composta apenas por casais e seus filhos. Todos os casais dessa comunidade são elementos do conjunto $A \cup B \cup C$ em que:

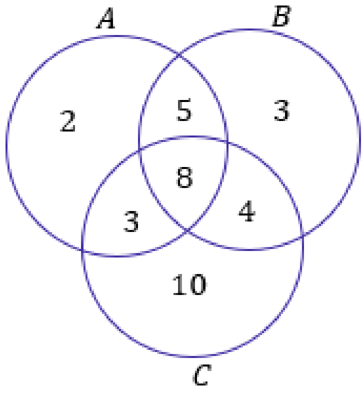
A = {casais com pelo menos um filho com mais de 20 anos de idade};
B = {casais com pelo menos um filho com menos de 10 anos de idade};
C = {casais com pelo menos 4 filhos}.

Considerando que $n(P)$ indique a quantidade de elementos de um conjunto P, suponha que:

$$n(A) = 18;\ n(B) = 20;\ n(C) = 25;$$

$$n(A \cap B) = 13; n(A \cap C) = 11; n(B \cap C) = 12\ e\ n(A \cap B \cap C) = 8.$$

O diagrama a seguir mostra essas quantidades de elementos.



Com base nas informações e no diagrama precedentes, julgue os itens a seguir.

25. (CEBRASPE/EBSERH/2018) A referida comunidade é formada por menos de 180 pessoas.

GABARITO

1. CERTO
2. CERTO
3. LETRA C
4. LETRA A
5. ERRADO
6. LETRA B
7. LETRA D
8. ERRADO
9. ERRADO
10. LETRA A
11. LETRA B
12. LETRA D
13. LETRA C
14. ERRADO
15. CERTO
16. CERTO
17. CERTO
18. CERTO
19. ERRADO
20. LETRA B
21. ERRADO
22. ERRADO
23. CERTO
24. CERTO
25. ERRADO

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Problemas

1. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Acerca das operações com números reais e suas propriedades, julgue o item a seguir.

A soma de dois números irracionais positivos é sempre um número irracional.

2. (CESPE/SEDUC-AL/2021) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e, cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = ln\, x = log_e\, x$ tem inúmeras aplicações científicas. A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

O número de Euler é menor que o número racional 2,72.

3. (CESPE/SEDUC-AL/2021) Acerca das operações com números reais e suas propriedades, julgue o item a seguir.

Se o cubo de um número inteiro é ímpar, então esse número deve ser, necessariamente, ímpar.

4. (CESPE/SEDUC-AL/2021) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e, cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = ln\, x = log_e\, x$ tem inúmeras aplicações científicas. A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

Se $r = 2{,}718718718...$ é uma dízima periódica, então a diferença $(r - e)$ é um número racional.

5. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Considerando as propriedades e as operações fundamentais dos números inteiros, racionais, irracionais e reais, julgue o item a seguir:

O produto de dois números racionais é sempre um número racional. O mesmo é válido para números irracionais: o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

6. (CESPE/PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) Considerando as propriedades e as operações fundamentais dos números inteiros, racionais, irracionais e reais, julgue o item a seguir:

Todo conjunto não vazio de números inteiros positivos possui um menor elemento, isto é, se S é um conjunto de números inteiros positivos, não vazio, então existe $s \in S$ tal que $s \leq x$, para todo $x \in S$. Essa mesma propriedade é também válida para conjuntos não vazios de números reais positivos.

7. (CESPE/SEDF/2017) O resultado da soma dos números reais a e b será um número racional se, e somente se, cada um dos números a e b for um número racional.

8. (CESPE/MDIC/2014) Lúcio, Breno, Cláudia e Denise abriram a loja virtual Lik, para a qual, no ato de abertura, Lúcio contribuiu com R$ 10.000,00; Breno, com R$ 15.000,00; Cláudia, com R$ 12.000,00; e Denise, com R$ 13.000,00. Os lucros obtidos por essa loja serão distribuídos de forma diretamente proporcional à participação financeira de cada um dos sócios no ato de abertura da loja. A partir dessas informações, julgue o item a seguir:

Se M for a quantidade média de acessos por minuto ao sítio eletrônico da loja Lik e $M^2 = 0{,}8$, então M será um número irracional menor que 0,8.

9. (CESPE/SECTI-DF/2014) Acerca das propriedades dos conjuntos numéricos, julgue o item a seguir.

O número $\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ é um número irracional.

10. (CESPE/SEDUC-AL/2013) Sabendo que os números racionais são, precisamente, as dízimas periódicas, julgue o item seguinte acerca de números e dízimas periódicas e não periódicas.

O produto de dois números irracionais é um número irracional.

11. (CESPE/SEDUC-AL/2013) Sabendo que os números racionais são, precisamente, as dízimas periódicas, julgue o item seguinte acerca de números e dízimas periódicas e não periódicas.

O produto de um número racional não nulo por um número irracional será sempre um número irracional.

12. (CESPE/SEE-AL/2013) Sabendo que os números racionais são, precisamente, as dízimas periódicas, julgue os itens seguintes acerca de números e dízimas periódicas e não periódicas. Um número é irracional se, e somente se pode ser representado por uma dízima não periódica.

13. (CESPE/TRE-RJ/2012) Para cada subconjunto A $de\ \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, defina $P(A)$ como o produto dos elementos de A e adote a convenção $P(\emptyset) = 1$. Com base nessa situação, julgue o item a seguir:

Se $A \subset \Omega$ e se algum elemento de A é um número ímpar, então $P(A)$ será, necessariamente, um número ímpar.

14. (CESPE/SEDUC-AM/2011) Acerca de números inteiros, divisibilidade, números racionais e reais, julgue o item subsequente:

Existem números irracionais p e q, com $p \neq q$, tais que o produto $p \times q$ é um número racional.

15. (CESPE/FINEP/2009) Se $s = r\sqrt{2}$ em que r e s são números racionais, e se $s \in [-2, 2]$, então s é igual a

A) -2.

B) -1.

C) 0.

D) 1.

E) 2.

16. (CESPE/SEDUC/2009) Julgue os itens relativos a números reais.

I. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ e $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ são, ambos, números irracionais.

II. Se u e v são números inteiros e se $u^2 > v^2$, então $u > v$.

III. Se m e n são números inteiros e se $m \times n$ é um número par, então pelo menos um deles, m ou n, é um número par.

IV. Se a e b são números inteiros e se $a \neq 0$, então a^b é um número inteiro.

V. A dízima 0,2222... representa um número racional.

Estão certos apenas os itens.

A) I e IV.

B) III e V.

C) I, II e III.

D) II, IV e V.

Gabarito

1. ERRADO
2. CERTO
3. CERTO
4. ERRADO
5. ERRADO
6. ERRADO
7. ERRADO
8. ERRADO
9. ERRADO
10. ERRADO
11. CERTO
12. CERTO
13. ERRADO
14. CERTO
15. LETRA C
16. LETRA B

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.